

TỈ SỐ KÉP PHÂN TÍCH VÀ ỨNG DỤNG

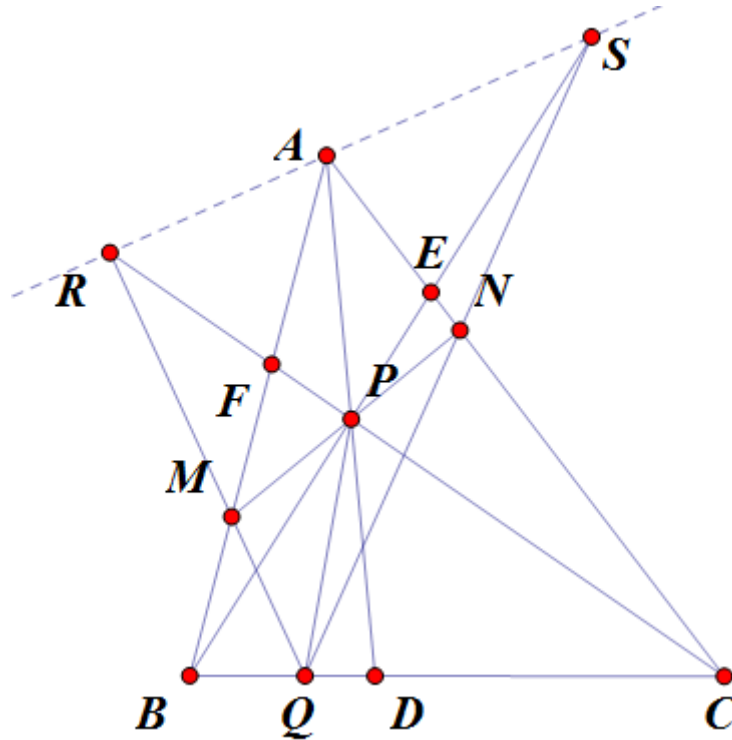
Đăng Trần Quang ^{*} - Trần Quốc Nhật Hân [†]

Ngày 28 tháng 1 năm 2014

Tóm tắt nội dung

Tỉ số kép là một trong những viên ngọc quý của hình học sơ cấp. Ta bắt gặp tỉ số kép trong những bài toán từ cuộc thi cấp thành phố đến quốc tế và cả trong những định lý, bài toán. Bài viết này sẽ phân tích, đưa ra suy nghĩ dùng tỉ số kép như thế nào trong một số bài toán được chọn lọc. Hy vọng bạn đọc sẽ nhận ra vẻ đẹp của tỉ số kép và tìm ra tư tưởng để ứng dụng tỉ số kép vào bài toán.

Bài toán 1. Cho tam giác ABC và D, E, F thứ tự thuộc BC, CA, AB sao cho AD, BE, CF đồng quy tại P . Trên AB, AC lấy 2 điểm M và N sao cho M, P, N thẳng hàng. Q là điểm bất kì trên BC . QM cắt CF tại R ; QN cắt BE tại S . Chứng minh rằng A, R, S thẳng hàng. $\triangle$



^{*}lớp 10T1 THPT chuyên Đại học Sư Phạm, Hà Nội

[†]lớp 12A1 THPT chuyên Lê Quý Đôn, Đà Nẵng

PHÂN TÍCH. Trước hết, nhìn vào bài toán, ta thấy các giả thiết chỉ liên quan đến sự thẳng hàng, không có các giả thiết về góc, đường tròn. Đây là một điều kiện rất lý tưởng cho tỉ số kép trên đường thẳng. Mặt khác, bài toán yêu cầu phải chứng minh sự thẳng hàng của 3 điểm A, R, S . Ta sẽ nghĩ ngay đến một định lý quan trọng như sau:

Định lý 1.

Cho 5 điểm X, Y, Z, O, O' . Khi đó X, Y, Z thẳng hàng khi và chỉ khi $O(XYZO') = O'(XYZO)$. $\square$

(Chứng minh xem trang 60 trong [1]).

Quay lại bài toán. Ta sẽ thử dùng định lý trên. Hiển nhiên ta sẽ chọn X, Y, Z là A, R, S . Cần phải tìm O, O' . Muốn tìm được 2 điểm này, ta nên chú ý tới những đường thẳng đi qua R, A, S và đồng quy. Khi đó, ta thấy P, Q là 2 điểm "liên quan" nhiều nhất tới A, R, S . Cho nên ta chọn O, O' là P, Q . Ta thử xem:

$$P(ARSQ) = (DCBQ) = A(DCBQ) = A(PNMQ) = Q(PNMA) = Q(PSRA) = Q(ARSP)$$

(chú ý rằng $A(PNMQ) = Q(PNMA)$ là do áp dụng **Định lý 1** cho P, N, M, Q, A với P, N, M thẳng hàng).

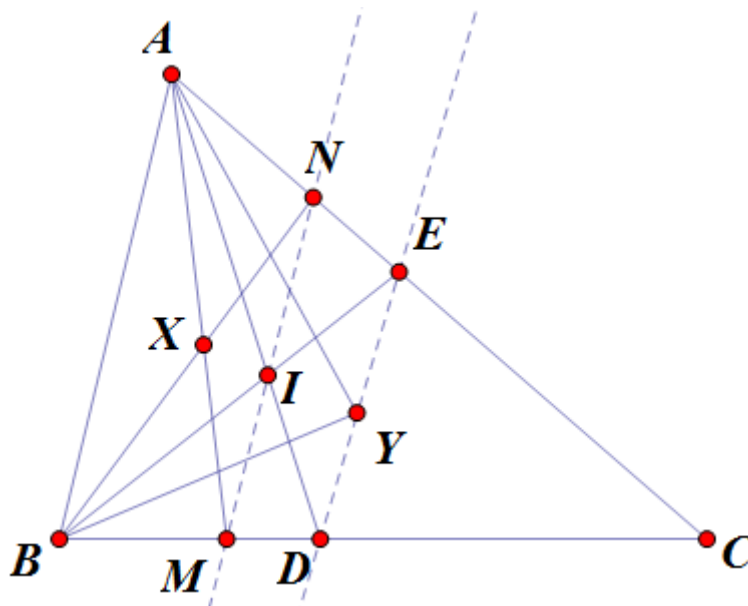
Bài toán đã được giải quyết!

Bằng kĩ thuật tương tự, bạn đọc hãy chứng minh bài toán như sau:

Bài toán 2 (Định lý Pappus). Cho 2 đường thẳng d, d' . Lấy A, B, C trên d và D, E, F trên d' . AE cắt DB tại M ; AF cắt DC tại N ; BF cắt CE tại P .
Chứng minh rằng M, N, P thẳng hàng. $\triangle$

Bây giờ, ta có một bài toán chứng minh thẳng hàng nhưng liên quan đến góc:

Bài toán 3. Cho tam giác ABC có AD, BE là các đường phân giác tương ứng đỉnh A, B cắt nhau tại I . X, Y là 2 điểm liên hợp đẳng giác trong tam giác ABC . Giả sử AX cắt BC tại M , BX cắt AC tại N .
Chứng minh rằng M, I, N thẳng hàng khi và chỉ khi D, Y, E thẳng hàng. $\triangle$



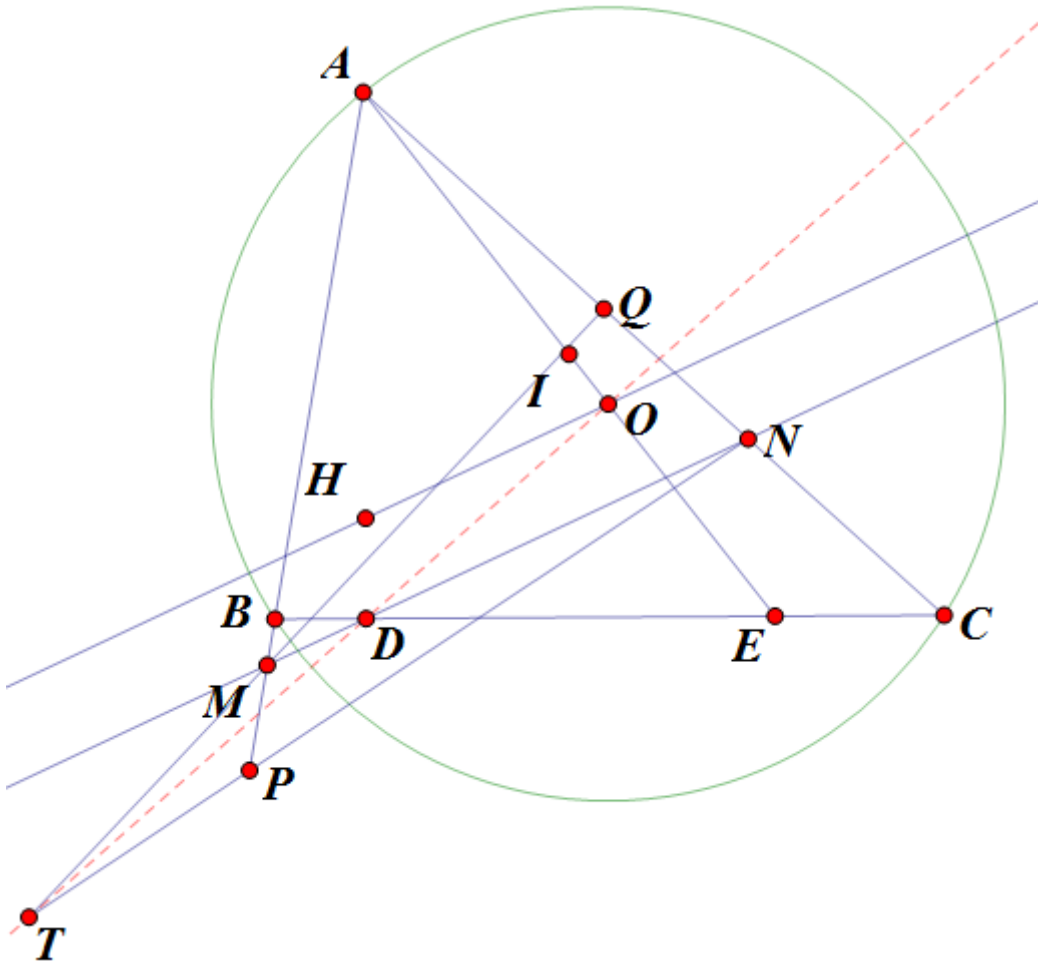
PHÂN TÍCH. Thoạt nhìn, ta thấy cần phải chứng minh sự tương đương 2 mệnh đề về thẳng hàng. Đây là 1 gợi ý đẹp cho với [Định lý 1](#). Nhưng ta sẽ dùng giả thiết đẳng giác như thế nào?

