

XẤP XỈ CÁC TỔNG PHẦN NGUYÊN

Hoàng Xuân Thanh

February 2024

Lời nói đầu

Những bài toán tính toán với tổng có chứa hàm phần nguyên thường mang đến ít nhiều sự bối rối đối với những người ít tiếp xúc với dạng bài như thế này. Việc tính toán không hẳn là khó nhưng sẽ rất "cồng kềnh" nếu như bạn không biết đến những kỹ thuật xử lý chúng. Bài viết này sẽ phần nào đề cập tới một vài kỹ thuật như vậy. Qua đó bạn sẽ cảm thấy kết quả của bài toán không còn là thứ "từ trên trời rơi xuống" nữa, hay cảm thấy những tổng chứa hàm phần nguyên không đáng sợ như tưởng tượng. Kỹ thuật tách, gộp các công thức chứa hàm phần nguyên không mang lại giá trị gì đối với kết quả của bài toán nhưng về mặt thuật toán thì có ý nghĩa rất lớn. Bạn cứ thử tưởng tượng xem: Một bài toán cho ra kết quả là 20 công thức khác nhau tương ứng với 20 trường hợp, nếu sử dụng hàm phần nguyên bạn có thể quy tất cả 20 trường hợp về một công thức duy nhất, điều đó thật tuyệt vời phải không?

Nội dung bài viết này không phải là một chuyên đề, vì khả năng áp dụng rất hạn chế, có rất ít bài toán và ví dụ minh họa. Thực chất chỉ có thể coi như một cuốn sổ ghi chép của tác giả. Tuy vậy tác giả sẽ cố gắng sưu tầm và update thêm một số bài toán. Rất mong bạn đọc thông cảm và cân nhắc trước khi đọc.

Chúng ta sẽ bắt đầu chủ đề này với các bài toán tổ hợp liên quan tới các phương trình nghiệm nguyên không âm.

hxthanh

Chương 1

Phương trình nghiệm nguyên và Hàm sinh

1.1 Mở đầu

Trong một số bài toán đếm tổ hợp, để đếm số nghiệm nguyên không âm của phương trình: $x + ay + bz = n$, với a, b là các số nguyên dương cho trước. Ta có hàm sinh:

$$f(x) = \frac{1}{(1-x)(1-x^a)(1-x^b)} = \sum_{n=0}^{\infty} F(1, b, c; n)x^n \quad (1.1.1)$$

và

$$g(x) = \frac{1}{(1-x)(1-x^a)(1-x^b)(1-x^c)} = \sum_{n=0}^{\infty} F(1, a, b, c; n)x^n \quad (1.1.2)$$

đối với phương trình $x + ay + bz + ct = n$. Bài toán đặt ra là tìm cách biểu diễn được cụ thể các giá trị $F(1, a, b; n)$ và $F(1, a, b, c; n)$.

1.2 Hệ thức truy hồi

Gọi S_n là số nghiệm nguyên không âm của phương trình: $x + ay + bz = n$. Khi đó ta có biểu thức truy hồi sau:

$$S_n = S_{n-1} + S_{n-a} + S_{n-b} - S_{n-a-1} - S_{n-b-1} + S_{n-a-b} - S_{n-a-b-1} \quad (1.2.1)$$

Có được điều này là dựa vào:

$$[x^n] \frac{1}{(1-x)(1-x^a)(1-x^b)} = [x^n] \frac{1}{1 - (x + x^a + x^b - x^{a+1} - x^{b+1} + x^{a+b} - x^{a+b+1})}$$

Tương tự như vậy, đối với phương trình $x + ay + bz + ct = n$

$$\begin{aligned} S_n = & S_{n-1} + S_{n-a} + S_{n-b} + S_{n-c} - S_{n-a-1} - S_{n-b-1} - S_{n-c-1} + S_{n-a-b} + S_{n-a-c} \\ & + S_{n-b-c} - S_{n-a-b-1} - S_{n-a-c-1} - S_{n-b-c-1} + S_{n-a-b-c} - S_{n-a-b-c-1} \end{aligned} \quad (1.2.2)$$

1.3 Biểu diễn nghiệm bài toán bằng hàm phần nguyên

Ký hiệu $\|\{\dots\}\|$ để chỉ số nghiệm nguyên không âm của $\{\dots\}$. Ta có bổ đề sau đây:

Bổ đề 1.3.1 (sum2floor) Cho các số nguyên dương a, b thoả mãn $\gcd(a, b) = 1$ Gọi S_n là số nghiệm nguyên không âm của phương trình $x + ay + bz = n$ (x, y, z là ẩn)

Khi đó ta có: $S_n = G(n) - G(r) + S_r$

Trong đó:
$$\begin{cases} G(n) = \frac{n^2 + n(a+b+1)}{2ab} \\ r = n - ab \left\lfloor \frac{n}{ab} \right\rfloor \end{cases}$$

Chứng minh:

Xét phương trình $x + ay + bz = n$

$$\text{Ta có: } \begin{cases} 0 \leq ay \leq n \\ 0 \leq bz \leq n - ay \\ x = n - ay - bz \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 \leq y \leq \left\lfloor \frac{n}{a} \right\rfloor \\ 0 \leq z \leq \left\lfloor \frac{n - ay}{b} \right\rfloor \\ x = n - ay - bz \end{cases}$$

