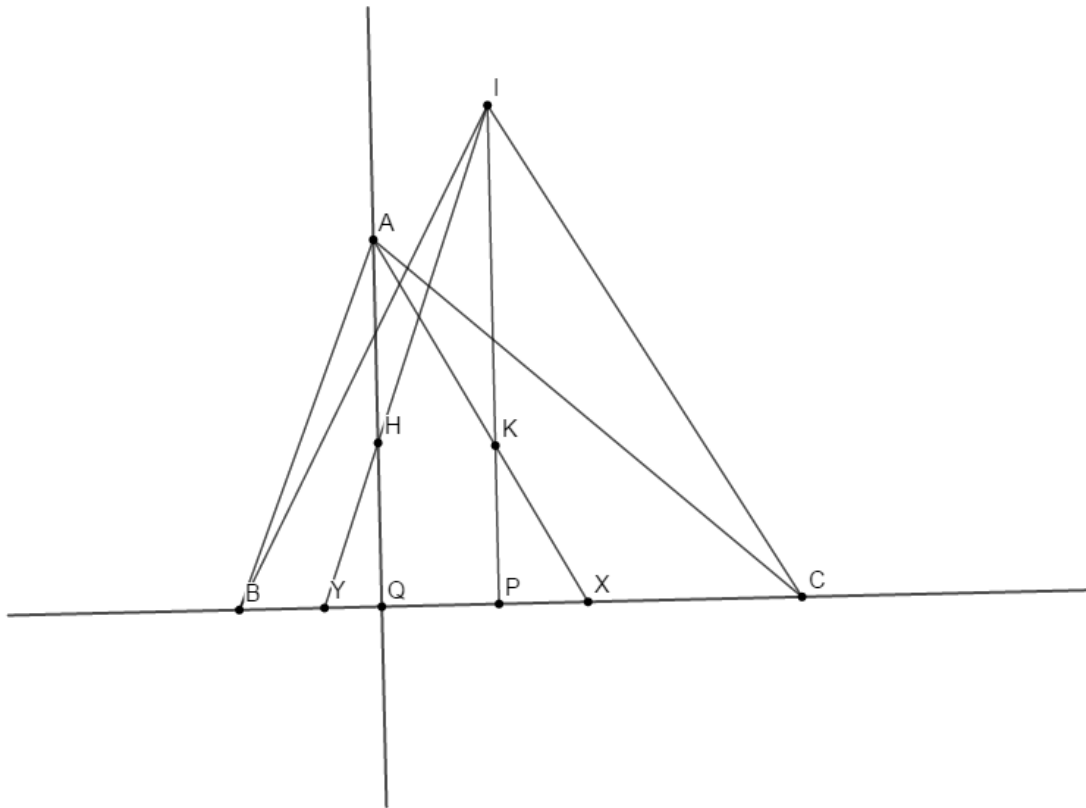


Bổ đề 1: Cho tam giác ABC có trực tâm H , đường cao AQ , điểm I nằm trên nửa mặt phẳng bờ BC chứa A . Gọi K là trực tâm tam giác IBC , đường thẳng IK cắt BC tại P . Đường thẳng AK, IH lần lượt cắt BC tại X, Y . Khi đó: $(BC, QX) = (BC; YP)$

Chứng minh: Gắn hệ vào hệ trục Oxy với Q trùng với O , BC trùng với Ox , QA trùng với Oy .