Giả thiết đẳng giác sẽ gợi cho ta đến phép đối xứng trục (cụ thể, trục là tia phân giác). Và lưu ý rằng phép đối xứng trục sẽ bảo toàn tỉ số kép. Bằng những nhận xét tương tự trong [Bài toán 1](#), ta sẽ chọn O, O' tương ứng là A, B . Với những nhận định ban đầu như thế, ta sẽ bắt tay vào làm thử (*hãy thử mọi cách có thể!!!*):

$$\begin{aligned} A(MNIB) &= A(YBDE) \text{ (do phép đối xứng trục } AI) \\ &= A(BYED) \\ B(MNIA) &= B(AYED) \text{ (do phép đối xứng trục } BI) \end{aligned}$$

Tới đây, ta thấy ngay đpcm.

Bài toán 4 (Trần Quang Hùng). Cho tam giác ABC nhọn có tâm đường tròn ngoại tiếp O , trực tâm H , đường cao AD . AO cắt BC tại E . Đường thẳng qua D song song OH lần lượt cắt AB, AC tại M, N . I là trung điểm AE . DI lần lượt cắt AB, AC tại P, Q . MQ cắt NP tại T . Chứng minh rằng D, O, T thẳng hàng. $\triangle$



PHÂN TÍCH. Trước hết, trong hình vẽ, có 1 yếu tố gợi ta có thể sẽ sử dụng tỉ số kép. Đó là tứ giác toàn phần MQNPTA (Các tính chất về tứ giác toàn phần, bạn đọc có thể tìm trong [1] (trang 315)). Ta thấy $D(MPAT) = -1$. Nên D, O, T thẳng hàng $\Leftrightarrow D(MPAO) = -1 \Leftrightarrow D(NQAO) = -1$. Tối đây, chú ý rằng giả thiết $DN \parallel OH$ nên ta chỉ cần chứng minh DI đi qua trung điểm OH , vì ta có định lý sau:

Định lý 2.

Cho chùm điều hòa $(a, b, c, d) = -1$ và đường thẳng Δ .

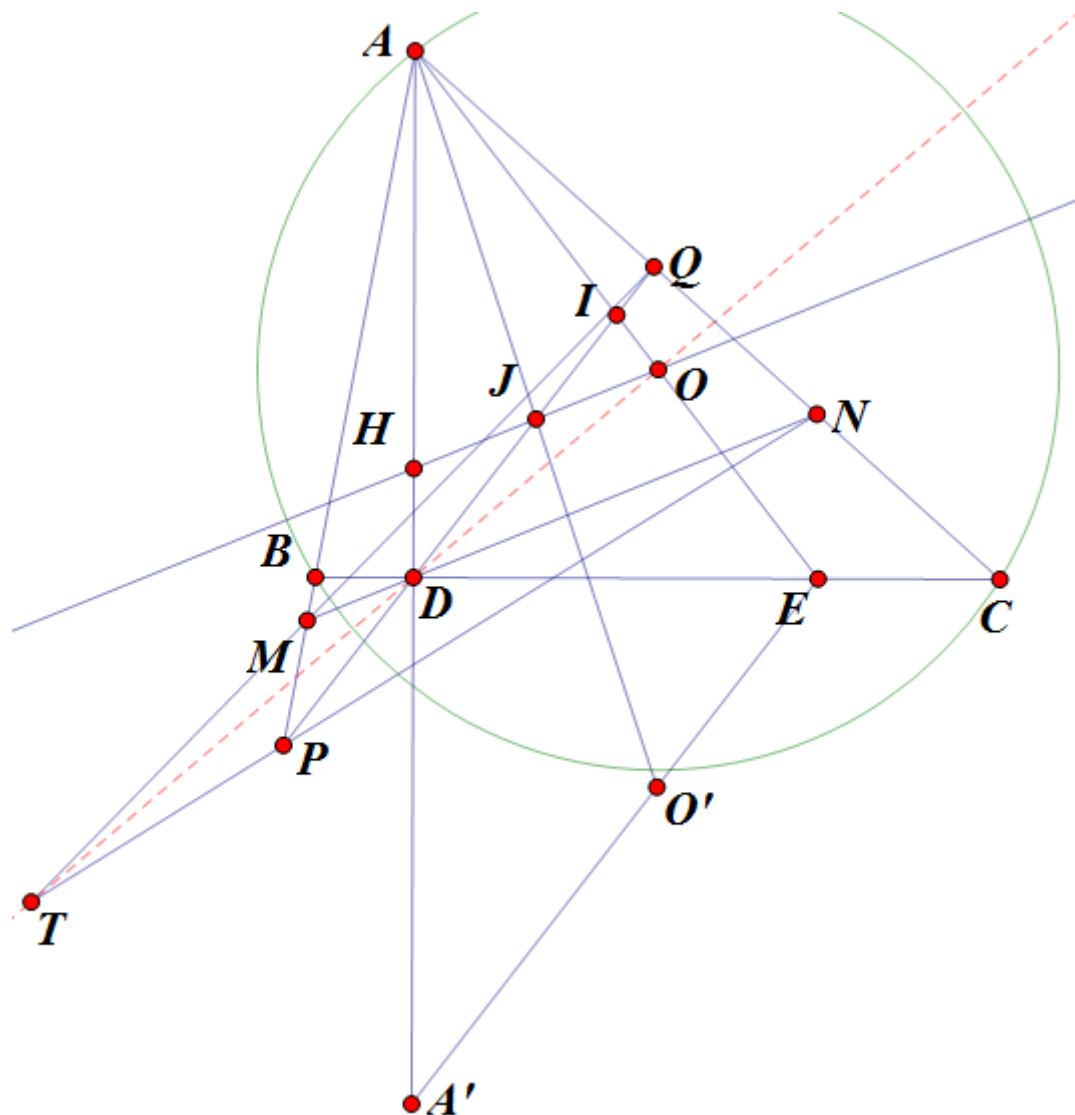
Khi đó $\Delta \parallel d \Leftrightarrow \Delta$ bị a, b, c chắn thành 2 đoạn bằng nhau.

(Chứng minh xem trang 62 trong [1]).

Công việc còn lại của ta là chứng minh DI đi qua trung điểm OH .

Thật vậy: gọi J là trung điểm OH . Vẽ O', A' thứ tự đối xứng O, A qua BC . Một tính chất quen thuộc: J là trung điểm AO' .

Chú ý rằng A', O', E thẳng hàng và D, J, I thứ tự là trung điểm AD', AO', AE nên DI sẽ qua J . Chứng minh hoàn tất.

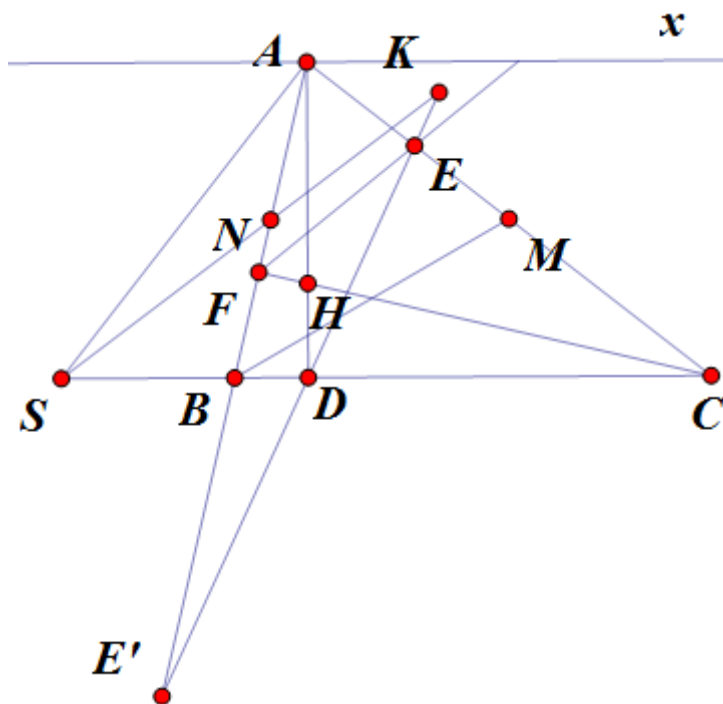


Bài toán 5 (Chọn đội dự tuyển KHTN lớp 10 năm 2013). Cho tam giác ABC nhọn, không cân, các đường cao AD, BE, CF đồng quy tại H , các điểm D, E, F lần lượt thuộc các cạnh BC, CA, AB . Gọi M, N lần lượt là trung điểm CA, AB . Vẽ DE cắt đường thẳng qua A vuông góc AB tại K . Vẽ KN giao BC tại S .

a) Chứng minh rằng $AS \perp AC$.

b) Gọi DF cắt đường thẳng qua A vuông góc AC tại L . Chứng minh rằng LM, NK, AD đồng quy.

c) Gọi KL cắt EF tại P . Chứng minh rằng $AP \perp BC$. $\triangle$



PHÂN TÍCH. a) Yếu tố 2 góc vuông có cùng đỉnh A sẽ khiến ta liên tưởng đến một định lý của tỉ số kép về việc quay tỉ số kép một góc 90° :

Định lý 3.

Nếu các đường thẳng MA, MB, MC, MD thứ tự vuông góc với $M'A', M'B', M'C', M'D'$ thì $M(ABCD) = M'(A'B'C'D')$.