Do đó:

$$S_n = \sum_{y=0}^{\left\lfloor \frac{n}{a} \right\rfloor} \sum_{z=0}^{\left\lfloor \frac{n-ay}{b} \right\rfloor} 1 = \sum_{y=0}^{\left\lfloor \frac{n}{a} \right\rfloor} \left\lfloor \frac{n + b - ay}{b} \right\rfloor \quad (1.3.1)$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} n = abm + r \\ 0 \leq r \leq ab - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{n-r}{ab} \\ r = n - ab \left\lfloor \frac{n}{ab} \right\rfloor \end{cases} \Rightarrow \left\lfloor \frac{n}{a} \right\rfloor = bm + \left\lfloor \frac{r}{a} \right\rfloor$$

Chia đoạn lấy tổng trong (1.3.1) bằng cách đặt:

$$\begin{cases} y = bp + q \\ 0 \leq p \leq m-1 \\ 0 \leq q \leq b-1 \end{cases} \Rightarrow \max y = bm - 1$$

$$\text{Còn thiếu đoạn } \begin{cases} y = bm + t \\ 0 \leq t \leq \left\lfloor \frac{r}{a} \right\rfloor \end{cases}$$

Như vậy tổng (1.3.1) viết lại thành:

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{p=0}^{m-1} \sum_{q=0}^{b-1} \left\lfloor \frac{abm + r + b - a(bp + q)}{b} \right\rfloor \\ &\quad + \sum_{t=0}^{\left\lfloor \frac{r}{a} \right\rfloor} \left\lfloor \frac{abm + r + b - a(bm + t)}{b} \right\rfloor \\ &= \sum_{p=0}^{m-1} \sum_{q=0}^{b-1} \left(am + 1 - ap - a + \left\lfloor \frac{r + ab - aq}{b} \right\rfloor \right) \\ &\quad + \sum_{t=0}^{\left\lfloor \frac{r}{a} \right\rfloor} \left\lfloor \frac{r + b - at}{b} \right\rfloor \\ &= \sum_{p=0}^{m-1} \left(b(am + 1 - a - ap) + \underbrace{\sum_{q=0}^{b-1} \left\lfloor \frac{r + ab - aq}{b} \right\rfloor}_{(=F)} \right) + S_r \end{aligned} \tag{1.3.2}$$

Xét tổng

$$\begin{aligned}
 F &= \sum_{q=0}^{b-1} \left\lfloor \frac{r+ab-aq}{b} \right\rfloor \\
 &= \sum_{q=0}^{b-1} \left\lfloor \frac{r+a+aq}{b} \right\rfloor \quad (\text{reverse index}) \\
 &= \sum_{q=0}^{b-1} \left(\frac{r+a+aq}{b} - \frac{(r+a+aq) \bmod b}{b} \right)
 \end{aligned}$$

Vì $\gcd(a, b) = 1$ nên khi q chạy qua hệ thặng dư đầy đủ modulo b , $q \in \{0, \dots, b-1\}$ thì $(r+a+aq)$ cũng chạy qua đầy đủ số dư khi chia cho b . Do đó:

$$\begin{aligned}
 F &= -\frac{b(b-1)}{2b} + \sum_{q=0}^{b-1} \frac{r+a+aq}{b} \\
 &= -\frac{b-1}{2} + r+a + \frac{a}{b} \cdot \frac{b(b-1)}{2} \\
 &= r + \frac{a-b+ab+1}{2}
 \end{aligned}$$

Thay vào (1.3.2) ta có:

$$\begin{aligned}
 S_n &= \sum_{p=0}^{m-1} \left(\frac{2n+a+b+1-ab}{2} - abp \right) + S_r \\
 &= \frac{m(2n+a+b+1-ab)}{2} - \frac{abm(m-1)}{2} + S_r \\
 &= \frac{n-r}{ab} \cdot \frac{2n+a+b+1-ab}{2} - \frac{(n-r)(n-r-ab)}{2ab} + S_r \\
 &= \frac{(n-r)(n+a+b+1+r)}{2ab} + S_r \\
 &= \frac{n^2+n(a+b+1)}{2ab} - \frac{r^2+r(a+b+1)}{2ab} + S_r \quad (\text{đpcm})
 \end{aligned}$$

□

Bổ đề 1.3.2 Với các số nguyên dương n, a, b trong đó $\gcd(a, b) = d$. Ta có đẳng thức sau

$$\sum_{k=0}^{b-1} \left\lfloor \frac{n+ak}{b} \right\rfloor = \frac{(a-1)(b-1) + (d-1)}{2} + d \left\lfloor \frac{n}{d} \right\rfloor \quad (1.3.3)$$

Chúng minh: Đặt
$$\begin{cases} a = a'd \\ b = b'd \\ n = md + r \\ 0 \leq r \leq d-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \gcd(a', b') = 1 \\ m = d \left\lfloor \frac{n}{d} \right\rfloor \end{cases}$$

Chia đoạn lấy tổng bằng cách đặt:

$$\begin{cases} k = b'p + q \\ 0 \leq p \leq d-1 \\ 0 \leq q \leq b'-1 \end{cases} \Rightarrow \max k = b'd - 1 = b - 1 \quad (\text{full index})$$

Tổng trên được viết lại là:

$$\begin{aligned} & \sum_{p=0}^{d-1} \sum_{q=0}^{b'-1} \left\lfloor \frac{md + r + a'd(b'p + q)}{b'd} \right\rfloor \\ &= \sum_{p=0}^{d-1} \sum_{q=0}^{b'-1} \left\lfloor a'p + \frac{r}{b'd} + \frac{m + a'q}{b'd} \right\rfloor \\ &= \sum_{p=0}^{d-1} \left(a'b'p + \underbrace{\sum_{q=0}^{b'-1} \left\lfloor \frac{m + a'q}{b'} \right\rfloor}_{=F} \right) \quad \left(\text{vì } \frac{r}{b'd} < \frac{1}{d} \right) \end{aligned} \quad (1.3.4)$$

