

MỘT KỸ THUẬT NHỎ ĐỂ SỬ DỤNG BẤT ĐẲNG THỨC CAUCHY-SCHWARZ

Võ Quốc Bá Cẩn

Thông thường khi sử dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz (tham khảo ở [1]) để chứng minh các bất đẳng thức đối xứng (hoặc hoán vị), ta luôn cố gắng đánh giá sao cho tính đối xứng (hoặc hoán vị) của chúng vẫn được giữ nguyên sau bước đánh giá, rồi từ đó tiếp tục đánh giá tiếp để hoàn tất phép chứng minh. Tuy nhiên, không phải lúc nào những cách đánh giá như thế cũng mang lại hiệu quả cao nhất mà đôi lúc chúng còn “hoặc không đưa ta đến kết quả, hoặc quá rườm rà, phức tạp”.

Vậy, liệu còn có cách nào khác tốt hơn khi ta “lỡ” xui xẻo gặp phải những trường hợp như thế không? Thật ra, còn một cách đánh giá Cauchy-Schwarz cũng khá hiệu quả đối với các bất đẳng thức loại này, đó là *sử dụng yếu tố “ít nhất”*. Một cái tên nghe thật lạ!

Tuy nhiên, ẩn đằng sau cái tên lạ mắt này là một kỹ thuật độc đáo và thú vị. Và dưới đây, chúng ta sẽ cùng tìm hiểu về nó. Trước hết, ta hãy cùng xem xét ví dụ sau đây.

Ví dụ 1 (Iranian IMO TST, 2009). Cho a, b, c là các số dương thỏa mãn điều kiện $a + b + c = 3$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{a^2 + b^2 + 2} + \frac{1}{b^2 + c^2 + 2} + \frac{1}{c^2 + a^2 + 2} \leq \frac{3}{4}.$$

Phân tích và tìm tòi lời giải. Sử dụng ý tưởng của kỹ thuật thêm bớt (tham khảo thêm ở [1]), ta có thể viết lại bất đẳng thức thành

$$\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{a^2 + b^2 + 2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{b^2 + c^2 + 2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{c^2 + a^2 + 2}\right) \geq \frac{3}{4},$$

tương đương

$$\frac{a^2 + b^2}{a^2 + b^2 + 2} + \frac{b^2 + c^2}{b^2 + c^2 + 2} + \frac{c^2 + a^2}{c^2 + a^2 + 2} \geq \frac{3}{2}.$$

Đến đây, nếu áp dụng Cauchy-Schwarz theo kiểu thông thường

$$\begin{aligned} \frac{a^2 + b^2}{a^2 + b^2 + 2} + \frac{b^2 + c^2}{b^2 + c^2 + 2} + \frac{c^2 + a^2}{c^2 + a^2 + 2} &\geq \\ &\geq \frac{[(a^2 + b^2) + (b^2 + c^2) + (c^2 + a^2)]^2}{\sum (a^2 + b^2)(a^2 + b^2 + 2)}, \end{aligned}$$

thì ta sẽ phải chứng minh

$$\frac{4(a^2 + b^2 + c^2)^2}{(a^2 + b^2)^2 + (b^2 + c^2)^2 + (c^2 + a^2)^2 + 4(a^2 + b^2 + c^2)} \geq \frac{3}{2}.$$

Nếu quy đồng lên, ta được một bất đẳng thức bậc 4 khá phức tạp, hơn nữa ta lại cũng chưa biết được tính đúng sai của nó. Trong điều kiện thời gian hạn hẹp ở phòng thi (chú ý rằng đây là một bài toán trong đề thi chọn đội tuyển của Iran), nếu tốn nhiều thời gian vào một bài toán phức tạp (ở đây là bất đẳng thức thu được sau đánh giá) và có thể bài toán đó sai thì thật là không nên. Vì vậy cách đánh giá Cauchy-Schwarz như trên thật sự không khả thi, ta cần một kiểu đánh giá khác.

Nhận thấy đánh giá trên có nhược điểm là tạo ra bậc cao, ta cố gắng tìm một đánh giá khác để tránh bậc cao, và đánh giá mà ta nghĩ đến là

$$\begin{aligned} \frac{a^2 + b^2}{a^2 + b^2 + 2} + \frac{b^2 + c^2}{b^2 + c^2 + 2} + \frac{c^2 + a^2}{c^2 + a^2 + 2} &\geq \\ &\geq \frac{(\sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{b^2 + c^2} + \sqrt{c^2 + a^2})^2}{(a^2 + b^2 + 2) + (b^2 + c^2 + 2) + (c^2 + a^2 + 2)}. \end{aligned}$$

Sử dụng đánh giá này đã giúp chúng ta thoát khỏi bậc cao, tuy nhiên vô tình nó lại tạo ra một yếu tố phức tạp khác đó là căn thức. Mà tiêu chí của ta khi sử dụng Cauchy-Schwarz để chứng minh bất đẳng thức là *đưa bài toán trở về dạng đơn giản nhất có thể*. Như thế, cách làm này cũng không mấy khả thi. Vậy ta cần phải làm sao để vừa tránh được bậc cao mà lại vừa tránh được căn thức?

Bây giờ, các bạn hãy để ý ở hằng đẳng thức sau

$$a^2 + b^2 = \frac{(a + b)^2 + (a - b)^2}{2}.$$

Từ đó bất đẳng thức ở trên có thể được viết lại thành

$$\begin{aligned} &\left[\frac{(a + b)^2}{a^2 + b^2 + 2} + \frac{(b + c)^2}{b^2 + c^2 + 2} + \frac{(c + a)^2}{c^2 + a^2 + 2} \right] + \\ &+ \left[\frac{(a - b)^2}{a^2 + b^2 + 2} + \frac{(b - c)^2}{b^2 + c^2 + 2} + \frac{(c - a)^2}{c^2 + a^2 + 2} \right] \geq 3. \end{aligned}$$

Một kỹ thuật nhỏ để sử dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz 75

Đến đây, chắc hẳn bạn đọc đã nhận ra một ý tưởng mới, đó là thay vì áp dụng Cauchy-Schwarz cho tổng ban đầu $\sum \frac{a^2+b^2}{a^2+b^2+2}$, ta sẽ tách nó thành hai tổng và sử dụng Cauchy-Schwarz cho từng tổng. Điều đặc biệt là ở mỗi tổng này, các hạng tử của chúng là những phân thức mà tử số của chúng là các bình phương, như vậy ta có thể thoải mái sử dụng Cauchy-Schwarz mà không cần phải thêm bớt để ra bậc cao (như cách ban đầu ở trên) hay ra căn thức (cách 2). Từ ý tưởng này, ta nghĩ đến việc sử dụng Cauchy-Schwarz như sau

$$\begin{aligned} \frac{(a+b)^2}{a^2+b^2+2} + \frac{(b+c)^2}{b^2+c^2+2} + \frac{(c+a)^2}{c^2+a^2+2} &\geq \\ &\geq \frac{[(a+b) + (b+c) + (c+a)]^2}{(a^2+b^2+2) + (b^2+c^2+2) + (c^2+a^2+2)}. \end{aligned} \quad (1)$$

Vấn đề còn lại là ta phải tìm cách đánh giá $\sum \frac{(a-b)^2}{a^2+b^2+2}$ sao cho hợp lý, bởi vì nếu sử dụng Cauchy-Schwarz sao cho vẫn đảm bảo tính hoán vị vòng quanh thì ta sẽ có

$$\begin{aligned} \frac{(a-b)^2}{a^2+b^2+2} + \frac{(b-c)^2}{b^2+c^2+2} + \frac{(c-a)^2}{c^2+a^2+2} &\geq \\ &\geq \frac{[(a-b) + (b-c) + (c-a)]^2}{(a^2+b^2+2) + (b^2+c^2+2) + (c^2+a^2+2)} = 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Một đánh giá khá lỏng lẻo, vì hiển nhiên ta đã có $\sum \frac{(a-b)^2}{a^2+b^2+2} \geq 0$ mà không cần phải đánh giá gì cả. Ta cần tìm một kiểu đánh giá khác cho kết quả chặt hơn. Các bạn hãy cùng quan sát cách đánh giá sau đây

$$\begin{aligned} \frac{(a-b)^2}{a^2+b^2+2} + \frac{(b-c)^2}{b^2+c^2+2} + \frac{(a-c)^2}{a^2+c^2+2} &\geq \\ &\geq \frac{[(a-b) + (b-c) + (a-c)]^2}{(a^2+b^2+2) + (b^2+c^2+2) + (c^2+a^2+2)} \\ &= \frac{4(a-c)^2}{2(a^2+b^2+c^2)+6}. \end{aligned} \quad (3)$$

Rõ ràng nó chặt hơn đánh giá (2) ở trên, hơn nữa ở đây đánh giá này lại cho ta mẫu thức giống với ở đánh giá (1) và như thế nếu sử dụng nó và (1), ta sẽ không phải quy đồng mẫu thức nhiều, tức là ta đã tránh được vấn đề về bậc cao, một vấn đề nan giải trong bất đẳng thức.