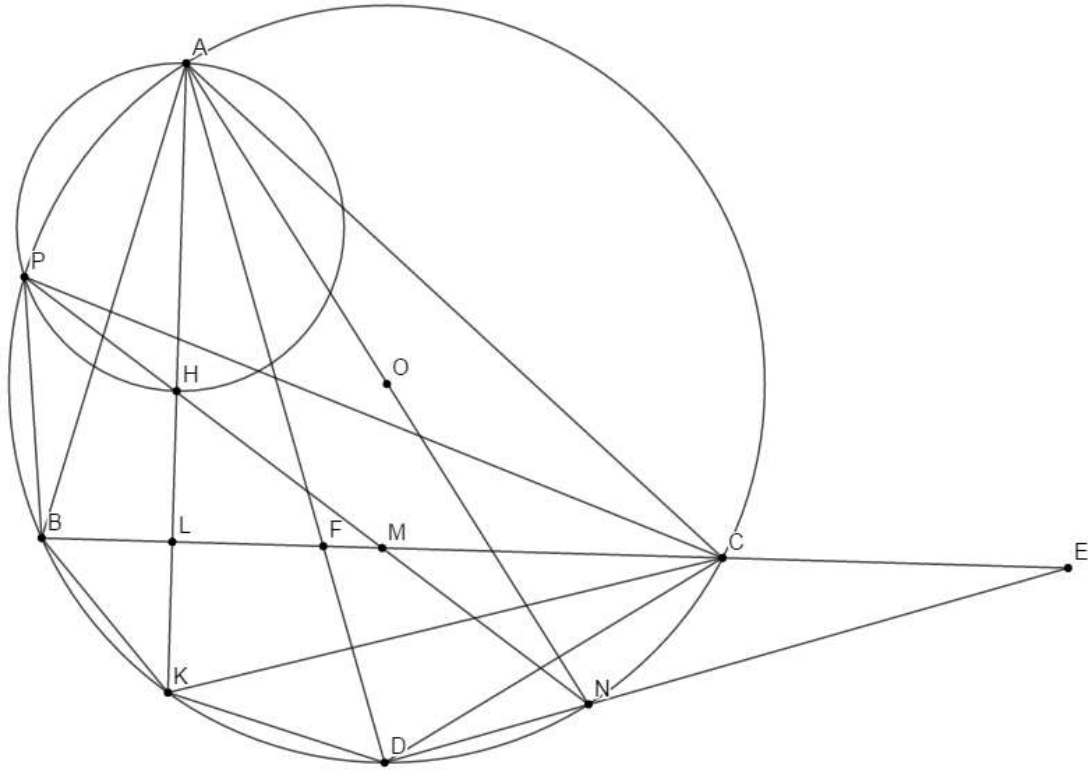


Bằng tính toán suy ra được bổ đề.

Bổ đề 2: Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) , trực tâm H , đường cao AL . D là điểm bất kì thuộc cung BC không chứa A của đường tròn (O) . Đường thẳng vuông góc với AD cắt BC tại E . AD cắt BC tại F . Chứng minh: $(BC, E) = -(BC, LF)$

Chứng minh: Gọi K là giao điểm của AH với đường tròn (O) , kẻ đường kính AN của đường tròn (O) , Đường tròn đường kính AH cắt đường tròn (O) tại P . Gọi M là trung điểm của BC . Ta có các kết quả quen thuộc sau:

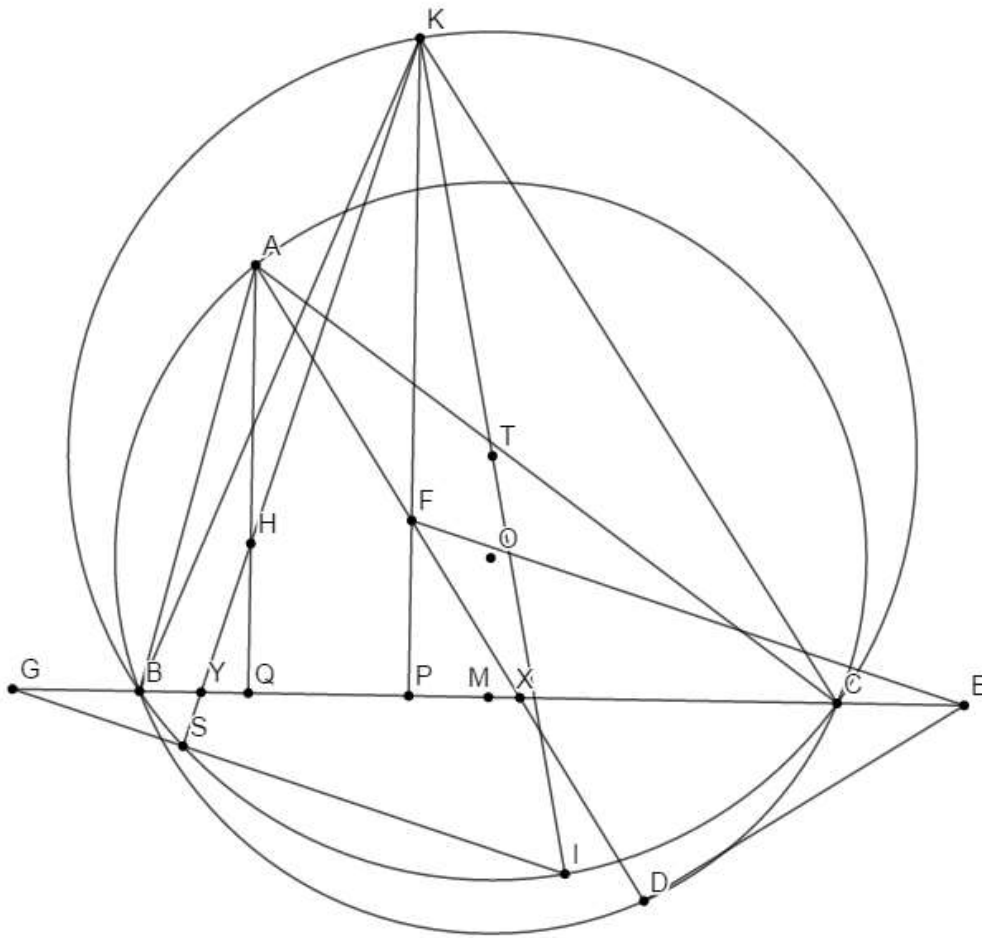
- P, H, M, N thẳng hàng.
- $PBKC$ là tứ giác điều hòa suy ra $\frac{\overline{PB}}{\overline{PC}} = -\frac{\overline{KB}}{\overline{KC}}$



Ta có: $(CB, E) = (BC, ME) = N(BC, ME) = (BC, PD) = \frac{\overline{PB}}{\overline{PC}} : \frac{\overline{DB}}{\overline{DC}} = -\frac{\overline{KB}}{\overline{KC}} : \frac{\overline{DB}}{\overline{DC}} = -(BC, KD)$

Suy ra $(CB, E) = -A(BC, KD) = -(BC, LF)$. Vậy bổ đề được chứng minh.

Quay lại bài toán



Kẻ đường tròn (T) ngoại tiếp tam giác KBC . AH, AD, KF cắt BC lần lượt tại Q, X, P . Gọi M là trung điểm của BC . Đường thẳng KH cắt BC , đường tròn (T) lần lượt tại Y, S . Qua S kẻ đường thẳng vuông góc với KS , cắt đường tròn (T) , BC lần lượt tại I và G .

Ta có H, F lần lượt là trực tâm của tam giác ABC , tam giác KBC . Áp dụng bổ đề 2 ta có:

$$(CB, E) = -(BC, QX) \text{ và } (BC, G) = -(CB, PY) = -(BC, YP)$$

Áp dụng bổ đề 1 ta có : $(BC, QX) = (BC, YP)$ suy ra $(CB, E) = (BC, G)$ từ đó E, G đối xứng nhau qua trung điểm M của BC .

Để thấy F, I đối xứng nhau qua trung điểm M của BC , từ đó, $EF \parallel IG$ mặt khác IS vuông góc với KH nên ta có điều phải chứng minh