Xét tổng

$$\begin{aligned} F &= \sum_{q=0}^{b'-1} \left\lfloor \frac{m+a'q}{b'} \right\rfloor \\ &= \sum_{q=0}^{b'-1} \frac{m+a'q}{b'} - \sum_{q=0}^{b'-1} \frac{(m+a'q) \bmod b'}{b'} \end{aligned}$$

Vì $\gcd(a', b') = 1$ nên khi q chạy qua hệ thặng dư đầy đủ modulo b' thì $(m+a'q)$ cũng chạy qua tất cả số dư khi chia cho b' . Do đó: $F = \frac{mb'}{b} + \frac{a'}{b'} \cdot \frac{b'(b'-1)}{2} - \frac{b'(b'-1)}{2b'}$ $= m + \frac{(a'-1)(b'-1)}{2}$ Thay vào (1.3.4) ta có tổng cần tìm:

$$\begin{aligned} &= \sum_{p=0}^{d-1} \left(a'b'p + m + \frac{(a'-1)(b'-1)}{2} \right) \\ &= \frac{a'b'd(d-1)}{2} + md + \frac{d(a'-1)(b'-1)}{2} \\ &= \frac{(a-1)(b-1) + (d-1)}{2} + d \left\lfloor \frac{n}{d} \right\rfloor \end{aligned}$$

□

Từ kết quả của Bổ đề 1.3.2 khái quát hoá Bổ đề 1.3.1 với các số nguyên dương a, b bất kỳ, ta có:

Bổ đề 1.3.3 (sum2dfloor) Cho các số nguyên dương a, b thoả mãn $\gcd(a, b) = d$ Gọi S_n là số nghiệm nguyên không âm của phương trình $x + ay + bz = n$ (x, y, z là ẩn)

Khi đó ta có: $S_n = G(n) - G(r) + S_r$

Trong đó:

$$\begin{cases} G(n) = \frac{n^2 + n(a+b+d-2(n \bmod d))}{2ab} \\ r = n - ab \left\lfloor \frac{n}{ab} \right\rfloor \end{cases}$$

Gọi giá trị lớn nhất của $S_r - \lfloor G(r) + 1 \rfloor$ (trên đoạn $0 \leq r \leq ab - 1$) là $\Delta(a, b)$. Bảng sau đây nói lên những thông tin về sai số $\Delta(a, b)$ này:

$\Delta(a, b) =$	0	1	2	3	4	...
$a = 1; b =$	1..3	4..11	12..19	20..27	28..35	...
$a = 2; b =$	1..6	7..22	23..38	39..54	55..70	...
$a = 3; b =$	1..7	8..31	32..55	56..79	80..103	...
$a = 4; b =$	2,3,4,6	1,5,7..38	39..70	71..102	103..134	...
$a = 5; b =$	2,3	1,4..43	44..83	84..123	124..163	...
...	...	...	...	...	...	...

Bảng 1.1: Sai số lớn nhất với các quãng 8a

Ta sẽ làm rõ điều này bằng một số ví dụ sau đây.

Ví dụ 1.3.1 Đếm số nghiệm nguyên không âm của phương trình:

$$x + y + 3z = n$$

Từ đây trở về sau ta sẽ dùng ký hiệu $\|1, a, b; n\|$ để chỉ số nghiệm nguyên không âm của phương trình

$$x_1 + ax_2 + bx_3 = n$$

Lời giải:

Theo bổ đề 1.3.3, ta có:

$$\|1, 1, 3; n\| = \frac{n^2 + 5n}{6} - \frac{r^2 + 5r}{6} + S_r$$

với $0 \leq r \leq 2$ Lập bảng sau:

n	0	1	2	3	4	5
S_n	1	2	3	5	7	9
$G(n)$	0	1	$\frac{7}{3}$	4	6	$\frac{25}{3}$
$S_n - \lfloor G(n) + 1 \rfloor$	0	0	0	0	0	0

Bảng 1.2: Biến thiên sai số của $\|1, 1, 3; n\|$

Trên thực tế ta chỉ cần xét các trường hợp trong đoạn số dư $0 \leq r \leq 2$ là đủ!

Vậy ta có:

$$\|1, 1, 3; n\| = \left\lfloor \frac{n^2 + 5n}{6} + 1 \right\rfloor = \left\lfloor \frac{(n+2)(n+3)}{6} \right\rfloor$$

A001840(n+1) □

Ví dụ 1.3.2 Đếm số nghiệm nguyên không âm của phương trình:

$$x + 2y + 3z = n$$

Lời giải:

Theo bổ đề 1.3.3, ta có:

$$\|1, 2, 3; n\| = \frac{n^2 + 6n}{12} - \frac{r^2 + 6r}{6} + S_r$$

với $0 \leq r \leq 5$ Lập bảng sau:

r	0	1	2	3	4	5
S_r	1	1	2	3	4	5
$G(r)$	0	$\frac{7}{12}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{9}{4}$	$\frac{10}{3}$	$\frac{55}{12}$
$S_r - \lfloor G(r) + 1 \rfloor$	0	0	0	0	0	0

Bảng 1.3: Biến thiên sai số của $\|1, 2, 3; n\|$

Vậy ta có:

$$\|1, 2, 3; n\| = \left\lfloor \frac{n^2 + 6n}{12} + 1 \right\rfloor = \left\lfloor \frac{(n+3)^2 + 3}{12} \right\rfloor \quad (1.3.5)$$

A001399 □

Ví dụ 1.3.3 Tính $\|1, 4, 5; n\|$ (A025772)

Lời giải:

Theo bổ đề 1.3.3, ta có:

$$\|1, 4, 5; n\| = \frac{n^2 + 10n}{40} - \frac{r^2 + 10r}{40} + S_r$$

với $0 \leq r \leq 19$ Lập bảng sau:

r	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
S_r	1	1	1	1	2	3	3	3	4	5
$G(r)$	0	$\frac{11}{40}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{39}{40}$	$\frac{7}{5}$	$\frac{15}{8}$	$\frac{12}{5}$	$\frac{119}{40}$	$\frac{18}{5}$	$\frac{171}{40}$
$S_r - \lfloor G(r) + 1 \rfloor$	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
r	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
S_r	6	6	7	8	9	10	11	12	13	14
$G(r)$	5	$\frac{231}{40}$	$\frac{33}{5}$	$\frac{299}{40}$	$\frac{42}{5}$	$\frac{75}{8}$	$\frac{52}{5}$	$\frac{459}{40}$	$\frac{63}{5}$	$\frac{551}{40}$
$S_r - \lfloor G(r) + 1 \rfloor$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Bảng 1.4: Sự biến thiên của sai số $\|1, 4, 5; n\|$

Ta thấy rằng ngoại trừ $r = 5$ ($n \equiv 5 \pmod{20}$) thì $S_r - \lfloor G(r) + 1 \rfloor = 0$.

Nếu ta lấy $S_n = \|1, 4, 5; n\| = \left\lfloor \frac{n^2 + 10n}{40} + 1 \right\rfloor$ thì S_5 sẽ bị thiếu 1. Nói cách khác $r = 5$ chính là 1-điểm duy nhất trong bảng này.

Xử lý riêng một điểm này bằng cách ta thêm vào một lượng $\left\lfloor \frac{n+5}{20} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n+4}{20} \right\rfloor$

Kết quả là:

$$\|1, 4, 5; n\| = \left\lfloor \frac{n^2 + 10n + 40}{40} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n+5}{20} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n+4}{20} \right\rfloor$$

Một số trường hợp ta có thể thêm một lượng cố định chẳng hạn $\frac{5}{40}$ vào biểu thức trong dấu phần nguyên để đẳng thức đúng. Nhưng trong trường hợp này thì không thể vì $G(5)$ và $G(7)$ chỉ có thể bớt. Mặc dù vậy, nếu là đại lượng biến thiên theo modul thì có thể.

Ví dụ như: $5(n+5 \pmod{4}) - 5(n \pmod{4})$ Khi đó:

$$\|1, 4, 5; n\| = \left\lfloor \frac{n^2 + 10n + 40 + 5(n+1 \pmod{4}) - 5(n \pmod{4})}{40} \right\rfloor$$

Qua các ví dụ trên và căn cứ vào bảng 1.1 ta thấy được những hạn chế qua cách tính này. Ta chỉ có thể xử lý bài toán với sai số tối đa trong phạm vi ...1, nếu sai số lớn hơn thì ... quên đi! Đơn giản, chỉ cần một trong hai số a, b lớn hơn 4 ta sẽ gặp rắc rối. Tuy nhiên có một điều (cần chứng minh) là:

Nếu a, b có ước số chung là d thì $\Delta(a, b) = \Delta\left(\frac{a}{d}, \frac{b}{d}\right)$

Xây dựng một cách tương tự cho $\|1, a, b, c; n\|$ ta có bổ đề sau:

Bổ đề 1.3.4 (sum3floor) Cho các số nguyên dương a, b, c thoả mãn

$\gcd(a, b) = \gcd(a, c) = \gcd(b, c) = 1$. Gọi S_n là số nghiệm nguyên không âm của phương trình

$$x + ay + bz + ct = n \quad (x, y, z, t \text{ là } \hat{n})$$

Khi đó ta có: $S_n = G(n) - G(r) + S_r$

Trong đó:

$$\begin{cases} G(n) = \frac{2n^3 + 3n^2(a+b+c+1) + n(a^2+b^2+c^2+1) + 3(a+b+c+ab+ac+bc)}{12abc} \\ r = n - abc \left\lfloor \frac{n}{abc} \right\rfloor \end{cases}$$

Nếu chỉ hai trong ba số a, b, c có ước chung là d , ta có mở rộng sau:

Bổ đề 1.3.5 (sum3dfloor) Cho các số nguyên dương a, b, c thoả mãn

$\gcd(a, b) = d; \gcd(a, c) = \gcd(b, c) = 1$. Gọi S_n là số nghiệm nguyên không âm của phương trình

$$x + ay + bz + ct = n \quad (x, y, z, t \text{ là } \hat{n})$$

Khi đó ta có: $S_n = G(n) - G(r) + S_r$

Trong đó:

$$\begin{cases} G(n) = \frac{2n^3 + 3n^2(a+b+c+1) + n(a^2+b^2+c^2+1) + 3(a+b+c+ab+ac+bc)}{12abc} \\ \quad + \frac{c(d+1)n(n+c \bmod d) - c(d+1)n(n \bmod d)}{12abc} \\ r = n - abc \left\lfloor \frac{n}{abc} \right\rfloor \end{cases}$$

Trong trường hợp cả ba số a, b, c đều có ước chung là d thì bài toán trở nên rất phức tạp, nếu xét một cách tổng quát. Tuy nhiên khi đó bằng cách chia nhỏ các trường hợp ta vẫn có thể đưa bài toán trở về hai dạng trên. Hai bổ đề này tác giả không chứng minh vì phần tính toán với tổng rất dài và nhàm

chán! Bên cạnh đó kết quả sai số cũng chịu chi phối tương tự như 1.1. Sai số biến thiên thế nào thì còn cần bạn đọc tìm hiểu giúp. Mình xin khép lại mấy thứ vớ vẩn này tại đây với một vài hệ quả tìm được.