Bây giờ, từ (1) và (3), ta đưa được bất đẳng thức về chứng minh

$$\frac{4(a+b+c)^2 + 4(a-c)^2}{2(a^2+b^2+c^2)+6} \geq 3,$$

hay tương đương

$$2(a+b+c)^2 + 2(a-c)^2 \geq 3(a^2 + b^2 + c^2 + 3).$$

Bất đẳng thức này có thể viết lại thành

$$(a+b+c)^2 + 2(a-c)^2 \geq 3(a^2 + b^2 + c^2),$$

hay

$$(a-b)(b-c) \geq 0. \quad (4)$$

Có thể dễ dàng nhận thấy bất đẳng thức (4) không phải luôn đúng. Tuy nhiên ta vẫn có thể “ép” nó đúng. Thật vậy, bằng cách sử dụng các đánh giá tương tự (3) là

$$\begin{aligned} \frac{(a-b)^2}{a^2+b^2+2} + \frac{(c-b)^2}{b^2+c^2+2} + \frac{(a-c)^2}{a^2+c^2+2} &\geq \\ &\geq \frac{[(a-b) + (c-b) + (a-c)]^2}{(a^2+b^2+2) + (b^2+c^2+2) + (c^2+a^2+2)} \\ &= \frac{4(a-b)^2}{2(a^2+b^2+c^2)+6} \end{aligned}$$

và

$$\begin{aligned} \frac{(b-a)^2}{a^2+b^2+2} + \frac{(b-c)^2}{b^2+c^2+2} + \frac{(a-c)^2}{a^2+c^2+2} &\geq \\ &\geq \frac{[(b-a) + (b-c) + (a-c)]^2}{(a^2+b^2+2) + (b^2+c^2+2) + (c^2+a^2+2)} \\ &= \frac{4(b-c)^2}{2(a^2+b^2+c^2)+6}, \end{aligned}$$

ta cũng lần lượt đưa được bài toán về chứng minh

$$(b-c)(c-a) \geq 0, \quad (5)$$

$$(c-a)(a-b) \geq 0. \quad (6)$$

Như thế, nếu trong (4), (5), (6) có một bất đẳng thức đúng thì bài toán của ta sẽ được chứng minh xong. Ta quan sát và nhận thấy rằng

$$[(a-b)(b-c)][(b-c)(c-a)][(c-a)(a-b)] = (a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2 \geq 0,$$

do đó trong ba số $(a-b)(b-c)$, $(b-c)(c-a)$, $(c-a)(a-b)$ có *ít nhất* một số không âm, tức trong (4), (5), (6) phải có *ít nhất* một bất đẳng thức đúng. Phép chứng minh được hoàn tất. Chú ý rằng đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$. $\square$

Một kỹ thuật nhỏ để sử dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz 77

Nhận xét. Qua lời giải trên, ắt hẳn bạn đọc đã hiểu được ý nghĩa của yếu tố “ít nhất” mà chúng tôi muốn đề cập tới. Lưu ý rằng, tùy vào bài toán cụ thể mà ta có các yếu tố “ít nhất” khác nhau.

Ví dụ 2. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 = 3$. Chứng minh rằng

$$\frac{a^2 + b^2}{a + b} + \frac{b^2 + c^2}{b + c} + \frac{c^2 + a^2}{c + a} \geq 3.$$

Chứng minh. Để ý rằng $\frac{a^2 + b^2}{a + b} = \frac{a + b}{2} + \frac{(a - b)^2}{2(a + b)}$, do đó bất đẳng thức đã cho có thể viết lại thành

$$a + b + c + \frac{(a - b)^2}{2(a + b)} + \frac{(b - c)^2}{2(b + c)} + \frac{(c - a)^2}{2(c + a)} \geq 3.$$

Sử dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz, ta có

$$\begin{aligned} \frac{(a - b)^2}{2(a + b)} + \frac{(b - c)^2}{2(b + c)} + \frac{(a - c)^2}{2(a + c)} &\geq \frac{[(a - b) + (b - c) + (a - c)]^2}{2(a + b) + 2(b + c) + 2(a + c)} \\ &= \frac{(a - c)^2}{a + b + c}. \end{aligned}$$

Bài toán được quy về chứng minh

$$a + b + c + \frac{(a - c)^2}{a + b + c} \geq 3.$$

Mặt khác, theo bất đẳng thức AM-GM, ta lại có

$$\begin{aligned} a + b + c + \frac{(a - c)^2}{a + b + c} &= \frac{(a - c)^2 + (b - a)(b - c)}{a + b + c} + a + b + c + \frac{(a - b)(b - c)}{a + b + c} \\ &= \frac{3(a^2 + b^2 + c^2) - (a + b + c)^2}{2(a + b + c)} + a + b + c + \frac{(a - b)(b - c)}{a + b + c} \\ &= \frac{9}{2(a + b + c)} + \frac{a + b + c}{2} + \frac{(a - b)(b - c)}{a + b + c} \\ &\geq 3 + \frac{(a - b)(b - c)}{a + b + c}. \end{aligned}$$

Như vậy, bài toán sẽ được chứng minh xong nếu ta có

$$(a - b)(b - c) \geq 0. \quad (1)$$

Đánh giá tương tự, ta cũng có các bất đẳng thức

$$(b - c)(c - a) \geq 0, \quad (2)$$

$$(c - a)(a - b) \geq 0. \quad (3)$$

Mà theo lập luận của bài trước, ta thấy trong (1), (2), (3) có ít nhất một bất đẳng thức đúng. Do đó, bài toán được giải quyết hoàn toàn. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$. $\square$

Bài toán 1. Cho a, b, c là các số thực thỏa mãn điều kiện $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{5 - 6ab} + \frac{1}{5 - 6bc} + \frac{1}{5 - 6ca} \leq 1.$$

Chứng minh. Bất đẳng thức đã cho có thể được viết lại như sau

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{5 - 6ab}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{5 - 6bc}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{5 - 6ca}\right) &\geq \frac{1}{2}, \\ \frac{1 - 2ab}{5 - 6ab} + \frac{1 - 2bc}{5 - 6bc} + \frac{1 - 2ca}{5 - 6ca} &\geq \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Do $1 - 2ab = a^2 + b^2 + c^2 - 2ab = (a - b)^2 + c^2$ nên ta có

$$\left(\frac{a^2}{5 - 6bc} + \frac{b^2}{5 - 6ca} + \frac{c^2}{5 - 6ab}\right) + \left[\frac{(b - c)^2}{5 - 6bc} + \frac{(c - a)^2}{5 - 6ca} + \frac{(a - b)^2}{5 - 6ab}\right] \geq \frac{1}{3}.$$

Tới đây, sử dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz, ta được

$$\begin{aligned} \frac{a^2}{5 - 6bc} + \frac{b^2}{5 - 6ca} + \frac{c^2}{5 - 6ab} &\geq \frac{(a + b + c)^2}{(5 - 6bc) + (5 - 6ca) + (5 - 6ab)} \\ &= \frac{(a + b + c)^2}{15 - 6(ab + bc + ca)} \end{aligned}$$

và

$$\begin{aligned} \frac{(b - c)^2}{5 - 6bc} + \frac{(a - c)^2}{5 - 6ca} + \frac{(a - b)^2}{5 - 6ab} &\geq \frac{[(b - c) + (a - c) + (a - b)]^2}{(5 - 6bc) + (5 - 6ca) + (5 - 6ab)} \\ &= \frac{4(a - c)^2}{15 - 6(ab + bc + ca)}. \end{aligned}$$

Ta cần chứng minh

$$(a + b + c)^2 + 4(a - c)^2 \geq \frac{15 - 6(ab + bc + ca)}{3} = 5 - 2(ab + bc + ca).$$

Một kỹ thuật nhỏ để sử dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz 79

Thay $5 = 5(a^2 + b^2 + c^2)$ và rút gọn, ta được

$$4(a - b)(b - c) \geq 0. \quad (1)$$

Đánh giá tương tự, ta cũng lần lượt thu được các bất đẳng thức

$$4(b - c)(c - a) \geq 0, \quad (2)$$

$$4(c - a)(a - b) \geq 0. \quad (3)$$

Từ lập luận của bài 1 ở trên, ta thấy trong (1), (2), (3) luôn có một bất đẳng thức đúng. Từ đó dễ dàng suy ra điều phải chứng minh. Bất đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$. $\square$

Nhận xét. Từ bài toán này, ta có thể dễ dàng suy ra kết quả đẹp mắt sau trên tạp chí Crux Mathematicorum:

Nếu a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 = 1$, thì

$$\frac{1}{1 - bc} + \frac{1}{1 - ca} + \frac{1}{1 - ab} \leq \frac{9}{2}. \quad (4)$$

Thật vậy, sử dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz, ta có

$$\frac{16}{6} \cdot \frac{1}{1 - bc} = \frac{(1 + 3)^2}{1 + (5 - 6bc)} \leq \frac{1^2}{1} + \frac{3^2}{5 - 6bc}.$$

Từ đó suy ra

$$\begin{aligned} \frac{8}{3} \left(\frac{1}{1 - bc} + \frac{1}{1 - ca} + \frac{1}{1 - ab} \right) &\leq 3 + 9 \left(\frac{1}{5 - 6bc} + \frac{1}{5 - 6ca} + \frac{1}{5 - 6ab} \right) \\ &\leq 3 + 9 \cdot 1 = 12. \end{aligned}$$

Nhân mỗi vế của bất đẳng thức này cho $\frac{3}{8}$, ta thu được ngay (4).