Mạnh hơn là: Nếu các đường thẳng MA, MB, MC thứ tự vuông góc $M'A', M'B', M'C'$ thì $MD \perp M'D' \Leftrightarrow M(ABCD) = M'(A'B'C'D')$. $\square$

(Chứng minh xem trang 150 trong [1]).

Áp dụng định lý này, ta cần phải chứng minh $A(KNSD) = A(BKCx)$ với $Ax \perp AD$. Mà chú ý rằng, K, N, S thẳng hàng nên áp dụng Định lý 1, ta có:

$$\begin{aligned}
 A(KNSD) &= D(KNSA) \\
 &= (E'NBA) \text{ (với } E' \text{ là giao điểm của } DE \text{ và } AB) \\
 &= \frac{\overline{BE'}}{\overline{BN}} : \frac{\overline{AE'}}{\overline{AN}} = -\frac{\overline{E'B}}{\overline{E'A}} \\
 &= -(BAE') = (BAF)
 \end{aligned}$$

(Chú ý rằng $ABDEE'C$ là tứ giác toàn phần nên $(BAFE') = -1 = (BAF) : (BAE')$)
Mặt khác:

$$A(BKCx) = (BTC) = (BAF)$$

Bởi ta có định lý sau đây:

Định lý 4.

Cho chùm $O(ABCD)$ và đường thẳng d cắt OA, OB, OC tại A', B', C' tương ứng.

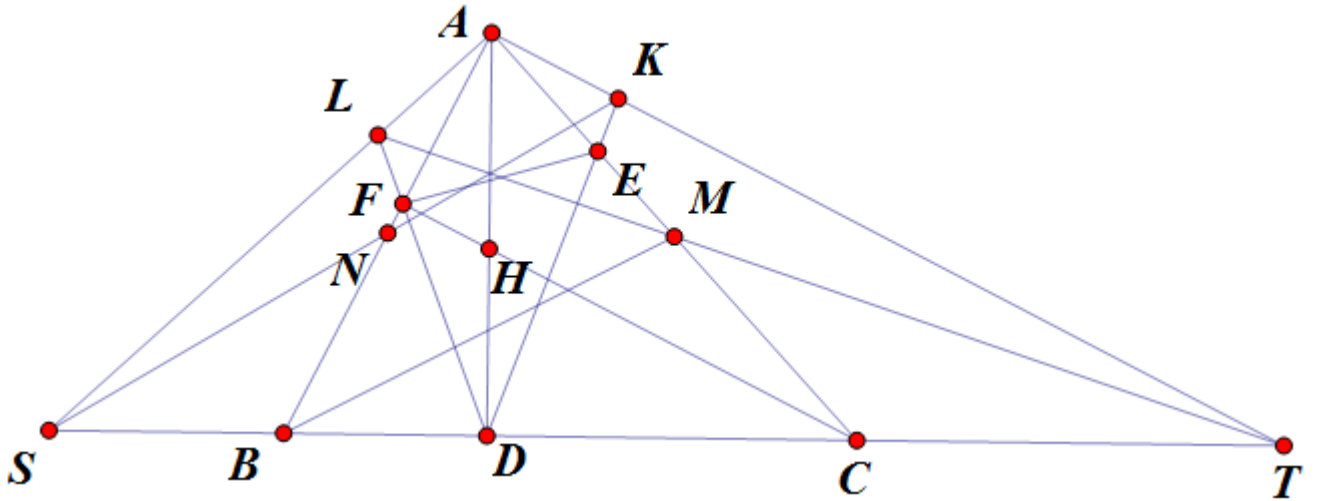
Khi đó $d \parallel OD \Leftrightarrow O(ABCD) = (A'B'C')$ □

(Chứng minh xem trang 58 trong [1]).

Và 1 tính chất quan trọng giữa tỉ số kép và tỉ số đơn: $(ABCD) = (ABC) : (ABD)$.

Vì thế, ta có $A(KNSD) = (BAF) = A(BKCx)$. Áp dụng **Định lý 3**, ta sẽ có ngay $AS \perp AC$.

b) Do câu a nên $L \in AS$. Từ một cấu hình "đối xứng" như vậy, ta sẽ nghĩ ngay đến việc kéo dài LN cắt BC tại T . Tương tự phần a thì $AT \perp AB$ nên $K \in AT$. Ta chỉ cần chứng minh bằng định lý Ceva cho tam giác ATS như sau:



Áp dụng định lý Menelaus cho tam giác ACT với cát tuyến DEK , ta có:

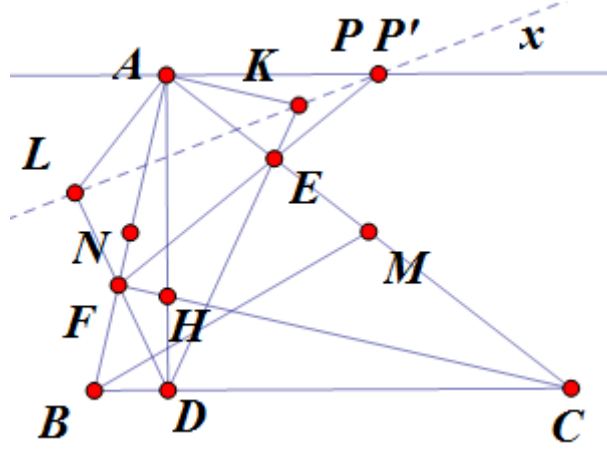
$$\frac{\overline{KA}}{\overline{KT}} \cdot \frac{\overline{DT}}{\overline{DC}} \cdot \frac{\overline{EC}}{\overline{EA}} = 1 \Rightarrow \frac{\overline{KA}}{\overline{KT}} = \frac{\overline{DC}}{\overline{DT}} \cdot \frac{\overline{EA}}{\overline{EC}}$$

Tương tự, ta có $\frac{\overline{LS}}{\overline{LA}} = \frac{\overline{DS}}{\overline{DB}} \cdot \frac{\overline{FB}}{\overline{FA}}$. Nhân 2 đẳng thức này lại và nhân với $\frac{\overline{DT}}{\overline{DS}}$, ta có:

$$\frac{\overline{KA}}{\overline{KT}} \cdot \frac{\overline{LS}}{\overline{LA}} \cdot \frac{\overline{DT}}{\overline{DS}} = \frac{\overline{EA}}{\overline{EC}} \cdot \frac{\overline{FB}}{\overline{FA}} \cdot \frac{\overline{DC}}{\overline{DB}} = -1$$

(Do AD, BE, CF đồng quy trong tam giác ABC). Việc chứng minh hoàn tất.

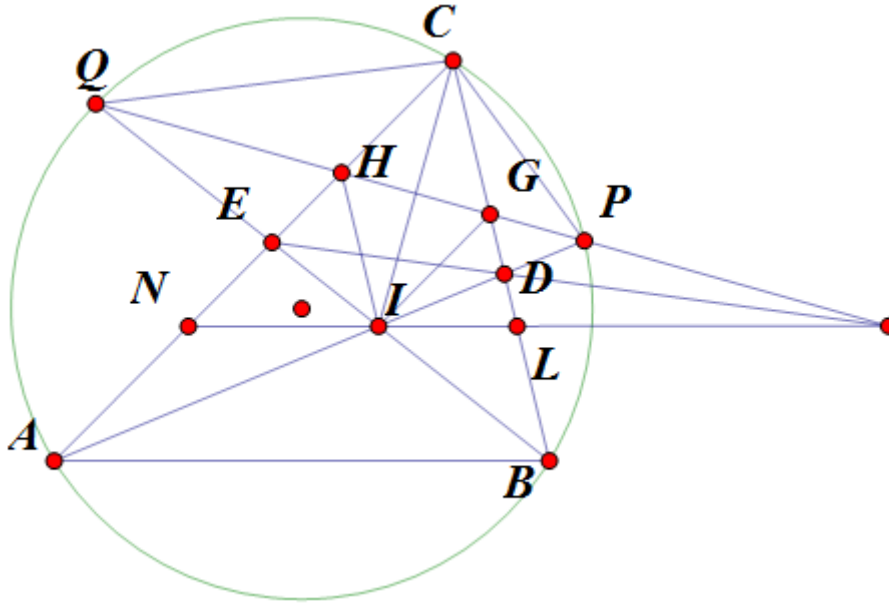
c) Ta chỉ cần chứng minh $AP \equiv Ax$. Như vậy, để tận dụng góc vuông DAx vào **Định lý 3**, ta sẽ dùng phương pháp "chứng minh trùng". Vẽ Ax cắt FE tại P' . Ta sẽ chứng minh L, K, P' thẳng hàng. Thật vậy:



$$\begin{aligned}
 A(LKP'D) &= A(EFDP') \text{ (do Định lý 3)} \\
 &= A(FEP'D) \\
 &= D(FEP'A) \text{ (do Định lý 1)} \\
 &= D(LKP'A)
 \end{aligned}$$

Theo Định lý 1, ta có đpcm.

Bài toán 6. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) và có các phân giác trong AD, BE cắt nhau tại I . AD, BE cắt (O) lần thứ 2 thứ tự tại P, Q . Chứng minh rằng đường thẳng qua I song song AB cùng với DE, PQ sẽ đồng quy. $\triangle$



PHÂN TÍCH. Vẽ đường thẳng qua I song song với AB , cắt CA, CB lần lượt tại L, N . Thoạt nhìn thì ta thấy LN, DE không liên quan lắm tới PQ . Nên tự nhiên ta sẽ vẽ PQ cắt CA, CB lần lượt tại G, H để có sự "liên quan" hơn. Và cấu hình này cho ta nghĩ đến định lý sau về sự đồng quy:

Định lý 5.

Cho 2 đường thẳng d, d' cắt nhau tại O . Trên d lấy A, B, C khác O . Trên d' lấy A', B', C' khác O .

Khi đó AA', BB', CC' đồng quy hoặc đôi một song song $\Leftrightarrow (OABC) = (OA'B'C')$. $\square$

(Chứng minh xem trang 60 trong [1]).