$$\|1, 1, 1, a; n\| = \left\lfloor \frac{(n+2)(n+a+2)(2n+a+1)}{12a} \right\rfloor, \quad 1 \leq a \leq 5 \quad (1.3.6)$$

$$(A001400) \quad \|1, 2, 3, 4; n\| = \left\lfloor \frac{2n^3 + 30n^2 + 135n + 9n(-1)^n + 288}{288} \right\rfloor \quad (1.3.7)$$

$$(A000601) \quad \|1, 1, 2, 3; n\| = \left\lfloor \frac{(n+6)(2n^2 + 9n + 12)}{72} \right\rfloor \quad (1.3.8)$$

$$(A266769) \quad \|1, 2, 2, 3; n\| = \left\lfloor \frac{2n^3 + 24n^2 + 87n + 9n(-1)^n + 144}{144} \right\rfloor \quad (1.3.9)$$

$$(A028289) \quad \|1, 2, 3, 3; n\| = \left\lfloor \frac{2n^3 + 27n^2 + 110n + 8n(n+2 \bmod 3) - 8n(n \bmod 3) + 216}{216} \right\rfloor \quad (1.3.10)$$

$$(A008804) \quad \|1, 1, 2, 4; n\| = \left\lfloor \frac{2n^3 + 24n^2 + 85n + 3n(-1)^n + 96}{96} \right\rfloor \quad (1.3.11)$$

$$(A001304) \quad \|1, 1, 2, 5; n\| = \left\lfloor \frac{2n^3 + 27n^2 + 106n + 144}{120} \right\rfloor \quad (1.3.12)$$

$$\text{abs}(A128498) \quad \|1, 2, 2, 4; n\| = \left\lfloor \frac{(2n+5+(-1)^n)(2n+7+(-1)^n)(2n+15+(-1)^n)}{768} \right\rfloor \quad (1.3.13)$$

$$(A029007) \quad \|1, 2, 4, 5; n\| = \left\lfloor \frac{2n^3 + 36n^2 + 193n + 15n(-1)^n + 480}{480} \right\rfloor \quad (1.3.14)$$

$$(A008673) \quad \|1, 3, 5, 7; n\| = \left\lfloor \frac{n^3 + 24n^2 + 171n + 630}{630} \right\rfloor \quad (1.3.15)$$

$$\|1, 2, 3, 6; n\| = \left\lfloor \frac{2n^3 + 36n^2 + 191n + 8n(n+2 \bmod 3) - 8n(n \bmod 3) + 9n(-1)^n + 432}{432} \right\rfloor$$

(A029000)

(1.3.16)

$$(A029032) \quad \|1, 3, 4, 5; n\| = \left\lfloor \frac{2n^3 + 39n^2 + 228n + 720}{720} \right\rfloor \quad (1.3.17)$$

$$(A029064) \quad \|1, 4, 5, 7; n\| = \left\lfloor \frac{2n^3 + 51n^2 + 388n + 1680}{1680} \right\rfloor \quad (1.3.18)$$

$$\|1, 4, 4, 5; n\| = \left\lfloor \frac{2n^3 + 42n^2 + 265n + 30(n+3)[((n+3) \bmod 4) - (n \bmod 4)] - 15n(-1)^n + 960}{960} \right\rfloor \quad (1.3.19)$$

Sở dĩ (1.3.19) lại "bất quy tắc" như trên là bởi vì **sai số cực tiểu** trong trường hợp này là -1 thay vì 0 như "mặc định". Thật ngạc nhiên là dãy này cũng không xuất hiện trong oeis.org. Về phần tại sao lại xuất hiện sai số âm, sai số âm bao nhiêu? biến thiên như thế nào? đó là những vấn đề chúng ta cần nghiên cứu :(. Hy vọng nhận được sự đóng góp từ phía độc giả.

<https://diendantoanhoc.org>
hxthanh

Chương 2

Xấp xỉ các tổng phần nguyên

Trong phần này ta sẽ làm quen với cách tính các tổng chứa phần nguyên cơ bản.

Bài toán 3.1

Với m là số nguyên dương, Tính tổng:

$$S_n = \sum_{k=0}^n \left\lfloor \frac{k}{m} \right\rfloor \quad (2.0.1)$$

Đặt $k = mp + q$ với $0 \leq q \leq m-1$

Như vậy thì $0 \leq p \leq \left\lfloor \frac{n-q}{m} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{n}{m} \right\rfloor - 1$ Với cách đặt đó thì $\max(k) = m \left(\left\lfloor \frac{n}{m} \right\rfloor - 1 \right) + m - 1 = m \left\lfloor \frac{n}{m} \right\rfloor - 1$

vẫn còn thiếu đoạn $m \left\lfloor \frac{n}{m} \right\rfloor \leq k \leq n$

Do đó vế trái của (2.0.1) sẽ được viết thành

$$\begin{aligned} &= \sum_{p=0}^{\left\lfloor \frac{n}{m} \right\rfloor - 1} \sum_{q=0}^{m-1} \left\lfloor \frac{mp+q}{m} \right\rfloor + \sum_{k=m \left\lfloor \frac{n}{m} \right\rfloor}^n \left\lfloor \frac{k}{m} \right\rfloor \\ &= \sum_{p=0}^{\left\lfloor \frac{n}{m} \right\rfloor - 1} mp + \left(n+1 - m \left\lfloor \frac{n}{m} \right\rfloor \right) \left\lfloor \frac{n}{m} \right\rfloor \\ &= \frac{m}{2} \left(\left\lfloor \frac{n}{m} \right\rfloor - 1 \right) \left\lfloor \frac{n}{m} \right\rfloor + \left(n+1 - m \left\lfloor \frac{n}{m} \right\rfloor \right) \left\lfloor \frac{n}{m} \right\rfloor \\ &= \left\lfloor \frac{n}{m} \right\rfloor \left(n+1 - \frac{m}{2} - \frac{m}{2} \left\lfloor \frac{n}{m} \right\rfloor \right) \end{aligned}$$