Bài toán 2 (Mediterranean Mathematical Competition, 2009). *Chứng minh rằng với mọi a, b, c dương, ta đều có*

$$\frac{a}{2a + b} + \frac{b}{2b + c} + \frac{c}{2c + a} \geq \frac{ab}{a^2 + ab + b^2} + \frac{bc}{b^2 + bc + c^2} + \frac{ca}{c^2 + ca + a^2}.$$

Chứng minh. Để ý rằng $\frac{ab}{a^2 + ab + b^2} = \frac{1}{3} - \frac{(a - b)^2}{3(a^2 + ab + b^2)}$, do đó bất đẳng thức cần chứng minh có thể được viết lại thành

$$\begin{aligned} \frac{(a - b)^2}{a^2 + ab + b^2} + \frac{(b - c)^2}{b^2 + bc + c^2} + \frac{(c - a)^2}{c^2 + ca + a^2} + \\ + 3 \left(\frac{a}{2a + b} + \frac{b}{2b + c} + \frac{c}{2c + a} \right) \geq 3. \end{aligned}$$

Sử dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz, ta có

$$\frac{a}{2a+b} + \frac{b}{2b+c} + \frac{c}{2c+a} \geq \frac{(a+b+c)^2}{a(2a+b) + b(2b+c) + c(2c+a)}$$

và

$$\begin{aligned} \frac{(a-b)^2}{a^2+ab+b^2} + \frac{(b-c)^2}{b^2+bc+c^2} + \frac{(a-c)^2}{a^2+ac+c^2} &\geq \\ &\geq \frac{[(a-b) + (b-c) + (a-c)]^2}{(a^2+ab+b^2) + (b^2+bc+c^2) + (a^2+ac+c^2)}. \end{aligned}$$

Từ đó, bài toán được đưa về chứng minh

$$\frac{3(a+b+c)^2 + 4(a-c)^2}{2(a^2+b^2+c^2) + ab+bc+ca} \geq 3.$$

Sau khi khai triển và rút gọn, ta được

$$(a-c)^2 + 3(a-b)(b-c) \geq 0.$$

Do $(a-c)^2 \geq 0$ nên bất đẳng thức đúng nếu ta có

$$(a-b)(b-c) \geq 0. \quad (1)$$

Hoàn toàn tương tự, ta cũng có thể đưa được bài toán về xét tính đúng đắn của các bất đẳng thức

$$(c-a)(a-b) \geq 0, \quad (2)$$

$$(b-c)(c-a) \geq 0. \quad (3)$$

Nếu trong (1), (2), (3) có một bất đẳng thức đúng thì bài toán được chứng minh xong. Tuy nhiên, điều này là hiển nhiên, bởi vì

$$[(a-b)(b-c)][(b-c)(c-a)][(c-a)(a-b)] = (a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2 \geq 0.$$

Phép chứng minh được hoàn tất. Dấu bằng xảy ra khi $a = b = c$. $\square$

Bài toán 3. Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $xyz = 1$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{x+y+1} + \frac{1}{y+z+1} + \frac{1}{z+x+1} \leq 1.$$

Một kỹ thuật nhỏ để sử dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz 81

Chứng minh. Đặt $x = a^2$, $y = b^2$ và $z = c^2$ với $a, b, c > 0$, khi đó dễ thấy ta cũng có $abc = 1$. Với phép đặt này, bất đẳng thức cần chứng minh có thể viết lại như sau

$$\begin{aligned} \frac{1}{b^2 + c^2 + 1} + \frac{1}{c^2 + a^2 + 1} + \frac{1}{a^2 + b^2 + 1} &\leq 1, \\ \left(1 - \frac{1}{b^2 + c^2 + 1}\right) + \left(1 - \frac{1}{c^2 + a^2 + 1}\right) + \left(1 - \frac{1}{a^2 + b^2 + 1}\right) &\geq 2, \\ \frac{a^2 + b^2}{a^2 + b^2 + 1} + \frac{b^2 + c^2}{b^2 + c^2 + 1} + \frac{c^2 + a^2}{c^2 + a^2 + 1} &\geq 2. \end{aligned}$$

Do $a^2 + b^2 = \frac{(a+b)^2 + (a-b)^2}{2}$ nên ta có

$$\begin{aligned} &\left[\frac{(a+b)^2}{a^2 + b^2 + 1} + \frac{(b+c)^2}{b^2 + c^2 + 1} + \frac{(c+a)^2}{c^2 + a^2 + 1} \right] + \\ &+ \left[\frac{(a-b)^2}{a^2 + b^2 + 1} + \frac{(b-c)^2}{b^2 + c^2 + 1} + \frac{(c-a)^2}{c^2 + a^2 + 1} \right] \geq 4. \end{aligned}$$

Theo bất đẳng thức Cauchy-Schwarz, ta có

$$\begin{aligned} \frac{(a+b)^2}{a^2 + b^2 + 1} + \frac{(b+c)^2}{b^2 + c^2 + 1} + \frac{(c+a)^2}{c^2 + a^2 + 1} &\geq \\ &\geq \frac{[(a+b) + (b+c) + (c+a)]^2}{(a^2 + b^2 + 1) + (b^2 + c^2 + 1) + (c^2 + a^2 + 1)} \end{aligned}$$

và

$$\begin{aligned} \frac{(a-b)^2}{a^2 + b^2 + 1} + \frac{(b-c)^2}{b^2 + c^2 + 1} + \frac{(a-c)^2}{c^2 + a^2 + 1} &\geq \\ &\geq \frac{[(a-b) + (b-c) + (a-c)]^2}{(a^2 + b^2 + 1) + (b^2 + c^2 + 1) + (c^2 + a^2 + 1)}. \end{aligned}$$

Từ đó bài toán được quy về chứng minh

$$\frac{4(a+b+c)^2 + 4(a-c)^2}{2(a^2 + b^2 + c^2) + 3} \geq 4,$$

hay tương đương

$$(a+b+c)^2 + (a-c)^2 \geq 2(a^2 + b^2 + c^2) + 3.$$

Theo bất đẳng thức AM-GM,

$$3 = 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2} \leq ab + bc + ca.$$

Suy ra ta chỉ cần chứng minh

$$(a + b + c)^2 + (a - c)^2 \geq 2(a^2 + b^2 + c^2) + (ab + bc + ca).$$

Sau khi khai triển và rút gọn, ta được

$$(a - b)(b - c) \geq 0. \quad (1)$$

Ngoài ra, bằng cách đánh giá tương tự, ta cũng lần lượt thu được các bất đẳng thức sau

$$(b - c)(c - a) \geq 0, \quad (2)$$

$$(c - a)(a - b) \geq 0. \quad (3)$$

Từ lập luận trong phần chứng minh của bài 1, ta thấy trong (1), (2), (3) phải có một bất đẳng thức đúng. Từ đó dễ dàng suy ra điều phải chứng minh. Bất đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$, tức $x = y = z = 1$. $\square$

Nhận xét. Nếu đặt $x = a^3$, $y = b^3$ và $z = c^3$, thì ta có $abc = 1$ và

$$\frac{1}{x + y + 1} = \frac{1}{a^3 + b^3 + abc},$$

do vậy bất đẳng thức nêu ở đề bài còn có thể viết lại thành

$$\frac{1}{a^3 + b^3 + abc} + \frac{1}{b^3 + c^3 + abc} + \frac{1}{c^3 + a^3 + abc} \leq \frac{1}{abc}.$$

Đây chính là bài toán USAMO 1997.

Có thể thấy ở các ví dụ trên ta cố gắng phân tách các tử số thành tổng của hai bình phương, trong đó một bình phương có dạng $(a - b)^2$ (hoặc $(b - c)^2$, $(c - a)^2$) (bạn đọc hãy thử ngẫm nghĩ vì sao lại là các dạng này mà không là các dạng khác?).

Tuy nhiên, không phải lúc nào cũng như vậy, mà đôi lúc ta còn phân tích theo nhiều kiểu khác nữa. Sau đây là một vài ví dụ.