Nhìn kĩ lại cấu hình, ta thấy có vẻ $IH \parallel BC$ và $IG \parallel AC$, đây là 1 điều kiện tốt cho phép chiếu xuyên tâm ta có thể sẽ dùng sau này.

Trước hết, ta nhận thấy rằng PQ là trung trực IC .

Thật vậy:

$$\begin{aligned}\angle PIC &= \angle IAC + \angle ICA \\ &= \angle IAB + \angle ICB \\ &= \angle PCB + \angle ICB = \angle PCI\end{aligned}$$

nên tam giác PCI cân tại $P \Rightarrow PC = PI$. Tương tự: $QC = QI$ nên PQ là trung trực của IC .

Cho nên tam giác IGC, IHC lần lượt cân tại G, H và có chung đáy IC .

Mặt khác, CI là phân giác $\angle ACB$ nên $\triangle CGI = \triangle CHI(g.c.g) \Rightarrow \angle HIC = \angle GIC = \angle GCI \Rightarrow IH \parallel BC$. Tương tự: $IG \parallel AC$.

Do đó, theo [Định lý 5](#), ta cần chứng minh $(CGDL) = (CHEN)$. Ta thấy nên chọn tâm chiếu là I , vì nó liên quan nhiều nhất đến $(CGDL), (CHEN)$. Khi đó, ta có:

$$\begin{aligned}(CGDL) &= I(CGDL) = I(DLCG) \\ &= (ANC) \text{ (áp dụng Định lý 4 cho } IG \parallel AC) \\ \text{Tương tự: } (CHEN) &= I(CHEN) = I(ENCH) = (BLC)\end{aligned}$$

Mà $LN \parallel AB \Rightarrow (ANC) = (BLC) \Rightarrow (CGDL) = (CHEN)$. Bài toán được chứng minh!

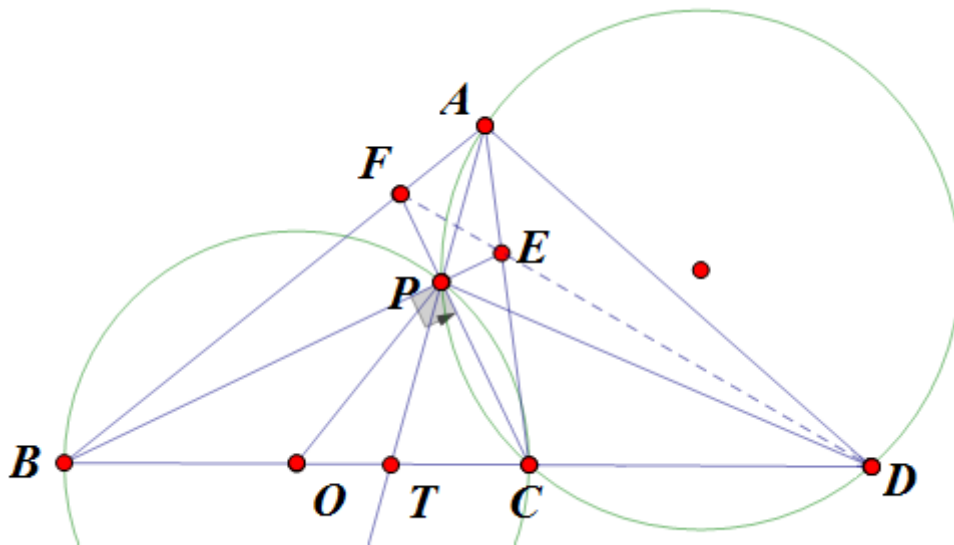
Bài toán 7 (Iran 1998). Cho tam giác ABC và điểm D nằm trên phần kéo dài của tia BC sao cho $CD = AC$. Đường tròn ngoại tiếp tam giác ACD cắt đường tròn (O) đường kính BC tại P khác C . BP cắt AC tại E , CP cắt AB tại F .

Chứng minh rằng:

a) D, E, F thẳng hàng.

b) $\angle OPA + \angle ODP = 180^\circ$

△



PHÂN TÍCH. Yếu tố BE, CF, AP đồng quy và D, E, F thẳng hàng gợi cho ta một định lý quan trọng về sự đồng quy trong kiến thức về tỉ số kép:

Định lý 6.

Cho tam giác ABC . Trên BC, CA, AB lần lượt lấy D, E, F . Giả sử EF cắt BC tại L . Khi đó AD, BE, CF đồng quy $\Leftrightarrow (BCDL) = -1$ $\square$

(Chứng minh xem trang 56 trong [1])

Như vậy, ta cần chỉ ra $P(BCAD) = -1$. Để ý tiếp rằng $\angle BPC = 90^\circ$ nên ta có $P(BCAD) = -1 \Leftrightarrow PC$ là phân giác $\angle DPT$ với T là giao điểm của AP với BC . Lý do là vì ta có định lý sau:

Định lý 7.

Cho tam giác ABC . AD, AE thứ tự là đường phân giác trong, phân giác ngoài góc BAC . Khi đó $(BCDE) = -1$.

Mạnh hơn là: Cho chùm điều hòa $(abcd)$. Khi đó c, d là 2 phân giác của các góc tạo bởi $a, b \Leftrightarrow c \perp d$. $\square$

(Chứng minh xem trang 63 trong [1]).

Và từ đó ta có lời giải như sau

LỜI GIẢI.

a, Gọi giao điểm của AP tới BC là T . Ta có: $\angle CPD = \angle DAC = \angle TPC \Rightarrow PC$ là phân giác $\angle TPD$

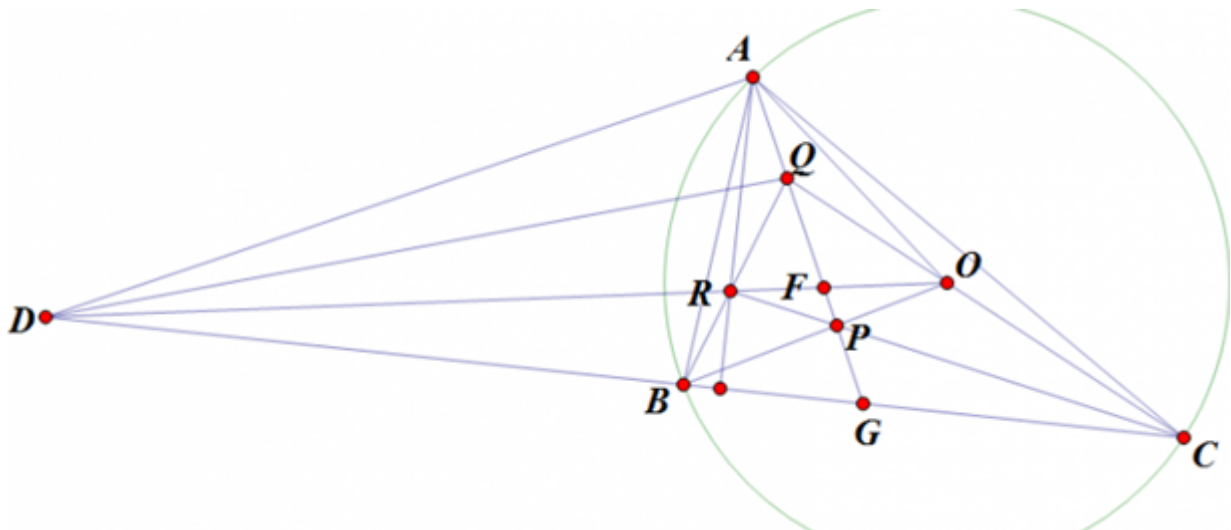
Kết hợp với $\angle BPC = 90^\circ$ nên ta có $P(BCTD) = -1 \Rightarrow (BCTD) = -1 \Rightarrow \overline{D, E, F}$

b, Ta có $\angle OPA + \angle ODP = 180^\circ \Leftrightarrow \angle ODP = \angle OPT \Leftrightarrow OP^2 = \overline{OT} \cdot \overline{OD}$

Nhưng đẳng thức cuối hiển nhiên đúng vì theo hệ thức Maclaurin, ta có: $\overline{OT} \cdot \overline{OD} = OB^2 = OP^2$. Vậy ta có điều phải chứng minh! $\blacksquare$

Bài toán 8 (Indonesia 2012). Cho tam giác ABC nhận nội tiếp đường tròn (O) , đường phân giác góc A cắt các đường thẳng BO, CO tại P, Q . Gọi R là giao điểm của BQ và CP .

Chứng minh rằng AR vuông góc BC . $\triangle$



PHÂN TÍCH. Nhận thấy điều phải chứng minh tương đương với AP là phân giác $\angle OAR$. Điều này gợi cho ta suy nghĩ dựng tia phân giác góc ngoài $\angle A$ cắt BC tại D để có được $(DGBC) = -1$. Từ đó ta có lời giải như sau:

LỜI GIẢI.

Nếu $AB = AC$ thì kết luận bài toán là hiển nhiên. Ta xét trường hợp $AB \neq AC$. Khi đó, tia phân giác góc ngoài $\angle A$ cắt BC tại D . Ta có theo **Định lý 7**: $(DGBC) = -1$.

Chú ý rằng ta có sự đồng quy của QP, BO, CR trong $\triangle QBC$ nên theo **Định lý 6**, ta có D, R, Q thẳng hàng.

