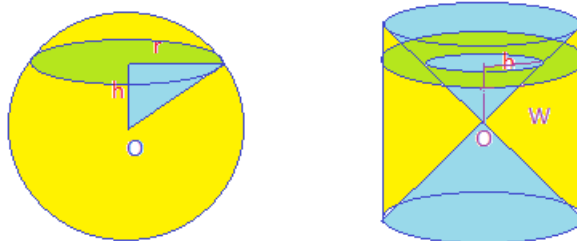


Chứng minh công thức tính thể tích hình cầu : $V = \frac{4}{3} \pi R^3$



Coi một hình cầu bán kính R và một hình trụ bán kính R , cao $2R$ cùng đặt trên mặt phẳng nằm ngang. Trong hình trụ lại có hai hình nón có đỉnh ở tâm và cùng đáy với hình trụ. Mỗi hình nón này (cũng như mỗi hình nón đồng dạng với nó) có tính chất là bán kính đáy của nó bằng chiều cao của nó. Cắt bằng một mặt phẳng nằm ngang thì tiết diện hình của hình cầu là một vòng tròn bán kính r , diện tích $S = \pi r^2 = \pi(R^2 - h^2)$, đồng thời tiết diện hình nón là một vòng tròn có bán kính h , theo tính chất nói trên.

Coi khối W giới hạn giữa hình trụ và hai hình nón. Tiết diện của W là một hình khuyên, diện tích $\pi R^2 - \pi h^2 = \pi(R^2 - h^2)$, bằng diện tích tiết diện hình cầu. Như vậy nếu chia hình cầu với hình W bằng những mặt phẳng song song nằm ngang thành những lá mỏng thì mỗi lá của hình cầu có thể tích bằng lá tương ứng của hình W do đó hình cầu có thể tích bằng hình W . Thể tích hình W bằng hiệu của thể tích hình trụ với thể tích hai hình nón, tức là bằng $\pi R^2 \cdot 2R - (2/3) \pi R^2 \cdot R = \frac{4}{3} \pi R^3$

Vậy thể tích hình cầu bằng

$$V = \frac{4}{3} \pi R^3$$

Chứng minh công thức tính diện tích mặt cầu : $S = 4\pi R^2$

Từ hình cầu tâm O bán kính R . Ta ‘bóc’ một lớp ‘vỏ’ có bề dày d như sau: Lấy một vật thể giới hạn bởi hai mặt cầu đồng tâm bán kính R và $R-d$. Thể tích của vật thể này bằng:

$$V_{(R,d)} = V_{(O;R)} - V_{(O;R-d)} = \frac{4}{3} \pi R^3 - \frac{4}{3} \pi (R-d)^3.$$

Khi cho lớp vỏ ngoài cùng của khối cầu ngày càng mỏng. Tức là độ dày của lớp vỏ tiến tới 0 khi đó thể tích của lớp vỏ xấp xỉ gần bằng diện tích mặt cầu nhân với độ dày của lớp vỏ. Từ đó suy ra:

$$\begin{aligned} S &= \lim_{d \rightarrow 0} \frac{V_{(R,d)}}{d} = \frac{4}{3} \pi \cdot \frac{R^3 + (R-d)^3}{d} = \frac{4}{3} \pi d \cdot \frac{R^2 + (R-d)^2 + R(R-d)}{d} \\ &= \lim_{d \rightarrow 0} \frac{4}{3} \pi [R^2 + (R-d)^2 + R(R-d)] = \frac{4}{3} \pi [R^2 + R^2 + R^2] \\ &= 4 \pi R^2 \end{aligned}$$

Vậy diện tích mặt cầu bằng: $S = 4\pi R^2$