Bài toán 4. Cho a, b, c là các số thực thỏa mãn điều kiện $a + b + c = 3$. Chứng minh rằng

$$\frac{a}{7a^2 + 11} + \frac{b}{7b^2 + 11} + \frac{c}{7c^2 + 11} \leq \frac{1}{6}.$$

Một kỹ thuật nhỏ để sử dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz 83

Chứng minh. Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\left(1 - \frac{14a}{7a^2 + 11}\right) + \left(1 - \frac{14b}{7b^2 + 11}\right) + \left(1 - \frac{14c}{7c^2 + 11}\right) \geq \frac{2}{3},$$

hay

$$4 \left(\frac{1}{7a^2 + 11} + \frac{1}{7b^2 + 11} + \frac{1}{7c^2 + 11} \right) + 7 \left[\frac{(a-1)^2}{7a^2 + 11} + \frac{(b-1)^2}{7b^2 + 11} + \frac{(c-1)^2}{7c^2 + 11} \right] \geq \frac{2}{3}.$$

Tới đây, sử dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz, ta có

$$\begin{aligned} \frac{1}{7a^2 + 11} + \frac{1}{7b^2 + 11} + \frac{1}{7c^2 + 11} &\geq \frac{(1+1+1)^2}{(7a^2 + 11) + (7b^2 + 11) + (7c^2 + 11)} \\ &= \frac{3(a+b+c)^2}{21(a^2 + b^2 + c^2) + 11(a+b+c)^2} \end{aligned}$$

và

$$\begin{aligned} \frac{(a-1)^2}{7a^2 + 11} + \frac{(1-b)^2}{7b^2 + 11} + \frac{(1-c)^2}{7c^2 + 11} &\geq \frac{[(a-1) + (1-b) + (1-c)]^2}{(7a^2 + 11) + (7b^2 + 11) + (7c^2 + 11)} \\ &= \frac{4(2a-b-c)^2}{3[21(a^2 + b^2 + c^2) + 11(a+b+c)^2]}. \end{aligned}$$

Từ đó bài toán được quy về chứng minh

$$18(a+b+c)^2 + 14(2a-b-c)^2 \geq 21(a^2 + b^2 + c^2) + 11(a+b+c)^2,$$

hay tương đương

$$42(a-b)(a-c) \geq 0. \quad (1)$$

Rõ ràng (1) không phải luôn đúng, nhưng từ nó ta vẫn có thể đi đến được điều phải chứng minh. Bằng cách sử dụng các đánh giá tương tự

$$\begin{aligned} \frac{(1-a)^2}{7a^2 + 11} + \frac{(b-1)^2}{7b^2 + 11} + \frac{(1-c)^2}{7c^2 + 11} &\geq \frac{[(1-a) + (b-1) + (1-c)]^2}{(7a^2 + 11) + (7b^2 + 11) + (7c^2 + 11)}, \\ \frac{(1-a)^2}{7a^2 + 11} + \frac{(1-b)^2}{7b^2 + 11} + \frac{(c-1)^2}{7c^2 + 11} &\geq \frac{[(1-a) + (1-b) + (c-1)]^2}{(7a^2 + 11) + (7b^2 + 11) + (7c^2 + 11)}, \end{aligned}$$

ta cũng lần lượt đưa được bài toán về xét tính đúng sai của

$$42(b-c)(b-a) \geq 0, \quad (2)$$

$$42(c-a)(c-b) \geq 0. \quad (3)$$

Ta có

$$(a-b)(a-c) + (b-c)(b-a) + (c-a)(c-b) = a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca \geq 0,$$

do đó trong (1), (2), (3) phải có ít nhất một bất đẳng thức đúng.

Từ đó dễ dàng suy ra điều phải chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$. $\square$

Bài toán 5 (Chinese Northern MO, 2006). Cho các số thực a, b, c thỏa mãn $a + b + c = 3$. Chứng minh rằng

$$\frac{a^2 + 9}{2a^2 + (b+c)^2} + \frac{b^2 + 9}{2b^2 + (c+a)^2} + \frac{c^2 + 9}{2c^2 + (a+b)^2} \leq 5.$$

Chứng minh. Bất đẳng thức cần chứng minh có thể được viết lại thành

$$\left[2 - \frac{a^2 + 9}{2a^2 + (3-a)^2}\right] + \left[2 - \frac{b^2 + 9}{2b^2 + (3-b)^2}\right] + \left[2 - \frac{c^2 + 9}{2c^2 + (3-c)^2}\right] \geq 1,$$

tương đương

$$\frac{5a^2 - 12a + 9}{2a^2 + (b+c)^2} + \frac{5b^2 - 12b + 9}{2b^2 + (c+a)^2} + \frac{5c^2 - 12c + 9}{2c^2 + (a+b)^2} \geq 1.$$

Do $5a^2 - 12a + 9 = \frac{9(a-1)^2 + (3-a)^2}{2} = \frac{9(a-1)^2 + (b+c)^2}{2}$ nên ta có

$$\begin{aligned} & 9 \left[\frac{(a-1)^2}{2a^2 + (b+c)^2} + \frac{(b-1)^2}{2b^2 + (c+a)^2} + \frac{(c-1)^2}{2c^2 + (a+b)^2} \right] + \\ & + \left[\frac{(b+c)^2}{2a^2 + (b+c)^2} + \frac{(c+a)^2}{2b^2 + (c+a)^2} + \frac{(a+b)^2}{2c^2 + (a+b)^2} \right] \geq 2. \end{aligned}$$

Sử dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz, ta được

$$\begin{aligned} & \frac{(a-1)^2}{2a^2 + (b+c)^2} + \frac{(1-b)^2}{2b^2 + (c+a)^2} + \frac{(1-c)^2}{2c^2 + (a+b)^2} \geq \\ & \geq \frac{[(a-1) + (1-b) + (1-c)]^2}{[2a^2 + (b+c)^2] + [2b^2 + (c+a)^2] + [2c^2 + (a+b)^2]} \\ & = \frac{2(2a-b-c)^2}{9[2(a^2 + b^2 + c^2) + ab + bc + ca]} \end{aligned}$$

Một kỹ thuật nhỏ để sử dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz 85

và

$$\begin{aligned} \frac{(b+c)^2}{2a^2+(b+c)^2} + \frac{(c+a)^2}{2b^2+(c+a)^2} + \frac{(a+b)^2}{2c^2+(a+b)^2} &\geq \\ &\geq \frac{[(b+c)+(c+a)+(a+b)]^2}{[2a^2+(b+c)^2] + [2b^2+(c+a)^2] + [2c^2+(a+b)^2]} \\ &= \frac{2(a+b+c)^2}{2(a^2+b^2+c^2) + ab + bc + ca}. \end{aligned}$$

Do đó ta chỉ cần chứng minh

$$(2a-b-c)^2 + (a+b+c)^2 \geq 2(a^2+b^2+c^2) + ab + bc + ca.$$

Sau khi khai triển và rút gọn, ta được

$$3(a-b)(a-c) \geq 0. \quad (1)$$

Ngoài ra, bằng cách đánh giá tương tự, ta cũng có

$$3(b-c)(b-a) \geq 0, \quad (2)$$

$$3(c-a)(c-b) \geq 0. \quad (3)$$

Vì $(a-b)(a-c) + (b-c)(b-a) + (c-a)(c-b) = a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca$ là một số không âm nên ta suy ra có một bất đẳng thức đúng trong (1), (2), (3). Từ đó dễ dàng suy ra kết quả bài toán. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$. $\square$

Nhận xét. Ngoài cách trên, ta còn có thể chứng minh bất đẳng thức

$$\frac{5a^2 - 12a + 9}{2a^2 + (b+c)^2} + \frac{5b^2 - 12b + 9}{2b^2 + (c+a)^2} + \frac{5c^2 - 12c + 9}{2c^2 + (a+b)^2} \geq 1$$

theo cách khác (cũng bằng cách sử dụng Cauchy-Schwarz) như sau:

Sử dụng Cauchy-Schwarz với chú ý rằng $5a^2 - 12a + 9 > 0$, ta có

$$\frac{5a^2 - 12a + 9}{2a^2 + (b+c)^2} \geq \frac{5a^2 - 12a + 9}{2a^2 + 2(b^2 + c^2)} = \frac{5a^2 - 12a + 9}{2(a^2 + b^2 + c^2)}.$$

Từ bất đẳng thức này và hai bất đẳng thức tương tự, ta đưa được bài toán về chứng minh

$$(5a^2 - 12a + 9) + (5b^2 - 12b + 9) + (5c^2 - 12c + 9) \geq 2(a^2 + b^2 + c^2),$$

hay tương đương

$$3(a^2 + b^2 + c^2) \geq 9,$$

Bất đẳng thức này đúng do theo bất đẳng thức Cauchy-Schwarz, ta có

$$3(a^2 + b^2 + c^2) \geq (a + b + c)^2 = 9.$$

Bài toán 6. Cho a, b, c là các số thực thỏa mãn điều kiện $a + b + c = 3$.
Chứng minh rằng

$$\frac{18a - 35}{a^2 - 4a + 6} + \frac{18b - 35}{b^2 - 4b + 6} + \frac{18c - 35}{c^2 - 4c + 6} \geq -17.$$