Gọi giao điểm của RO với QG là F , từ đó ta có thể thực hiện phép chiếu xuyên tâm như sau:

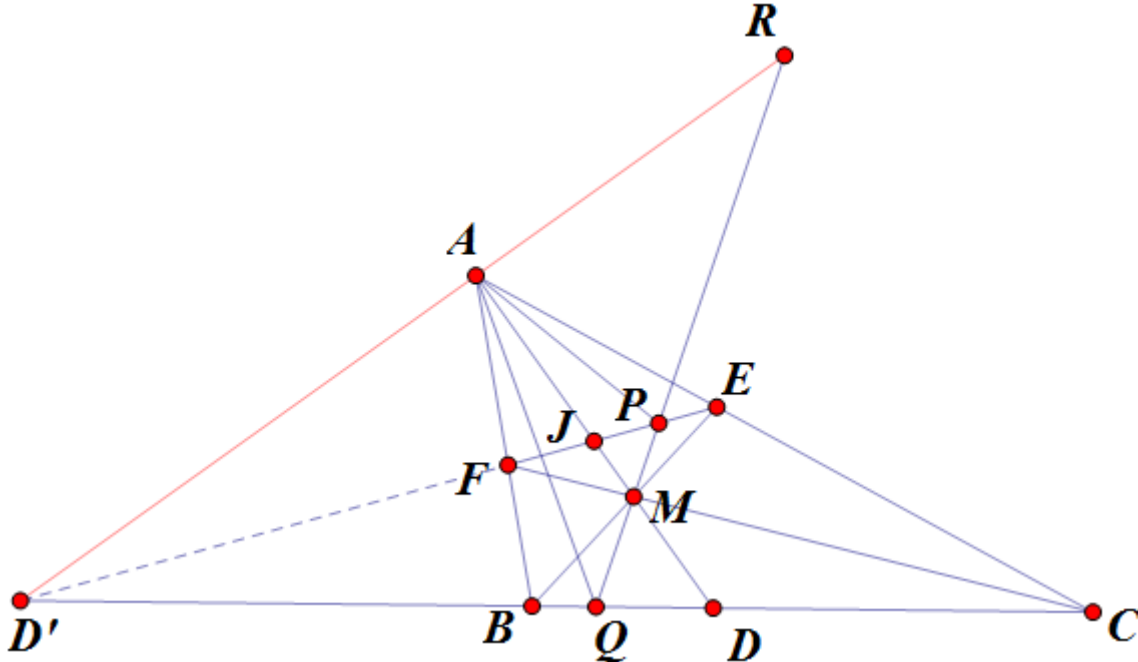
$$(DGBC) = -1 \Rightarrow Q(DGBC) = -1 \Rightarrow (DFRO) = -1 \Rightarrow A(DFRO) = -1$$

Điều này chứng tỏ AQ là phân giác $\angle OAR$, phép chứng minh hoàn tất. ■

NHẬN XÉT. Qua cách chứng minh trên, ta có thể thấy rằng, vai trò tâm đường tròn ngoại tiếp của điểm O không quan trọng lắm cho việc chứng minh AP là phân giác góc OAR . Cho nên, ta sẽ có một bài toán mở rộng hơn sau:

Bài toán 9. Cho tam giác ABC . AD là đường phân giác trong. Điểm M thuộc đường thẳng AD . BM, CM cắt AC, AB lần lượt tại E, F . P trên EF và Q trên BC sao cho P, M, Q thẳng hàng.

Chứng minh rằng AP và AQ là 2 đường đẳng giác. △



PHÂN TÍCH. Ta thấy bài toán khó thể sử dụng các công cụ như tam giác đồng dạng, Thales, ... để chứng minh bởi vì điểm M chạy hoàn toàn tự do trên AD , gợi cho chúng ta sử dụng tỉ số kép để giải quyết bài toán.

Và đương nhiên để áp dụng tính chất của hàng điểm điều hòa, ta cần vẽ thêm phân giác ngoài AD' để nhận đc $(D'DBC) = -1$ (theo **Định lý 7**). Từ đó có D', E, F thẳng hàng

(theo Định lý 6). Kết hợp với sự kiện $AD \perp AD'$ thì cũng theo Định lý 7, ta cần chỉ ra $A(D'MQP) = -1$. Tới đây điều phải chứng minh đã “thoáng” hơn rất nhiều. Ta có lời giải như sau:

LỜI GIẢI.

Phân giác ngoài góc A cắt BC tại D' . PQ cắt AD tại R .

Theo Định lý 7 ta có $(D'DBC) = -1$, theo Định lý 6 ta có D', E, F thẳng hàng.

Từ đó áp dụng tính chất quen thuộc cho tứ giác toàn phần $EFBC$:

$$-1 = D'(AMEB) = (RMPQ) = A(RMPQ) = A(D'MPQ)$$

Theo Định lý 7, ta có AP và AQ là 2 đường đẳng giác (đpcm!). ■

NHẬN XÉT. Đây là một bài toán hay bởi nó có “giao” với nhiều bài toán khác. Ví dụ với một bài toán sau đây:

Cho tam giác ABC . M là điểm bất kì trong tam giác. Gọi P, Q, R lần lượt là điểm đối xứng của M qua phân giác trong góc A, B, C . Khi đó ta có AP, BQ, CR đồng quy.

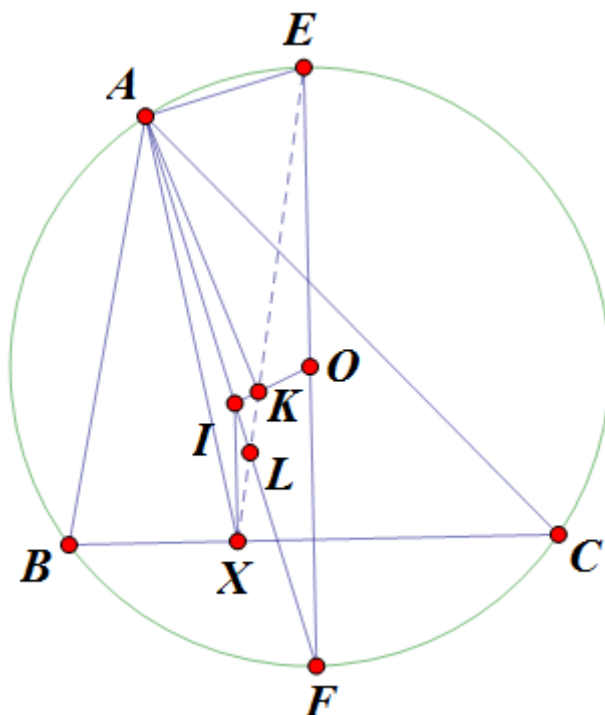
Bài toán trên có thể chứng minh được bằng Ceva-sin, mời bạn đọc tự chứng minh.

Hai bài toán trên đều “giao” nhau ở tính chất đối xứng qua phân giác, nhưng kết luận ở bài toán sau lại cho ta tính chất đồng quy!! Sử dụng hai bài toán trên, bạn đọc hãy thử sức với bài toán sau:

Bài toán 10 (Nguyễn Minh Hà). Cho tam giác ABC và các đường phân giác trong AA_0, BB_0, CC_0 . Gọi giao điểm của AA_0 và B_0C_0 là A_1 . Hạ A_1A_2 vuông góc với BC . Các điểm B_2, C_2 dựng hoàn toàn tương tự. Chứng minh rằng AA_2, BB_2, CC_2 đồng quy. △

Chúng ta đến tiếp với một bài toán liên quan tới 2 đường đẳng giác:

Bài toán 11 (Thi chuyển hệ ĐHSPHN lớp 10 năm 2011-2012, học kì I). Cho tam giác ABC không đều. (O, R) là đường tròn ngoại tiếp của tam giác. Đường tròn nội tiếp (I, r) tiếp xúc với BC tại X . Điểm K thuộc đoạn OI sao cho $\frac{KO}{KI} = \frac{R}{r}$. Chứng minh rằng AX và AK là 2 đường đẳng giác. △



PHÂN TÍCH. Cùng theo ý tưởng bài toán trước, ta sẽ tạo thêm các hàng điểm điều hoà bằng cách kẻ AE là phân giác ngoài góc A ($E \in (O)$). Nhận thấy tiếp có $OE \parallel IX$ nên ta sẽ tạo thêm một bộ hàng điểm điều hoà nữa bằng cách kẻ thêm đường kính EF . Điều phải chứng minh tương đương với $A(XKIE) = -1$. Ta có lời giải như sau:

LỜI GIẢI.

Tia phân giác trong, ngoài góc A lần lượt cắt (O) tại F, E . Và AF cắt XE tại L . Dễ thấy A, I, F thẳng hàng, O, E, F thẳng hàng và theo định lý Thales đảo, ta cũng có X, K, L, E thẳng hàng.

Ta có: $A(XKIE) = (XKLE) = I(XKLE) = I(XOFE)$

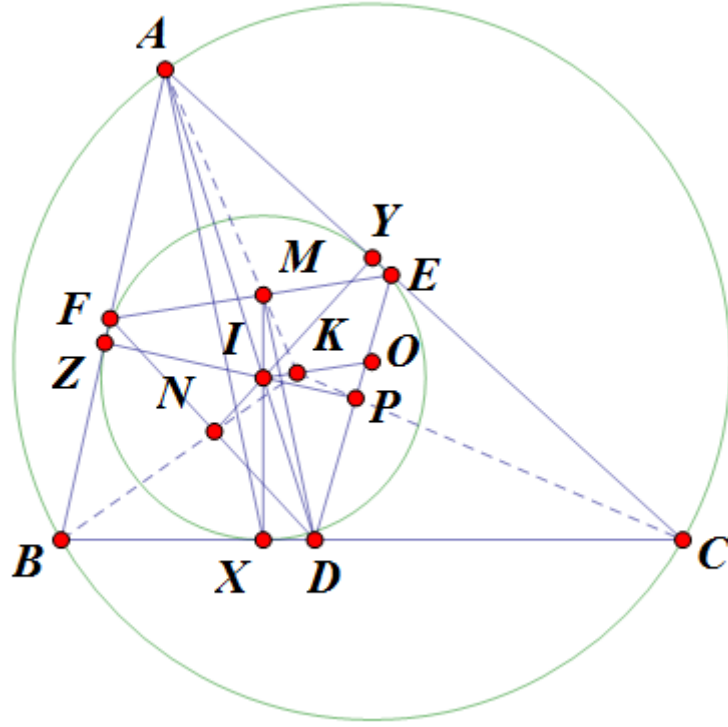
Nhưng do $\begin{cases} OE = OF \\ IX \parallel EF \end{cases} \Rightarrow I(XOFE) = -1$ (theo Định lý 2).

Vậy $A(XKIE) = -1$, theo [Định lý 7](#) thì ta có đpcm.