Bây giờ để ý rằng nếu viết $n = m \left\lfloor \frac{n}{m} \right\rfloor + r \equiv r \pmod{m}$ thì $\left\lfloor \frac{n}{m} \right\rfloor = \frac{n-r}{m}$. Thay vào vế phải của (2.0.1) thì ta được:

$$\sum_{k=0}^n \left\lfloor \frac{k}{m} \right\rfloor = \frac{n^2 - (m-2)n + (m-2)r - r^2}{2m} \quad (2.0.2)$$

Biểu thức này có dạng $G(n) - G(r)$. Như vậy ta chỉ cần xét các trường hợp $0 \leq r \leq m-1$ để đưa ra biểu thức gộp chung hoặc viết được chính xác luôn với $r = (n \bmod m)$

Ví dụ 2.0.1

$$\sum_{k=0}^n \left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor = \frac{n^2 - (n \bmod 2)^2}{4} = \frac{n^2 + \{0, -1\}}{4} = \left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor$$

Ví dụ 2.0.2

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n \left\lfloor \frac{k}{3} \right\rfloor &= \frac{n^2 - n + (n \bmod 3) - (n \bmod 3)^2}{6} = \frac{n^2 - n + \{0, 1, 2\} + \{0, -1, -4\}}{6} \\ &= \frac{n^2 - n + \{0, 0, -2\}}{6} = \left\lfloor \frac{n(n-1)}{6} \right\rfloor \end{aligned}$$

Ví dụ 2.0.3

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n \left\lfloor \frac{k}{4} \right\rfloor &= \frac{n^2 - 2n + 2(n \bmod 4) - (n \bmod 4)^2}{8} = \frac{n^2 - 2n + \{0, 2, 4, 6\} + \{0, -1, -4, -9\}}{8} \\ &= \frac{n^2 - 2n + \{0, 1, 0, -3\}}{8} = \left\lfloor \frac{(n-1)^2}{8} \right\rfloor \end{aligned}$$

Ví dụ 2.0.4

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n \left\lfloor \frac{k}{5} \right\rfloor &= \frac{n^2 - 3n + 3(n \bmod 5) - (n \bmod 5)^2}{10} \\ &= \frac{n^2 - 3n + \{0, 3, 6, 9, 12\} + \{0, -1, -4, -9, -16\}}{10} \\ &= \frac{n^2 - 3n + \{0, 2, 2, 0, -4\}}{10} = \left\lfloor \frac{(n-1)(n-2)}{10} \right\rfloor \end{aligned}$$

Bài toán 3.2

Với m là số nguyên dương, Tính tổng:

$$S_n = \sum_{k=0}^n \left\lfloor \frac{k^2}{m} \right\rfloor \quad (2.0.3)$$

Gọi $r = n - m \left\lfloor \frac{n}{m} \right\rfloor$ Đặt $k = mp + q$ với $(0 \leq q \leq m-1)$ Thế thì:

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{p=0}^{\frac{n-m-r}{m}} \sum_{q=0}^{m-1} \left(mp^2 + 2pq + \left\lfloor \frac{q^2}{m} \right\rfloor \right) + \sum_{j=0}^r \left(\frac{(n-r)^2}{m} + \frac{2(n-r)}{m}j + \left\lfloor \frac{j^2}{m} \right\rfloor \right) \\ &= \frac{(n-m-r)(n-r)(2n-m-2r)}{6m} + \frac{(m-1)(n-m-r)(n-r)}{2m} \\ &\quad + \frac{(r+1)(n-r)^2}{m} + \frac{r(r+1)(n-r)}{m} + \frac{n-r}{m} \sum_{q=0}^{m-1} \left\lfloor \frac{q^2}{m} \right\rfloor + \sum_{j=0}^r \left\lfloor \frac{j^2}{m} \right\rfloor \end{aligned} \quad (2.0.4)$$

$$= \frac{2n^3 + 3n^2 - (2m^2 - 3m)n}{6m} - \frac{2r^3 + 3r^2 - (2m^2 - 3m)r}{6m} + \frac{n-r}{m} \sum_{j=0}^{m-1} \left\lfloor \frac{j^2}{m} \right\rfloor + S_r \quad (2.0.5)$$

Cho $m = 2, \dots, 9$ ta có được các kết quả sau:

$$\sum_{k=0}^n \left\lfloor \frac{k^2}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{2n^3 + 3n^2 - 2n}{12} \right\rfloor \quad (2.0.6)$$

$$\sum_{k=0}^n \left\lfloor \frac{k^2}{3} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{2n^3 + 3n^2 - 3n}{18} \right\rfloor \quad (2.0.7)$$

$$\sum_{k=0}^n \left\lfloor \frac{k^2}{4} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{2n^3 + 3n^2 - 2n}{24} \right\rfloor \quad (2.0.8)$$

$$\sum_{k=0}^n \left\lfloor \frac{k^2}{5} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{2n^3 + 3n^2 - 11n + 6}{30} \right\rfloor \quad (2.0.9)$$

$$\sum_{k=0}^n \left\lfloor \frac{k^2}{6} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{2n^3 + 3n^2 - 12n + 7}{36} \right\rfloor \quad (2.0.10)$$

$$\sum_{k=0}^n \left\lfloor \frac{k^2}{7} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{2n^3 + 3n^2 - 11n + 6}{42} \right\rfloor \quad (2.0.11)$$

$$\sum_{k=0}^n \left\lfloor \frac{k^2}{8} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{2n^3 + 3n^2 - 8n + 3}{48} \right\rfloor \quad (2.0.12)$$

$$\sum_{k=0}^n \left\lfloor \frac{k^2}{9} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{2n^3 + 3n^2 - 15n + 18}{54} \right\rfloor \quad (2.0.13)$$