Chứng minh. Bất đẳng thức đã cho có thể được viết lại thành

$$\left(7 + \frac{18a - 35}{a^2 - 4a + 6}\right) + \left(7 + \frac{18b - 35}{b^2 - 4b + 6}\right) + \left(7 + \frac{18c - 35}{c^2 - 4c + 6}\right) \geq 4,$$

$$\frac{7a^2 - 10a + 7}{a^2 - 4a + 6} + \frac{7b^2 - 10b + 7}{b^2 - 4b + 6} + \frac{7c^2 - 10c + 7}{c^2 - 4c + 6} \geq 4.$$

Do $7a^2 - 10a + 7 = (a + 1)^2 + 6(a - 1)^2$ nên ta có

$$\left[\frac{(a + 1)^2}{a^2 - 4a + 6} + \frac{(b + 1)^2}{b^2 - 4b + 6} + \frac{(c + 1)^2}{c^2 - 4c + 6} \right] +$$

$$+ 6 \left[\frac{(a - 1)^2}{a^2 - 4a + 6} + \frac{(b - 1)^2}{b^2 - 4b + 6} + \frac{(c - 1)^2}{c^2 - 4c + 6} \right] \geq 4.$$

Sử dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz, ta được

$$\frac{(a + 1)^2}{a^2 - 4a + 6} + \frac{(b + 1)^2}{b^2 - 4b + 6} + \frac{(c + 1)^2}{c^2 - 4c + 6} \geq$$

$$\geq \frac{[(a + 1) + (b + 1) + (c + 1)]^2}{(a^2 - 4a + 6) + (b^2 - 4b + 6) + (c^2 - 4c + 6)}$$

$$= \frac{4(a + b + c)^2}{a^2 + b^2 + c^2 + 6} = \frac{12(a + b + c)^2}{3(a^2 + b^2 + c^2) + 2(a + b + c)^2}$$

và

$$\frac{(a - 1)^2}{a^2 - 4a + 6} + \frac{(1 - b)^2}{b^2 - 4b + 6} + \frac{(1 - c)^2}{c^2 - 4c + 6} \geq$$

$$\geq \frac{[(a - 1) + (1 - b) + (1 - c)]^2}{(a^2 - 4a + 6) + (b^2 - 4b + 6) + (c^2 - 4c + 6)}$$

$$= \frac{4(2a - b - c)^2}{9(a^2 + b^2 + c^2 + 6)} = \frac{4(2a - b - c)^2}{3[3(a^2 + b^2 + c^2) + 2(a + b + c)^2]}.$$

Một kỹ thuật nhỏ để sử dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz 87

Bài toán được quy về chứng minh

$$3(a+b+c)^2 + 2(2a-b-c)^2 \geq 3(a^2+b^2+c^2) + 2(a+b+c)^2,$$

hay tương đương với

$$6(a-b)(a-c) \geq 0. \quad (1)$$

Đánh giá tương tự, ta cũng có các bất đẳng thức

$$6(b-c)(b-a) \geq 0, \quad (2)$$

$$6(c-a)(c-b) \geq 0. \quad (3)$$

Đến đây, ta lại thấy

$$(a-b)(a-c) + (b-c)(b-a) + (c-a)(c-b) = a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca \geq 0,$$

nên trong (1), (2), (3) phải có một bất đẳng thức đúng.

Từ đó dễ dàng suy ra điều phải chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$. $\square$

Quan sát lời giải của các bài toán trên, ta thấy có một điểm chung là ở đoạn cuối của phép chứng minh, ta luôn có các bất đẳng thức dạng

$$(a-b)(b-c) \geq 0 \quad (i)$$

hoặc

$$(a-b)(a-c) \geq 0. \quad (ii)$$

Và chắc hẳn bạn đọc cũng thắc mắc là tại sao chúng tôi lại phải đánh giá thông qua tích hoặc tổng (cụ thể là

$$\prod [(a-b)(b-c)] = (a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2 \geq 0, \quad (iii)$$

$$\sum (a-b)(a-c) = a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca \geq 0)? \quad (iv)$$

Bởi lẽ thật ra chúng ta hoàn toàn có thể đánh giá đơn giản hơn, chẳng hạn nếu ta sử dụng tính đối xứng (hoặc hoán vị) của bài toán mà giả sử b nằm giữa a và c thì (i) sẽ đúng, và nếu ta giả sử $a = \max\{a, b, c\}$ (hoặc $a = \min\{a, b, c\}$) thì (ii) sẽ đúng.

Các đánh giá thông qua (iii), (iv) không quá phức tạp nhưng lại khiến cho chứng minh của ta trở nên dài và cồng kềnh hơn. Vậy mục đích của việc sử dụng (iii), (iv) ở đây là gì?

Thật ra, điều mà chúng tôi muốn nhấn mạnh ở đây chính là ở chỗ: *khi mà sự sắp thứ tự các biến không còn tác dụng nữa thì yếu tố “ít nhất” vẫn có thể sử dụng được khá hiệu quả khi phối hợp với bất đẳng thức Cauchy-Schwarz.*

Ta cùng xét ví dụ sau.

Bài toán 7. Cho a, b, c là các số thực thỏa mãn điều kiện $a + b + c = 1$. Chứng minh rằng

$$\frac{a^2}{6a^2 - 4a + 1} + \frac{b^2}{6b^2 - 4b + 1} + \frac{c^2}{6c^2 - 4c + 1} \leq 1.$$

Phân tích và tìm tòi lời giải. Cũng tương tự các bài toán khác, ta tìm cách chuyển bất đẳng thức về dạng của bất đẳng thức Cauchy-Schwarz dạng phân thức. Ta nhận thấy $\frac{a^2}{6a^2 - 4a + 1} \leq \frac{1}{2}$ và

$$\frac{1}{2} - \frac{a^2}{6a^2 - 4a + 1} = \frac{(2a - 1)^2}{2(6a^2 - 4a + 1)}.$$

Do đó ta viết được bất đẳng thức lại thành

$$\frac{(2a - 1)^2}{6a^2 - 4a + 1} + \frac{(2b - 1)^2}{6b^2 - 4b + 1} + \frac{(2c - 1)^2}{6c^2 - 4c + 1} \geq 1.$$

Tuy nhiên, nếu lúc này áp dụng Cauchy-Schwarz kiểu như thường dùng

$$\begin{aligned} \frac{(2a - 1)^2}{6a^2 - 4a + 1} + \frac{(2b - 1)^2}{6b^2 - 4b + 1} + \frac{(2c - 1)^2}{6c^2 - 4c + 1} &\geq \\ &\geq \frac{[(2a - 1) + (2b - 1) + (2c - 1)]^2}{(6a^2 - 4a + 1) + (6b^2 - 4b + 1) + (6c^2 - 4c + 1)}, \end{aligned}$$

thì bất đẳng thức thu được sau đó sẽ không đúng. Lí do thật đơn giản. Các bạn hãy quan sát bất đẳng thức đã cho ở đề bài, ngoài trường hợp đẳng thức thông thường là $a = b = c = \frac{1}{3}$ ra, thì nó còn xảy ra dấu bằng khi $a = b = \frac{1}{2}, c = 0$ (và các hoán vị).

Trong khi đó, đánh giá ở trên có dấu bằng khi

$$\frac{2a - 1}{6a^2 - 4a + 1} = \frac{2b - 1}{6b^2 - 4b + 1} = \frac{2c - 1}{6c^2 - 4c + 1},$$

và hẳn nhiên bộ số $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)$ không thỏa mãn hệ phương trình này. Như vậy, ta cần thay đổi cách sử dụng Cauchy-Schwarz sao cho hiệu quả hơn. Bây giờ, ta giả định ngoài trường hợp đẳng thức $a = b = c = \frac{1}{3}$ thì bất đẳng thức sẽ chỉ xảy ra dấu bằng tại một bộ nữa là $a = b = \frac{1}{2}, c = 0$ (tức ta không xét đến các hoán vị của bộ này). Khi đó, có thể dễ dàng

Một kỹ thuật nhỏ để sử dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz 89

nhận thấy được cách sử dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz sau đây sẽ đảm bảo được điều kiện đẳng thức

$$\begin{aligned}\frac{(2a-1)^2}{6a^2-4a+1} + \frac{(2b-1)^2}{6b^2-4b+1} &\geq \frac{[(2a-1) + (2b-1)]^2}{(6a^2-4a+1) + (6b^2-4b+1)} \\ &= \frac{4c^2}{(6a^2-4a+1) + (6b^2-4b+1)}.\end{aligned}$$

Và từ đánh giá này, ta sẽ phải chứng minh

$$\frac{4c^2}{(6a^2-4a+1) + (6b^2-4b+1)} + \frac{(2c-1)^2}{6c^2-4c+1} \geq 1.$$

Bất đẳng thức này tương đương với

$$\frac{4c^2}{(6a^2-4a+1) + (6b^2-4b+1)} \geq 1 - \frac{(2c-1)^2}{6c^2-4c+1} = \frac{2c^2}{6c^2-4c+1},$$

và do $2c^2 \geq 0$ nên ta chỉ cần chứng minh

$$2(6c^2-4c+1) \geq (6a^2-4a+1) + (6b^2-4b+1). \quad (1)$$

Nếu bất đẳng thức (1) đúng thì bài toán sẽ được chứng minh xong. Tuy nhiên trên thực tế, (1) không phải lúc nào cũng đúng, ngay cả khi ta sắp thứ tự các biến $a \geq b \geq c$ (dựa trên điều kiện đẳng thức $a = b = \frac{1}{2}$, $c = 0$), thì (1) cũng chưa chắc được thỏa mãn (bạn đọc có thể thử kiểm tra). Có vẻ như ta đang ở đường cùng?