Kết hợp [Bài toán 9](#) và [Bài toán 16](#) cho ta một kết quả rất đẹp như sau:

Bài toán 12 (Nguyễn Minh Hà - Mathley - Round 2 - 2011). Cho tam giác ABC , O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác đó. Các đường phân giác AD, BE, CF đồng quy tại I . Các điểm M, N, P theo thứ tự thuộc EF, FD, DE sao cho IM, IN, IP theo thứ tự vuông góc với BC, CA, AB . Chứng minh rằng AM, BN, CP đồng quy tại một điểm thuộc OI . $\triangle$

Sau đây là lời giải của chính tác giả bài toán:



LỜI GIẢI.

Gọi R, r theo thứ tự là bán kính của $(O), (I)$. Lấy K thuộc đoạn OI sao cho $\frac{KO}{KI} = \frac{R}{r}$.

Gọi X, Y, Z theo thứ tự là tiếp điểm của (I) với BC, CA, AB .

Vì IM, IN, IP theo thứ tự vuông góc với BC, CA, AB nên I đồng thời thuộc MX, NY, PZ . Theo [Bài toán 9](#), ta có AX, AM ; BY, BN ; CZ, CP là 2 đường đẳng giác của các góc A, B, C tương ứng. Áp dụng kết quả của [Bài toán 16](#), ta có AM, BN, CP đồng thời đi qua điểm $K \in OI$ (đpcm). ■

Bài toán 13. Cho tam giác DBC và điểm D' cố định. P di động trên đường tròn ngoại tiếp tam giác BDC . Gọi d_b, d_c lần lượt là đường thẳng qua D' và song song DB, DC . BP cắt d_b tại M , CP cắt d_c tại N .

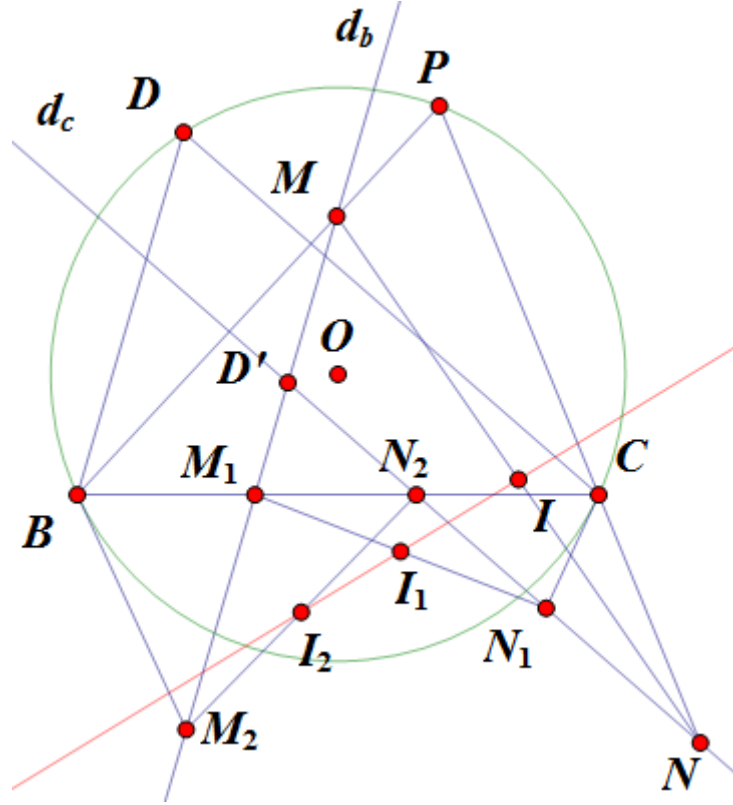
Chứng minh rằng: trung điểm I của MN chạy trên đường cố định. △

PHÂN TÍCH. Đối với những bài toán đường hay điểm cố định, ta phải luôn vẽ vài trường hợp để dự đoán. Thường thì ngoài 1 trường hợp ta vẽ bất kì (không quá đặc biệt), ta sẽ xác định thêm vài trường hợp đặc biệt nữa. Chẳng hạn với bài toán này.

Ta cho P tiến dần về C . Khi đó PC suy biến thành tiếp tuyến tại C của (O) (với (O) là đường tròn ngoại tiếp tam giác BDC); còn PB suy biến thành BC .

Do đó, ta sẽ dựng N_1 là giao điểm của tiếp tuyến tại C của (O) với d_c và M_1 là giao điểm của d_b với BC . Ta có một vị trí đặc biệt của I là I_1 : trung điểm M_1N_1 .

Giờ ta lại cho P tiến dần về B . Phân tích như trên, ta sẽ dựng M_2 là giao điểm của d_b với tiếp tuyến tại B của (O) và d_c cắt BC tại N_2 . Gọi I_2 là trung điểm M_2N_2 .



Ta đã có 3 vị trí của I , và thấy I, I_1, I_2 thẳng hàng! Vì thế, ta nghĩ đường cố định chứa I sẽ là đường thẳng $I_1 I_2$!

Thế nhưng để chứng minh trực tiếp nhận xét trên mà dùng góc thì thật khó vì ta không có liên hệ về góc nào giữa I, I_1, I_2 . Tuy nhiên, ta lại có 1 mối liên khác, đó là I, I_1, I_2 lần lượt là trung điểm $MN, M_1 N_1, M_2 N_2$ và 2 bộ điểm thẳng hàng $(M, M_1, M_2), (N, N_1, N_2)$. Ta sẽ nghĩ ngay đến bổ đề E.R.I.Q:

Bổ đề 1 (E.R.I.Q).

Cho 2 đường thẳng a, b và trên a lấy A, B, C , trên b lấy X, Y, Z sao cho $\frac{BA}{BC} = \frac{YX}{YZ}$. Trên

AX, BY, CZ lần lượt lấy M, N, P sao cho $\frac{MA}{MX} = \frac{NB}{NY} = \frac{PC}{PZ}$.

Khi đó M, N, P thẳng hàng. □

(Chứng minh và ứng dụng xem trong [5])

Bây giờ, ta chỉ cần chứng minh

$$\frac{MM_1}{MM_2} = \frac{NN_1}{NN_2}$$

Mà đây là dạng của tỉ số đơn, nên ta viết lại thành $(M_1 M_2 M) = (N_1 N_2 N)$.

Lại theo [Định lý 4](#) và do $BD \parallel d_b, CD \parallel d_c$, ta phải chứng minh

$$B(M_1 M_2 MD) = C(N_1 N_2 ND)$$

Tới đây, nếu tiếp tục dùng tỉ số kép trên đường thẳng thì không thấy lối đi tiếp rõ ràng. Nhưng để ý rằng B, C thuộc (O) và ta đã có BM_2, CN_1 tiếp xúc (O) và $BM_1, BM, BD, CN_2, CN, CD$ thứ tự cắt (O) lần thứ 2 tại C, P, D, B, P, D . Điều này gợi ý ta nên dùng *tỉ số kép trên đường tròn*.

Ta có một định lý rất quan trọng trong chuyển đổi giữa tỉ số kép trên đường tròn và tỉ số kép trên đường thẳng:

Định lý 8.

Cho đường tròn (γ) , điểm M trên (γ) và một hàng điểm $(ABCD)$. MA, MB, MC, MD thứ tự cắt (γ) lần thứ 2 tại A', B', C', D' .

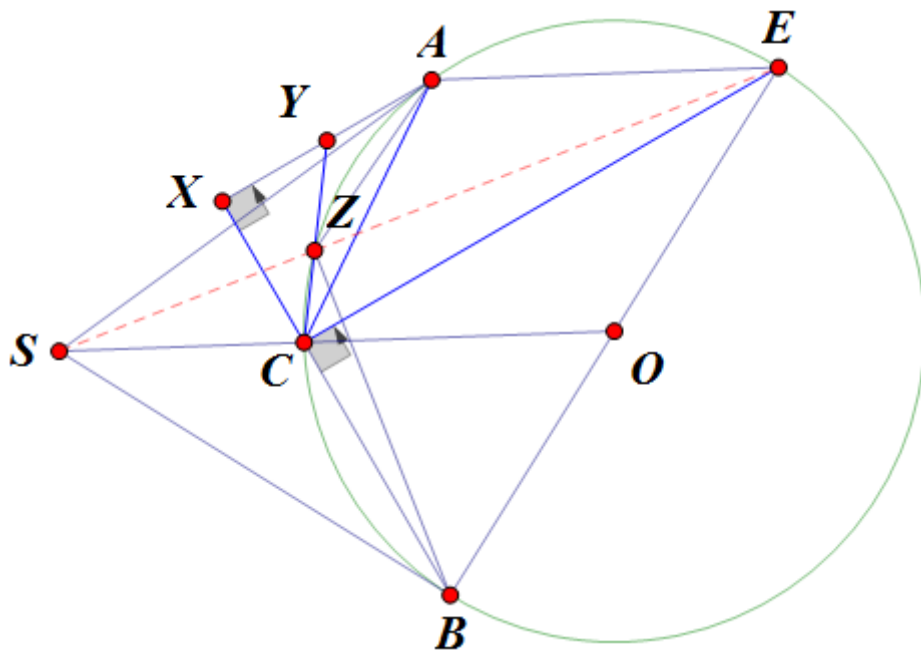
Khi đó $(ABCD) = (A'B'C'D')$. □

Tới đây, mọi thứ trở nên hiển nhiên vì

$$B(M_1M_2MD) = (CBPD) = C(N_1N_2ND)$$

Bài toán được giải quyết!

Bài toán 14. Cho (O) và một điểm S ngoài đường tròn. Từ S kẻ 2 tiếp tuyến SA, SB đến (O) . SO cắt (O) tại C (C nằm giữa S và (O)). Đường thẳng qua A vuông góc với BC cắt BC tại X . Gọi Y là trung điểm của AX . CY cắt (O) tại Z khác C . Chứng minh rằng: $\angle SZB = 90^\circ$. △



Đây là một bài toán đã từng được dùng để thi vào chuyên và hoàn toàn có thể giải bằng kiến thức THCS, nhưng lời đó giải cần vẽ nhiều hình phụ và không dễ để nghĩ ra. Sử dụng hàng điểm điều hoà lại cho ta một lời giải gọn và rất dễ hiểu.