Ví dụ 2.0.5 *Tính*

$$S_n = \sum_{k=0}^n \left\lfloor \frac{k^2}{10} \right\rfloor$$

Thay $m = 10$ vào (2.0.5) ta có:

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=0}^n \left\lfloor \frac{k^2}{10} \right\rfloor = \frac{2n^3 + 3n^2 - 26n}{60} \\ &\quad + \frac{\{0, 21, 24, -3, -12, -15, -24, -51, -48, -27\}}{60} \\ &= \left\lfloor \frac{2n^3 + 3n^2 - 26n + 24}{60} \right\rfloor - \{0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 0\} \\ &= \left\lfloor \frac{2n^3 + 3n^2 - 26n + 24}{60} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n+1}{10} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n+3}{10} \right\rfloor \end{aligned}$$

Để kết thúc bài viết này, tác giả đề xuất bài toán mở sau:

Bài toán 3.3

Chứng minh rằng tồn tại $0 \leq \alpha(r) < 1$ để

$$\sum_{k=0}^n \left\lfloor \frac{k}{r} \right\rfloor \sim \left\lfloor \frac{n^2 + (1-r)n}{2r} + \alpha(r) \right\rfloor \quad (2.0.14)$$

Trong đó: $r > 0, r \notin \mathbb{Q}^+$

Xấp xỉ " $\sim$ " với ý nghĩa sai số không quá ± 1

Trong (2.0.14) nếu cho $r = \varphi = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ và $\alpha(r) = \frac{1}{2\varphi}$, ta có được xấp xỉ “vô cùng chuẩn” sau:

$$\sum_{k=0}^n \left\lfloor \frac{k}{\varphi} \right\rfloor \sim \left\lfloor \frac{n^2 + 1}{2\varphi} - \frac{n}{2\varphi^2} \right\rfloor \quad (2.0.15)$$

Chương 3

Một số bài toán áp dụng

Bài toán 1 Anh Tài mang 200 đồng vào ngân hàng đổi tiền lẻ, biết ngân hàng có các đồng mệnh giá nhỏ là 1, 5, 10, 25 đồng. Hỏi có bao nhiêu cách đổi tiền cho anh Tài?

Lời giải:

Gọi số đồng mệnh giá 1, 5, 10, 25 mà anh Tài nhận được khi đổi tiền theo thứ tự là x_1, x_2, x_3, x_4 .

Ta có phương trình nghiệm nguyên không âm:

$$x_1 + 5x_2 + 10x_3 + 25x_4 = 200$$

$\|1, 5, 10, 25; 200\|$ theo 1.1 sẽ có sai số khá lớn.

Tuy nhiên, vì 5, 10, 25 đều là bội của 5 nên $x_1 \equiv 200 \equiv 0 \pmod{5}$

Đặt $x_1 = 5y$ ta có $y + x_2 + 2x_3 + 5x_4 = 40$

Theo (1.3.12) ta có

$$\begin{aligned}\|1, 1, 2, 5; n\| &= \left\lfloor \frac{(n+8)(2n^2+11n+18)}{120} \right\rfloor \\ \|1, 1, 2, 5; 40\| &= \left\lfloor \frac{48 \times (2 \times 40^2 + 11 \times 40 + 18)}{120} \right\rfloor = 1463\end{aligned}$$

Vậy có 1463 cách đổi tiền lẻ cho anh Tài.

Nhận xét: Có thể tính trực tiếp $\|1, 1, 2, 5; 40\|$ bằng cách lập tổng, như sau:

Ta có: $(y + x_2) + 2x_3 + 5x_4 = 40$

Với mỗi giá trị x_3, x_4 thì $y + x_2 = 40 - 2x_3 - 5x_4$ có $(40 - 2x_3 - 5x_4) + 1$ nghiệm.

Vậy nên số nghiệm của pt trên là: $\sum_{x_3=0}^{\lfloor \frac{40}{2} \rfloor} \sum_{x_4=0}^{\lfloor \frac{40-2x_3}{5} \rfloor} (41 - 2x_3 - 5x_4) = 1463$

Hay $\sum_{x_4=0}^{\lfloor \frac{40}{5} \rfloor} \sum_{x_3=0}^{\lfloor \frac{40-5x_4}{2} \rfloor} (41 - 2x_3 - 5x_4) = 1463$

□

Bài toán 2 Có 50 cây giống được phân phối về cho các xã A, B, C, D. Hỏi có bao nhiêu cách phân phối biết rằng số cây giống của xã A phải chia hết cho 5; số cây giống của xã B ít hơn 10; số cây giống của xã C nhiều hơn 4 và số cây giống của xã D ít nhất là 15?