Thật ra không phải vậy đâu các bạn ạ. Tư tưởng *yếu tố “ít nhất”* vẫn có thể sử dụng khá hiệu quả cho bài này. Thật vậy, bằng đánh giá tương tự như trên, ta cũng lần lượt có các bất đẳng thức

$$2(6a^2-4a+1) \geq (6b^2-4b+1) + (6c^2-4c+1), \quad (2)$$

$$2(6b^2-4b+1) \geq (6c^2-4c+1) + (6a^2-4a+1). \quad (3)$$

Và nếu (1) hoặc (2) hoặc (3) được thỏa mãn thì cũng đồng nghĩa với việc bài toán được chứng minh xong. Bây giờ ta lại thấy

$$\sum [2(6a^2-4a+1) - (6b^2-4b+1) - (6c^2-4c+1)] = 0.$$

Do đó trong (1), (2), (3) phải có một bất đẳng thức đúng. Điều này cho phép ta kết thúc phép chứng minh ở đây. $\square$

Đây là một ví dụ rất điển hình để minh họa cho tính nổi bật của *yếu tố “ít nhất”* so với việc sắp thứ tự các biến. Sau đây là một bài toán khác với cách giải tương tự.

Bài toán 8. Cho a, b, c là các số thực thỏa mãn điều kiện $a + b + c = 1$. Chứng minh rằng

$$\frac{a^2}{3a^2 - 2a + 3} + \frac{b^2}{3b^2 - 2b + 3} + \frac{c^2}{3c^2 - 2c + 3} \geq \frac{1}{8}.$$

Chứng minh. Để ý rằng

$$\sum [2(3a^2 - 2a + 3) - (3b^2 - 2b + 3) - (3c^2 - 2c + 3)] = 0,$$

do đó trong các số

$$2(3a^2 - 2a + 3) - (3b^2 - 2b + 3) - (3c^2 - 2c + 3),$$

$$2(3b^2 - 2b + 3) - (3c^2 - 2c + 3) - (3a^2 - 2a + 3),$$

$$2(3c^2 - 2c + 3) - (3a^2 - 2a + 3) - (3b^2 - 2b + 3),$$

phải có một số không âm. Không mất tính tổng quát, giả sử

$$2(3a^2 - 2a + 3) \geq (3b^2 - 2b + 3) + (3c^2 - 2c + 3).$$

Khi đó, sử dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz, ta có

$$\begin{aligned} \frac{b^2}{3b^2 - 2b + 3} + \frac{c^2}{3c^2 - 2c + 3} &\geq \frac{(b + c)^2}{(3b^2 - 2b + 3) + (3c^2 - 2c + 3)} \\ &\geq \frac{(b + c)^2}{2(3a^2 - 2a + 3)} = \frac{(1 - a)^2}{2(3a^2 - 2a + 3)}. \end{aligned}$$

Ta cần chứng minh

$$\frac{a^2}{3a^2 - 2a + 3} + \frac{(1 - a)^2}{2(3a^2 - 2a + 3)} \geq \frac{1}{8}.$$

Bất đẳng thức này tương đương với

$$8a^2 + 4(1 - a)^2 \geq 3a^2 - 2a + 3,$$

$$\text{đúng vì } 8a^2 + 4(1 - a)^2 - (3a^2 - 2a + 3) = (3a - 1)^2 \geq 0.$$

Bài toán được chứng minh xong. Dấu bằng xảy ra khi $a = b = c = \frac{1}{3}$. $\square$

Một kỹ thuật nhỏ để sử dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz 91

Nhận xét. Một điểm cần lưu ý là để có thể sử dụng thành công được yếu tố “ít nhất” (theo cách giống như hai bài trên) ở các bài toán có cùng dạng như hai bài toán trên thì các mẫu số ở các phân thức phải thỏa mãn một số điều kiện nhất định:

Xét hiệu $A = 2(6a^2 - 4a + 1) - (6b^2 - 4b + 1) - (6c^2 - 4c + 1)$ ở bài 7. Khi $b = c$ thì ta có $a + 2b = 1$, và lúc này

$$\begin{aligned} A &= 2(6a^2 - 4a + 1) - 2(6b^2 - 4b + 1) = 4(a - b)[3(a + b) - 2] \\ &= 4(a - b)[3(a + b) - 2(a + 2b)] = 4(a - b)^2. \end{aligned}$$

Tương tự, xét hiệu

$$B = 2(3a^2 - 2a + 3) - (3b^2 - 2b + 3) - (3c^2 - 2c + 3)$$

ở bài 8. Khi $b = c$ thì ta có $a + 2b = 1$ và

$$\begin{aligned} B &= 2(3a^2 - 2a + 3) - 2(3b^2 - 2b + 3) = 2(a - b)[3(a + b) - 2] \\ &= 2(a - b)[3(a + b) - 2(a + 2b)] = 2(a - b)^2. \end{aligned}$$

Như vậy, điều kiện ở đây là *nếu có hai biến bằng nhau thì A, B phải phân tích ra được các bình phương*.

Tuy nhiên, trên thực tế không phải bài toán nào cũng có những tính chất đặc biệt như thế. Do đó, ta cần có cách làm khác hiệu quả hơn. Phần dưới đây chúng tôi sẽ giới thiệu một kỹ thuật khác cũng khá hiệu quả để giải các bài toán dạng này.

Như ta đã biết, phần lớn những bất đẳng thức có ít biến thì sẽ dễ chứng minh hơn các bất đẳng thức có nhiều biến. Chính vì vậy, một trong những ý tưởng thường được sử dụng trong chứng minh bất đẳng thức, đó là đưa các bất đẳng thức với nhiều biến số trở về dạng có ít biến số hơn.

Có nhiều công cụ hỗ trợ ta thực hiện điều này như phương pháp dồn biến, EV, ... Dưới đây chúng ta sẽ cùng xem xét ứng dụng của yếu tố “ít nhất” và bất đẳng thức Cauchy-Schwarz trong việc làm giảm số biến của bất đẳng thức. Cụ thể hơn, ta sẽ đưa một bất đẳng thức từ ba biến về dạng một biến để chứng minh.

Ý tưởng của kỹ thuật như sau: Với bốn số thực bất kỳ a, b, c, k , ta có

$$[(a-k)(b-k)][(b-k)(c-k)][(c-k)(a-k)] = (a-k)^2(b-k)^2(c-k)^2 \geq 0.$$

Do đó trong ba số $(a-k)(b-k)$, $(b-k)(c-k)$, $(c-k)(a-k)$ phải có ít nhất một số không âm. Ta giả sử số đó là $(a-k)(b-k)$, thế thì

$$a^2 + b^2 = k^2 + (a + b - k)^2 - 2(a-k)(b-k) \leq k^2 + (a + b - k)^2.$$

Như vậy, để chứng minh một bất đẳng thức có giả thiết $a + b + c = s$ và đẳng thức xảy ra khi có hai biến bằng một giá trị m nào đó thì ta có thể áp dụng đánh giá trên để làm giảm số biến của bất đẳng thức ban đầu. Cụ thể là ta sẽ chọn $k = m$ (để đảm bảo dấu bằng) và như thế ta sẽ có

$$a^2 + b^2 \leq m^2 + (a + b - m) = m^2 + (s - c - m)^2,$$

có nghĩa là nếu sử dụng đánh giá này vào bài toán thì ta sẽ chỉ còn phải chứng minh một bất đẳng thức của một biến là c .

Để nắm rõ hơn, ta cùng xét ví dụ sau.