PHÂN TÍCH. Kẻ đường kính OE , ta sẽ cố gắng chứng minh S, Z, E thẳng hàng. Sở dĩ ta không làm ngược lại (kéo dài SZ cắt (O) tại E' rồi chứng minh B, O, E' thẳng hàng) bởi vì đường kính BE sẽ cho ta sự song song của 2 đường thẳng CE và XA . Kết hợp với việc Y là trung điểm XA làm cho ta nhớ tới **Định lý 2**. Từ đó ta có lời giải như sau:

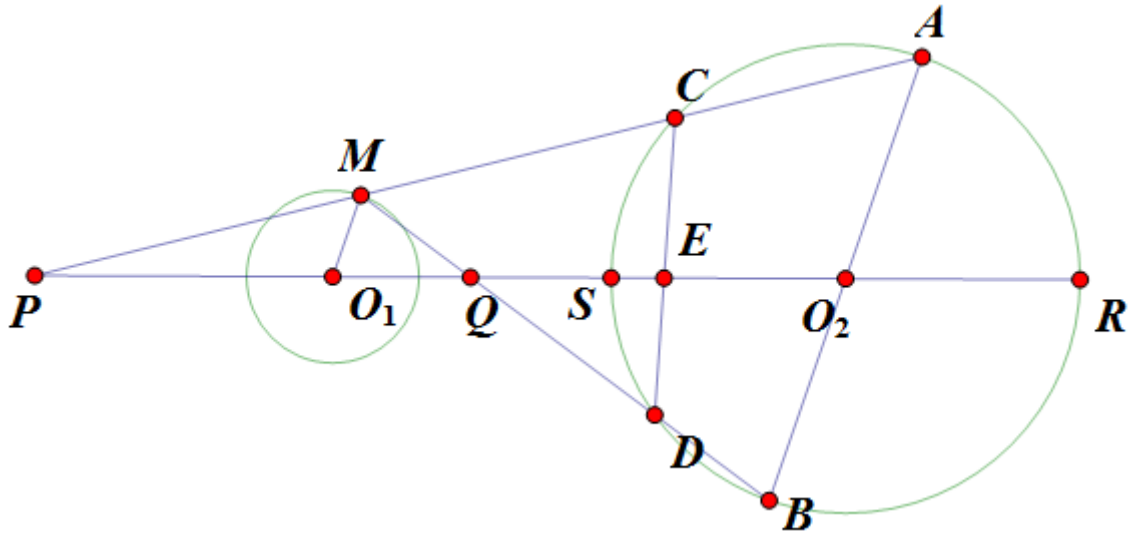
LỜI GIẢI.

Kẻ đường kính BE của (O) .

Ta có: S, Z, E thẳng hàng

- $\Leftrightarrow ZAE B$ là tứ giác điều hoà
- $\Leftrightarrow (ZEBA) = -1$
- $\Leftrightarrow C(ZEBA) = -1$ (tận dụng tối ưu sự thẳng hàng của C, Z, Y)
- $\Leftrightarrow C(YEXA) = -1$ (hiển nhiên đúng theo [Định lý 2](#))

Bài toán 15 (Nguyễn Minh Hà - [2]). Cho hai đường tròn $(O_1), (O_2)$. Điểm M chạy trên (O_1) . Đường thẳng qua O_2 và song song với O_1M cắt (O_2) tại A, B . MA, MB theo thứ tự lại cắt (O_2) tại C, D .
 Chứng minh rằng đường thẳng CD luôn đi qua một điểm cố định. $\triangle$



PHÂN TÍCH. Một bài toán mà giả thiết không cho ta các dữ kiện về góc, khiến ta nghĩ ngay tới việc dùng tỉ số kép để giải quyết nó.

Nhìn vào giả thiết, O_1O_2 và 2 đường tròn $(O_1), (O_2)$ là những hình cố định duy nhất trong bài toán. Vậy nên ta có thể dự đoán trước được giao điểm E của CD và O_1O_2 là điểm cố định cần tìm.

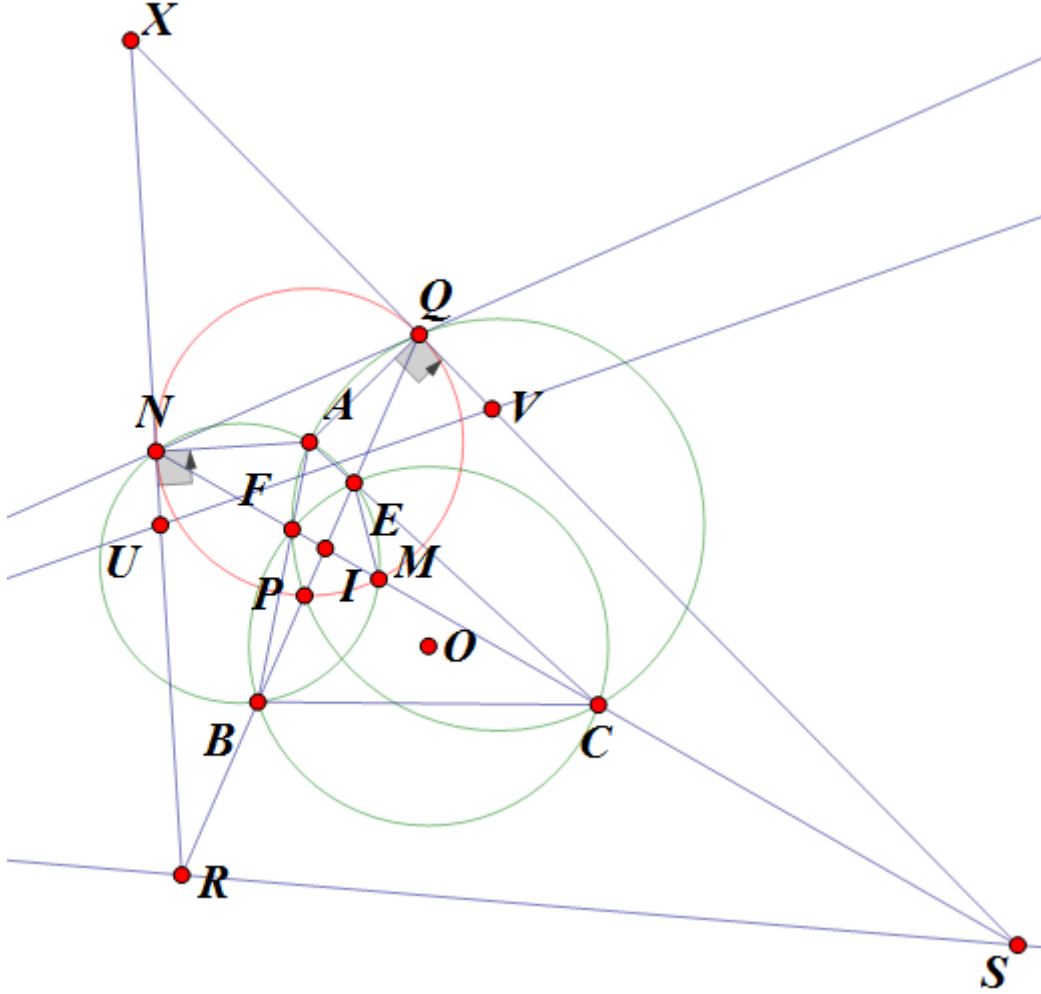
Tuy nhiên, để áp dụng phép chiếu trên đường thẳng/đường tròn, ta cần thêm ít nhất 3 điểm cố định khác (cụ thể là trên (O_1) và (O_2)). Nhận thấy $\frac{MO_1}{BO_2} = \frac{MO_1}{AO_2} = \frac{R_1}{R_2}$: không đổi, nên ta có giao điểm P, Q của O_1O_2 lần lượt với MA, MB đều là những điểm cố định.

Với các điểm cố định cần tìm còn lại, chú ý rằng A, B, C, D đều nằm trên (O_2) nên khi sử dụng phép chiếu trên đường tròn, ta ắt hẳn sẽ phải sử dụng tới ít nhất 1 điểm cố định khác nằm trên (O_2) , đơn giản nhất là ta sẽ lấy S, R là giao điểm của O_1O_2 với (O_2) . Vậy ta đã có những 5 điểm cố định. Để sử dụng tối ưu giả thiết các điểm nằm trên đường tròn/đường thẳng, ta sẽ chứng minh $(PESR)$ hoặc $(QESR)$ cố định. Ta thử xem:

$$(PESR) = C(PESR) = (ADSR) = B(ADSR) = (O_2QSR) : \text{cố định}$$

Điều này chứng tỏ E là điểm cố định. Chứng minh hoàn tất.

Bài toán 16 (Trần Quang Hùng). Cho tam giác ABC không cân. Đường tròn (O) đi qua B, C lần lượt cắt các đoạn BA, CA tại điểm thứ hai F, E . Đường tròn ngoại tiếp tam giác ABE cắt đường thẳng CF tại M, N sao cho M nằm giữa C và F . Đường tròn ngoại tiếp tam giác ACF cắt đường thẳng BE tại P, Q sao cho P nằm giữa B và E . Đường thẳng qua N vuông góc AN cắt BE tại R . Đường thẳng qua Q vuông góc AQ cắt CF tại S . SP giao NR tại U . RM giao QS tại V . Chứng minh rằng NQ, UV, RS đồng quy. $\triangle$



PHÂN TÍCH. Đây là một bài toán có quá nhiều yếu tố, nhưng ta hãy bình tĩnh xem xét. Xem xét trục đẳng phương, ta thấy không có tứ giác nội tiếp "đẹp" có đường tròn ngoại tiếp nào chứa các trục là NQ, UV hoặc RS . Tính toán bằng Ceva hay Menelaus đều có vẻ phức tạp. Ta còn một phương pháp nữa là dùng tỉ số kép, thông qua [Định lý 5](#), vì N, U, R thẳng hàng và Q, V, S thẳng hàng.