Lời giải 1 (Hàm sinh):

Hàm sinh số cách chia cây cho xã A: $1 + x^5 + x^{10} + \dots = \frac{1}{1 - x^5}$

Hàm sinh số cách chia cây cho xã B: $1 + x + \dots + x^9 = \frac{1 - x^{10}}{1 - x}$

Hàm sinh số cách chia cây cho xã C: $x^5 + x^6 + \dots = \frac{x^5}{1 - x}$

Hàm sinh số cách chia cây cho xã D: $x^{15} + x^{16} + \dots = \frac{x^{15}}{1 - x}$

Hàm sinh số cách chia cây là $f(x) = \frac{x^{20}(1 + x^5)}{(1 - x)^3}$

Do đó số cách phân phối cây giống là $[x^{50}]f(x) = \binom{32}{30} + \binom{27}{25} = 847$

Lời giải 2 (ptnn):

Theo giả thiết ta có phương trình:

$$\begin{cases} (5a) + (10 - b) + (5 + c) + (15 + d) = 50 \\ a, c, d \geq 0 \\ 0 < b \leq 10 \end{cases}$$

Từ đó ta có: $20 < 5a + c + d \leq 30$

Số nghiệm nguyên không âm của BPT này là: $\|1, 1, 1, 5; 30\| - \|1, 1, 1, 5; 20\|$

Theo (1.3.6) giá trị này bằng:

$$\left\lfloor \frac{32 \times 37 \times 66}{60} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{20 \times 27 \times 46}{60} \right\rfloor = 1302 - 455 = 847$$

□

Bài toán 3 Gọi A_n là số phân hoạch n thành tổng của 3 số nguyên dương. B_n là số phân hoạch $2n$ thành tổng của 3 số nguyên dương phân biệt không quá n . Chứng minh rằng $A_n = B_n$. Tính A_n .

Lời giải:

Đề bài có thể diễn tả như số nghiệm của hai hệ phương trình sau là bằng nhau (tương đương)

$$(A) : \begin{cases} a + b + c = n \\ 1 \leq a \leq b \leq c \leq n \end{cases} \Leftrightarrow (B) : \begin{cases} x + y + z = 2n \\ 1 \leq x < y < z \leq n \end{cases}$$

$$\text{Thật vậy với (A) ta đặt } \begin{cases} a = a' + 1 \\ b = a + b' = a' + b' + 1 \\ c = b + c' = a' + b' + c' + 1 \end{cases} \text{ thì (A)} \Leftrightarrow \begin{cases} 3a' + 2b' + c' + 3 = n \\ 0 \leq a', b', c' \end{cases}$$

$$\Rightarrow A_n = \|1, 2, 3; n - 3\|$$

$$\text{Với (B) ta cũng đặt } \begin{cases} x = x' + 1 \\ y = x + 1 + y' = x' + y' + 2 \\ z = y + 1 + z' = x' + y' + z' + 3 \end{cases} \text{ thì}$$

$$(B) \Leftrightarrow \begin{cases} 3x' + 2y' + z' + 6 = 2n & (*) \\ 0 \leq x', y', z' \\ x' + y' + z' + 3 \leq n & (**) \end{cases}$$

Chú ý tới điều kiện (**), ta có thể viết thành $x' + y' + z' + 3 + d = n$ với $d \geq 0$

Ta thay vào (*) theo hai cách ta có tương đương:

$$\begin{cases} 3x' + 2y' + z' + 6 = 2(x' + y' + z' + 3 + d) \\ 3x' + 2y' + z' + 6 = n + (x' + y' + z' + 3 + d) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = z' + 2d & (i) \\ 2x' + y' + 3 = d + n & (ii) \end{cases}$$

Thay (i) vào (ii) thì thu được $3d + 2z' + y' + 3 = n$

Vậy $B_n = \|1, 2, 3; n - 3\| = A_n = \left\lfloor \frac{n^2 + 3}{12} \right\rfloor$ (Theo (1.3.5))

□

Bài tập

Bài 1 Có bao nhiêu tam giác có các cạnh là số nguyên dương và chu vi bằng n ?

Bài 2 Có bao nhiêu tam giác có các cạnh là số nguyên dương không vượt quá n và chu vi là số lẻ?

Bài 3 Có bao nhiêu tam giác cân không đều có các cạnh là số nguyên dương không vượt quá n ?

Bài 4 Cho n -giác đều (n cạnh). Hỏi có bao nhiêu tam giác không bằng nhau có các đỉnh là đỉnh của n -giác đều đã cho?

Bài 5 Chia hết $4n + 1$ chiếc kẹo giống nhau cho 4 bạn thỏa mãn đồng thời hai điều kiện

- Số kẹo của mỗi bạn nhận được là khác nhau và có thể bằng 0
- Tổng số kẹo của bạn nhận được nhiều nhất với bạn nhận được ít nhất không vượt quá tổng số kẹo nhận được của hai bạn còn lại.

Hỏi có bao nhiêu cách chia thỏa mãn cả hai điều kiện trên

Bài 6 Có n tấm thẻ được đánh số $1, 2, \dots, n$. Bốc ngẫu nhiên 3 tấm thẻ trong n tấm thẻ trên. Tính xác suất để số ghi trên 3 tấm thẻ bốc ra là số đo 3 cạnh của một tam giác.

Bài 7 Chia n chiếc kẹo cho 4 bạn sao cho không bạn nào nhận được số kẹo là bội của 3. Hỏi có bao nhiêu cách chia?

Bài 8 Tính tổng sau:

$$S_n = \sum_{k=0}^n \left\lfloor \frac{k}{5} \right\rfloor (n+2-k)$$

Bài 9 Tính tổng sau:

$$S_n = \sum_{k=0}^n \left\lfloor \frac{k(k-1)}{10} \right\rfloor$$

Bài 10 Có bao nhiêu cách viết số nguyên dương $2n$ thành tổng của 4 số lẻ, không quan tâm thứ tự số hạng trong tổng?

=====

<https://oeis.org>

<https://diendantoanhoc.org>

lovetovan.wordpress.com-Tuyển-tập-các-bài-toán-tổ-hợp-Bài-136-Trang-127.