Bài toán 9 (Polish MO, 1996). Cho các số thực a, b, c thỏa mãn điều kiện $a + b + c = 1$. Chứng minh rằng

$$\frac{a}{a^2 + 1} + \frac{b}{b^2 + 1} + \frac{c}{c^2 + 1} \leq \frac{9}{10}.$$

Phân tích và tìm tòi lời giải. Nhận xét rằng đẳng thức xảy ra tại một bộ điểm duy nhất là $a = b = c = \frac{1}{3}$. Do đó, bằng cách gọi a, b là hai số sao cho $(a - \frac{1}{3})(b - \frac{1}{3}) \geq 0$ và tiến hành đánh giá như trên, ta có

$$a^2 + b^2 \leq \frac{1}{9} + \left(a + b - \frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9} + \left(\frac{2}{3} - c\right)^2. \quad (1)$$

Nếu muốn áp dụng Cauchy-Schwarz để có đại lượng $a^2 + b^2$ xuất hiện (để có thể sử dụng (1)), ta cần chuyển về hai phân thức $\frac{a}{a^2+1}, \frac{b}{b^2+1}$ và thêm bớt để có bình phương xuất hiện. Ta biến đổi như sau

$$\begin{aligned} \frac{c}{c^2 + 1} &\leq \left(\frac{1}{2} - \frac{a}{a^2 + 1}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{b}{b^2 + 1}\right) - \frac{1}{10}, \\ \frac{(a-1)^2}{a^2 + 1} + \frac{(b-1)^2}{b^2 + 1} &\geq \frac{1}{5} + \frac{2c}{c^2 + 1}. \end{aligned}$$

Bây giờ, ta đã có thể sử dụng Cauchy-Schwarz và đánh giá (1) ở trên:

$$\begin{aligned} \frac{(a-1)^2}{a^2 + 1} + \frac{(b-1)^2}{b^2 + 1} &\geq \frac{[(a-1) + (b-1)]^2}{(a^2 + 1) + (b^2 + 1)} = \frac{(c+1)^2}{(a^2 + b^2) + 2} \\ &\geq \frac{(c+1)^2}{\frac{1}{3} + (\frac{2}{3} - c)^2 + 2} = \frac{9(c+1)^2}{23 - 12c + 9c^2}. \end{aligned}$$

Như vậy ta chỉ còn phải chứng minh một bất đẳng thức một biến là

$$\frac{9(c+1)^2}{23 - 12c + 9c^2} \geq \frac{1 + 10c + c^2}{5(1 + c^2)}. \quad (2)$$

Một kỹ thuật nhỏ để sử dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz 93

Công việc này thật đơn giản. Bằng cách quy đồng và phân tích nhân tử chung (lưu ý rằng ta luôn phân tích được $(3c - 1)^2$ làm nhân tử chung), ta viết được (2) dưới dạng

$$(3c - 1)^2(2c^2 + 2c + 11) \geq 0,$$

và vì $2c^2 + 2c + 11 > 0$ nên bất đẳng thức trên luôn đúng. Đến đây thì phép chứng minh đã được hoàn tất. $\square$

Bài toán 10 (Japanese MO, 1997). *Chứng minh rằng với các số thực dương a, b, c tùy ý, ta đều có*

$$\frac{(b+c-a)^2}{a^2+(b+c)^2} + \frac{(c+a-b)^2}{b^2+(c+a)^2} + \frac{(a+b-c)^2}{c^2+(a+b)^2} \geq \frac{3}{5}.$$

Chứng minh. Do bất đẳng thức đã cho là thuần nhất với ba biến a, b, c nên ta hoàn toàn có thể chuẩn hóa cho $a + b + c = 1$. Khi đó, ta viết được nó lại dưới dạng

$$\frac{(1-2a)^2}{2a^2-2a+1} + \frac{(1-2b)^2}{2b^2-2b+1} + \frac{(1-2c)^2}{2c^2-2c+1} \geq \frac{3}{5}.$$

Không mất tính tổng quát, giả sử $(a - \frac{1}{3})(b - \frac{1}{3}) \geq 0$. Ta có

$$a^2 + b^2 \leq \frac{1}{9} + \left(a + b - \frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9} + \left(\frac{2}{3} - c\right)^2.$$

Từ đây sử dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz, ta được

$$\begin{aligned} \frac{(1-2a)^2}{2a^2-2a+1} + \frac{(1-2b)^2}{2b^2-2b+1} &\geq \frac{[(1-2a) + (1-2b)]^2}{(2a^2-2a+1) + (2b^2-2b+1)} \\ &= \frac{2c^2}{a^2 + b^2 + c} \geq \frac{2c^2}{\frac{1}{9} + \left(\frac{2}{3} - c\right)^2 + c} \\ &= \frac{18c^2}{9c^2 - 3c + 5}. \end{aligned}$$

Ta cần chứng minh

$$\frac{(1-2c)^2}{2c^2-2c+1} + \frac{18c^2}{9c^2-3c+5} \geq \frac{3}{5}.$$

Sau khi khai triển và rút gọn, ta được bất đẳng thức hiển nhiên đúng

$$(3c - 1)^2(17c^2 - 8c + 5) \geq 0,$$

Bất đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$. $\square$

Nhận xét. Ngoài cách giải trên, bài này còn có thể giải bằng cách khác (cũng dựa trên *yếu tố “ít nhất”*) như sau: Để ý rằng

$$\frac{(b+c-a)^2}{a^2+(b+c)^2} = -\frac{1}{3} + \frac{7(2a-b-c)^2 + (5b+5c-2a)^2}{24[a^2+(b+c)^2]}.$$

Do đó bất đẳng thức đã cho có thể viết lại thành

$$7 \left[\frac{(2a-b-c)^2}{a^2+(b+c)^2} + \frac{(2b-c-a)^2}{b^2+(c+a)^2} + \frac{(2c-a-b)^2}{c^2+(a+b)^2} \right] + \\ + \left[\frac{(5b+5c-2a)^2}{a^2+(b+c)^2} + \frac{(5c+5a-2b)^2}{b^2+(c+a)^2} + \frac{(5a+5b-2c)^2}{c^2+(a+b)^2} \right] \geq \frac{192}{5}.$$

Sử dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz, ta có

$$\frac{(2a-b-c)^2}{a^2+(b+c)^2} + \frac{(2b-c-a)^2}{b^2+(c+a)^2} + \frac{(2c-a-b)^2}{c^2+(a+b)^2} \geq \\ \geq \frac{[(2a-b-c) + (a+c-2b) + (a+b-2c)]^2}{[a^2+(b+c)^2] + [b^2+(c+a)^2] + [c^2+(a+b)^2]}$$

và

$$\frac{(5b+5c-2a)^2}{a^2+(b+c)^2} + \frac{(5c+5a-2b)^2}{b^2+(c+a)^2} + \frac{(5a+5b-2c)^2}{c^2+(a+b)^2} \geq \\ \geq \frac{[(5b+5c-2a) + (5c+5a-2b) + (5a+5b-2c)]^2}{[a^2+(b+c)^2] + [b^2+(c+a)^2] + [c^2+(a+b)^2]}.$$

Từ hai đánh giá này, ta đưa được bài toán về chứng minh

$$35(2a-b-c)^2 + 80(a+b+c)^2 \geq 48[3(a^2+b^2+c^2) + 2(ab+bc+ca)],$$

hay

$$76a^2 - 29b^2 - 29c^2 - 76ab - 76ac + 134bc \geq 0. \quad (1)$$

Thực hiện đánh giá tương tự, ta cũng lần lượt có

$$76b^2 - 29c^2 - 29a^2 - 76bc - 76ba + 134ca \geq 0, \quad (2)$$

$$76c^2 - 29a^2 - 29b^2 - 76ca - 76cb + 134ab \geq 0. \quad (3)$$

Bây giờ, ta có chú ý rằng

$$\sum (76a^2 - 29b^2 - 29c^2 - 76ab - 76ac + 134bc) = 18 \left(\sum a^2 - \sum ab \right)$$

Một kỹ thuật nhỏ để sử dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz 95

là một số không âm. Do đó, trong (1), (2), (3) phải có ít nhất một bất đẳng thức đúng. Từ đó dễ dàng suy ra điều phải chứng minh.

Chúng ta sẽ kết lại bài viết này bằng một ứng dụng thú vị khác của kỹ thuật sử dụng *yếu tố “ít nhất”*.

Bài toán 11. Cho a, b, c, d là các số thực thỏa mãn $a + b + c + d = 0$. Chứng minh rằng

$$7(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)^2 \geq 12(a^4 + b^4 + c^4 + d^4). \quad (1)$$

Phân tích và tìm tòi lời giải. Ở bài này, nếu thay $d = -(a + b + c)$ thì ta sẽ được một bất đẳng thức ba biến theo a, b, c , và khi đó các biểu thức $a^2 + b^2 + c^2 + d^2$ và d^4 sẽ được biểu diễn theo hai đại lượng $a^2 + b^2 + c^2$ và $ab + bc + ca$. Do vậy, có thể thấy một ý tưởng tự nhiên để giải bài toán này chính là tìm cách để đánh giá chặn trên của $a^4 + b^4 + c^4$ theo $a^2 + b^2 + c^2$ và $ab + bc + ca$. Ta có để ý rằng

$$a^4 + b^4 + c^4 = (a^2 + b^2 + c^2)^2 - 2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2).$$

Do đó, rất tự nhiên ta nghĩ đến việc sử dụng đánh giá quen thuộc

$$a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 \geq \frac{(ab + bc + ca)^2}{3},$$

vì nó sẽ giúp ta tìm được một chặn trên cho $a^4 + b^4 + c^4$ theo $a^2 + b^2 + c^2$ và $ab + bc + ca$. Cụ thể là

$$a^4 + b^4 + c^4 \leq (a^2 + b^2 + c^2)^2 - \frac{2}{3}(ab + bc + ca)^2.$$

Như vậy ta sẽ còn phải chứng minh

$$7(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)^2 \geq 12 \left[(a^2 + b^2 + c^2)^2 - \frac{2}{3}(ab + bc + ca)^2 + d^4 \right].$$

Thay $d^2 = (a + b + c)^2 = (a^2 + b^2 + c^2) + 2(ab + bc + ca)$ vào, ta viết được bất đẳng thức trên lại thành

$$7(2x + 2y)^2 \geq 12 \left[x^2 - \frac{2}{3}y^2 + (x + 2y)^2 \right],$$

trong đó $x = a^2 + b^2 + c^2$ và $y = ab + bc + ca$.