Gọi X là giao điểm của NR, QS và I là giao điểm của QR, NS . Ta cần chứng minh

$$\begin{aligned} (XNUR) &= (XQVS) \\ \Leftrightarrow S(XNUR) &= R(XQVS) \\ \Leftrightarrow (QIPR) &= (NIMS) \end{aligned}$$

(Ta chọn tâm chiếu là S, R vì UP, NM, XV đồng quy tại S và XN, QP, VM đồng quy tại R)

Từ hệ thức cuối cùng, ta thấy cần phải chứng minh NQ, PM, RS đồng quy. Để ý kĩ trong hình, ta sẽ thấy N, Q, M, P cùng thuộc đường tròn có A là tâm, vì:

$$\begin{aligned}\angle ANE &= \angle ABE = \angle ACF \Rightarrow \triangle ANE \sim \triangle ACN (g.g) \\ \Rightarrow \frac{AN}{AC} &= \frac{AE}{AN} \Rightarrow AN^2 = AE \cdot AC = |P_{A/(O)}|\end{aligned}$$

Tương tự: $AM^2 = AP^2 = AQ^2 = |P_{A/(O)}|$ nên $AM = AN = AP = AQ$.

Lại có $\angle XNA = \angle XQA = 90^\circ$ nên XN, XQ là tiếp tuyến tới (A) . Từ đây, việc chứng minh trở nên dễ dàng vì theo định lý Pascal cho (N, N, M, P, Q, Q) thì RS đi qua giao điểm của NQ và PM .

NHẬN XÉT. Có thể không cần dùng định lý Pascal mà ta có thể chứng minh trực tiếp bằng phép chiếu lên đường tròn như sau:

$$\begin{aligned}(XNUR) &= (XQVS) \\ \Leftrightarrow S(XNUR) &= R(XQVS) \\ \Leftrightarrow (QIPR) &= (NIMS) \\ \Leftrightarrow N(QIPR) &= Q(NIMS) \\ \Leftrightarrow (QMPN) &= (NPMQ) : \text{hiển nhiên đúng}\end{aligned}$$

Nếu lược bỏ yếu tố tam giác ABC và chỉ giữ lại các yếu tố trực tiếp liên quan đến (A) , ta có bài toán cốt lõi:

Bài toán 17. Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O) . BD cắt tiếp tuyến tại A ở F , AC cắt tiếp tuyến tại B ở G . FC cắt BG tại J , GD cắt AF tại I .
Chứng minh rằng AB, JI, FG đồng quy hoặc đôi một song song. $\triangle$

Chú ý rằng trong cả 2 bài toán trên, ta đều có 1 điểm chung là AB, DC, FG đồng quy. Nên nếu ta tiếp tục xóa đi đường tròn (O) , ta sẽ có bài toán đơn giản hơn rất nhiều:

Bài toán 18. Cho 6 điểm A, B, C, D, E, F sao cho AB, CD, EF đồng quy tại K và C, D thứ tự nằm trên BE, AF . ED cắt BF tại I , FC cắt AE tại J .
Chứng minh rằng I, J, K thẳng hàng. $\triangle$

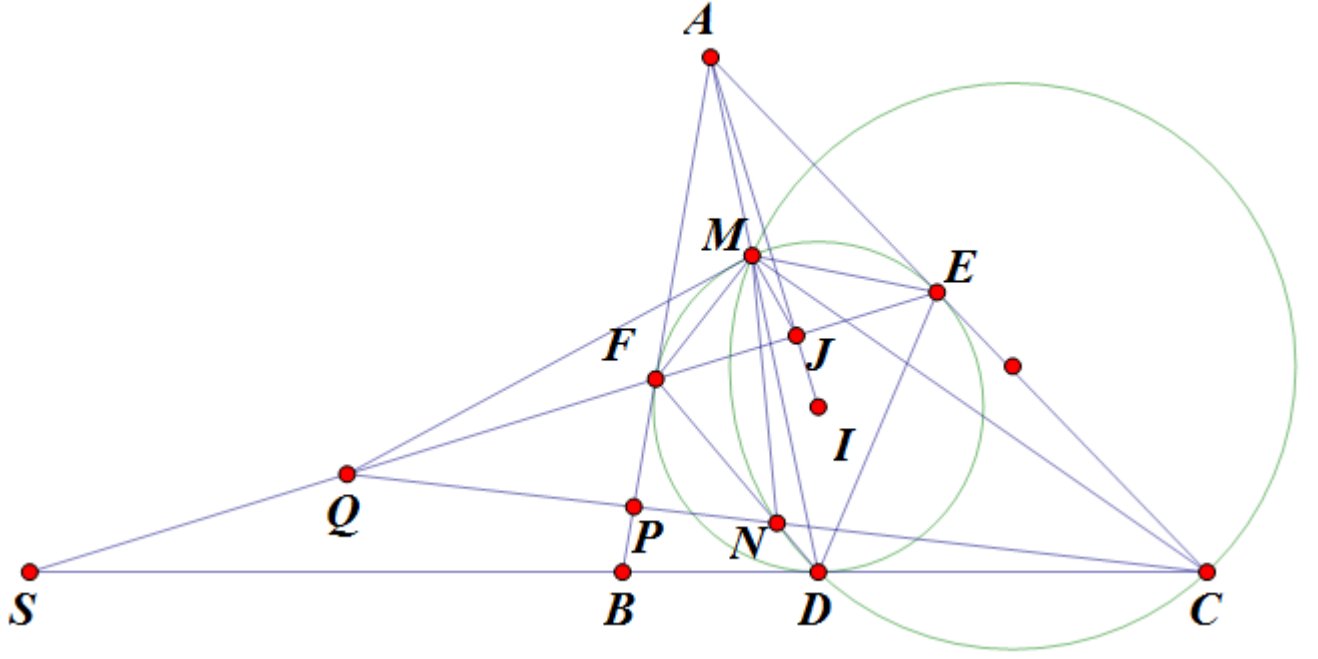
2 bài toán trên đều có thể giải tương tự [Bài toán 16](#). Mời bạn đọc thử sức để luyện tập!

Bài toán 19. Cho tam giác ABC với tiếp điểm của đường tròn nội tiếp (I) với BC, CA, AB lần lượt là D, E, F . AD cắt (I) tại M . Đường tròn ngoại tiếp tam giác MNC cắt FD tại N . CN cắt AB tại P .

Tính $\frac{PN}{NC}$

$\triangle$

PHÂN TÍCH. Ta sẽ cố gắng tính $\frac{PN}{NC}$ qua một tỉ số khác, cách đơn giản nhất là dựng một hàng điểm điều hoà có 3 điểm thành phần là P, N, C và một điểm “dễ sử dụng” còn lại. Đơn giản nhất ta sẽ lấy Q để có bộ $(QNPC) = -1$. Khi đó, ta lại thấy Q là giao điểm của PC với EF . Ngoài ra, ta còn nhận được nhiều tính chất khác chẳng hạn như QM tiếp xúc (I) ,... Ta có lời giải như sau:



LỜI GIẢI.

J là trung điểm của EF . S, Q là giao điểm của EF với BC, PC .

Chú ý rằng AD, BE, CF đồng quy nên theo [Định lý 6](#):

$$\begin{aligned}
 (SDBC) = -1 &\Rightarrow F(SDBC) = -1 \\
 &\Rightarrow (QNPC) = -1 \\
 &\Rightarrow \frac{\overline{NP}}{\overline{NC}} = -\frac{\overline{QP}}{\overline{QC}} \\
 &\Rightarrow \frac{\overline{NP}}{\overline{NC}} = \frac{\overline{NP} + \overline{PQ}}{\overline{NC} + \overline{QC}} = \frac{\overline{NQ}}{\overline{NC} + \overline{QC}} \quad (1)
 \end{aligned}$$

Mặt khác:

$$\angle MCQ = \angle MDN = \angle MEQ \text{ (do } FNDC \text{ và } FMED \text{ là tứ giác nội tiếp)} \quad (2)$$

Suy ra Q, M, E, C đồng viên.

$$\Rightarrow \angle MQC = \angle MEA = \angle MFE \quad (3)$$

Từ (2) và (3), ta có

$$\triangle MQC \sim \triangle MFE \Rightarrow \frac{QC}{EF} = \frac{MC}{ME} \quad (4)$$

Lại có do $MNDC$ là tứ giác nội tiếp, MJ là đường đối trung của $\triangle MFE$ nên

$$\angle NMC = \angle FDB = \angle FMD = \angle JME \quad (5)$$

$\Rightarrow QM$ là tiếp tuyến của (I) . Kết hợp với (2), (5) ta có

$$\triangle MNC \sim \triangle MJE \Rightarrow \frac{NC}{JE} = \frac{MC}{ME} \quad (6)$$

Từ (4) và (6), ta có:

$$\frac{QC}{EF} = \frac{NC}{JE} \Rightarrow \frac{QC}{NC} = \frac{EF}{EJ} = 2$$

Suy ra N là trung điểm QC . Kết hợp với (1), ta có $\frac{NP}{NC} = \frac{1}{3}$ ■

Lời nói cuối

Những bài toán được trình bày trên đây đều có thể giải bằng nhiều cách khác, nhưng chúng tôi đã cố gắng trình bày một lối đi tư duy dành cho tỉ số kép cho mỗi bài toán. Mỗi người học toán chúng ta nên đặt câu hỏi "*tại sao lại có điều đó?*", hơn là làm nhiều bài toán. Nếu có gì sai sót hay ý kiến, xin đóng góp về địa chỉ email: Suisseiseki_Desu@yahoo.com.

Tài liệu

- [1] Đoàn Quỳnh (chủ biên), *Tài liệu Chuyên toán Hình học 10*
- [2] Nguyễn Minh Hà, *Đường thẳng, đường tròn luôn đi qua điểm cố định*
- [3] Nguyễn Minh Hà, *Bài tập nâng cao và một số chuyên đề hình học 10*
- [4] Tạp chí Mathley
- [5] Nguyễn Hoàng Sơn, *E.R.I.Q lemma and applications*