Và sau khi khai triển và rút gọn, ta được

$$4(x - y)(x + 3y) \geq 0.$$

Do $x - y = (a^2 + b^2 + c^2) - (ab + bc + ca) \geq 0$ nên ta chỉ cần chứng minh

$$a^2 + b^2 + c^2 + 3(ab + bc + ca) \geq 0. \quad (2)$$

Trên thực tế, (2) không phải luôn đúng (bạn đọc có thể dễ dàng kiểm tra được bất đẳng thức này sai với $a = -3, b = c = 1$). Tuy nhiên, với việc sử dụng *yếu tố “ít nhất”* ta lại có thể “buộc” nó phải đúng. Thật vậy, vì

$$\sum [a^2 + b^2 + c^2 + 3(ab + bc + ca)] = 3(a + b + c + d)^2 = 0,$$

nên trong bốn số

$$\begin{aligned} & a^2 + b^2 + c^2 + 3(ab + bc + ca), \\ & b^2 + c^2 + d^2 + 3(bc + cd + db), \\ & c^2 + d^2 + a^2 + 3(cd + da + ac), \\ & d^2 + a^2 + b^2 + 3(da + ab + bd), \end{aligned}$$

phải có ít nhất một số không âm. Và do tính đối xứng nên ta hoàn toàn có thể giả sử được

$$a^2 + b^2 + c^2 + 3(ab + bc + ca) \geq 0,$$

tức (2) đúng và bài toán được chứng minh hoàn toàn. Chú ý rằng đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = -\frac{d}{3}$, hoặc các hoán vị. $\square$

Nhận xét. Từ lời giải của bất đẳng thức (1), ta tìm được một chứng minh thú vị cho bài bất đẳng thức trong đề chọn đội tuyển Việt Nam dự thi Olympic Toán Quốc tế năm 1996:

Nếu a, b, c là các số thực tùy ý, thì

$$(b + c)^4 + (c + a)^4 + (a + b)^4 \geq \frac{4}{7}(a^4 + b^4 + c^4). \quad (3)$$

Thật vậy, trong (1) thay $d = -(a + b + c)$, ta có

$$\begin{aligned} [a^2 + b^2 + c^2 + (a + b + c)^2]^2 & \geq \frac{12}{7} [a^4 + b^4 + c^4 + (a + b + c)^4] \\ & \geq \frac{12}{7} (a^4 + b^4 + c^4). \end{aligned} \quad (4)$$

Mặt khác, theo bất đẳng thức Cauchy-Schwarz thì

$$\begin{aligned} [a^2 + b^2 + c^2 + (a + b + c)^2]^2 & = [(b + c)^2 + (c + a)^2 + (a + b)^2]^2 \\ & \leq 3 [(b + c)^4 + (c + a)^4 + (a + b)^4]. \end{aligned} \quad (5)$$

Kết hợp (4) và (5) lại, ta có ngay (3).

Một kỹ thuật nhỏ để sử dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz 97

Cuối cùng, chúng tôi xin được đề xuất thêm một số bài toán khác mà ta vẫn có thể áp dụng kỹ thuật *yếu tố “ít nhất”* để giải. Ở đây, chúng tôi sẽ không nêu lời giải chi tiết cho các bài toán này. Bạn đọc hãy thử sức với chúng để cảm nhận được rõ ràng những nét thú vị của kỹ thuật mà chúng ta vừa nghiên cứu ở đây.

Bài tập 1. Cho các số thực a, b, c thỏa mãn điều kiện $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. Chứng minh rằng

$$\frac{1 - 2bc}{5 - 5a^2 - 4bc} + \frac{1 - 2ca}{5 - 5b^2 - 4ca} + \frac{1 - 2ab}{5 - 5c^2 - 4ab} \geq \frac{1}{2}.$$

Bài tập 2. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $ab + bc + ca = 3$. Chứng minh rằng với mọi $k \geq 1$, ta có

$$\frac{1}{a^2 + b^2 + k} + \frac{1}{b^2 + c^2 + k} + \frac{1}{c^2 + a^2 + k} \leq \frac{3}{2 + k}.$$

Bài tập 3. Cho a, b, c là các số dương thỏa mãn

$$\frac{1}{a^2 + b^2 + 4} + \frac{1}{b^2 + c^2 + 4} + \frac{1}{c^2 + a^2 + 4} \geq \frac{2}{3}.$$

Chứng minh rằng

$$a^2 + b^2 + c^2 + ab + bc + ca \leq 6.$$

Bài tập 4. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn

$$\frac{1}{a^2 + b^2 + 1} + \frac{1}{b^2 + c^2 + 1} + \frac{1}{c^2 + a^2 + 1} \geq 1.$$

Chứng minh rằng

$$b^2 + 3 \geq 2b(a + c).$$

Bài tập 5. Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$(a + b + c) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) \geq \frac{4(a^2 + b^2 + c^2)}{ab + bc + ca} + 5.$$

Bài tập 6. Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a} + a + b + c \geq \frac{6(a^2 + b^2 + c^2)}{a + b + c}.$$

Bài tập 7. Cho a, b, c là các số thực thỏa mãn điều kiện $a^2 + b^2 + c^2 > 0$. Chứng minh rằng

$$\frac{a^2 - 2bc}{a^2 + b^2 + 3c^2} + \frac{b^2 - 2ca}{b^2 + c^2 + 3a^2} + \frac{c^2 - 2ab}{c^2 + a^2 + 3ab} \geq -\frac{3}{5}.$$

Bài tập 8 (USAMO, 2003). Chứng minh rằng với mọi số thực dương a, b, c , ta đều có

$$\frac{(2a + b + c)^2}{2a^2 + (b + c)^2} + \frac{(2b + c + a)^2}{2b^2 + (c + a)^2} + \frac{(2c + a + b)^2}{2c^2 + (a + b)^2} \leq 8.$$

Bài tập 9 (Chinese Western MO, 2007). Cho các số thực a, b, c thỏa mãn $a + b + c = 3$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{5a^2 - 4a + 11} + \frac{1}{5b^2 - 4b + 11} + \frac{1}{5c^2 - 4c + 11} \leq \frac{1}{4}.$$

Bài tập 10. Chứng minh rằng với mọi số thực dương a, b, c , ta đều có

$$\frac{1}{a^2 + bc} + \frac{1}{b^2 + ca} + \frac{1}{c^2 + ab} \leq \frac{a + b + c}{ab + bc + ca} \left(\frac{1}{b + c} + \frac{1}{c + a} + \frac{1}{a + b} \right).$$

Bài tập 11. Chứng minh kết quả tổng quát của bài 13: Nếu $a_1, a_2, \dots, a_n$ là các số thực có tổng bằng 0, thì

$$(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)^2 \geq \frac{n(n-1)}{n^2 - 3n + 3} (a_1^4 + a_2^4 + \dots + a_n^4).$$

Tài liệu tham khảo

- [1] Võ Quốc Bá Cẩn, Trần Quốc Anh, *Sử dụng phương pháp Cauchy-Schwarz để chứng minh bất đẳng thức*, Nhà xuất bản Đại học Sư phạm Hà Nội, 2010.
- [2] Võ Quốc Bá Cẩn, Trần Quốc Anh, *Sử dụng AM-GM để chứng minh bất đẳng thức*, Nhà xuất bản Đại học Sư phạm Hà Nội, 2010.
- [3] Võ Quốc Bá Cẩn, Trần Quốc Anh, *Bất đẳng thức và những lời giải hay*, Nhà xuất bản Hà Nội, 2009.
- [4] Vasile Cirtoaje, Vo Quoc Ba Can, Tran Quoc Anh, *Inequalities with Beautiful Solutions*, GIL Publishing House, 2009.
- [5] Võ Quốc Bá Cẩn, *Một số phương pháp chứng minh bất đẳng thức*, Kỷ yếu Gặp gỡ Toán học III, hè 2011.