

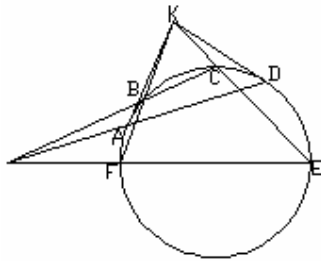
Một số bài toán dùng cực và đối cực

Cực và đối cực được áp dụng để giải khá nhiều các bài toán hình học phẳng. Nhiều bài toán nếu không dùng cực và đối cực thì còn đường đến lời giải có lẽ sẽ phức tạp hơn rất nhiều. Trong bài viết này tôi xin trình bày một số bài toán có sử dụng cực và đối cực để giải quyết. Rất mong được sự góp ý của các bạn.

1. Các bài toán nhỏ

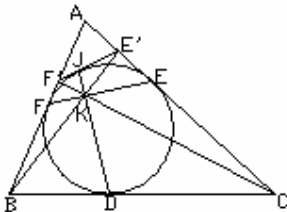
Đây là các bài toán chủ yếu được suy ra khá trực tiếp từ những tính chất cơ bản của cực và đối cực. Vì thế lời giải của chúng thường rất ngắn gọn. Cũng có một số bài toán dùng cực và đối cực làm một bước đệm trong lời giải của chúng.

Bài toán 1 (Australian-Polish 98): Cho 6 điểm A, B, C, D, E, F thuộc một đường tròn sao cho các tiếp tuyến tại A và D , đường thẳng BF, CE đồng quy. Chứng minh rằng các đường thẳng AD, BC, EF hoặc đôi một song song hoặc đồng quy.



Trường hợp 3 đường thẳng đó đôi một song song dễ thấy nên ta chỉ xét khi chúng có cắt nhau. Nếu gọi điểm đồng quy của BF, CE là K thì KA, KD là các tiếp tuyến của K với đường tròn nên AD là đường đối cực của K . Theo như tính chất của tứ giác nội tiếp thì BC và EF sẽ cắt nhau tại 1 điểm thuộc đường đối cực của K , tức thuộc AD .

Bài toán 2: Cho tam giác ABC . Đường tròn nội tiếp (I) tiếp xúc với BC, CA, AB lần lượt tại D, E, F . K là một điểm bất kỳ thuộc đường thẳng EF . BK, CK cắt AC, AB lần lượt tại E', F' . Chứng minh rằng $E'F'$ tiếp xúc với (I) .



Gọi giao điểm của DK và (I) là J và qua J kẻ tiếp tuyến với (I) cắt AC, AB tại M, N . Ta thấy rằng EF, DJ, BM và CN đồng quy. Rõ ràng điểm đồng quy đó là K nên M trùng với E', N trùng với F' , tức $E'F'$ tiếp xúc với (I) .

Chú ý là trong bài toán này thì điểm K có thể di chuyển trên cả đường thẳng EF mà kết quả không thay đổi. Hơn nữa nếu gọi D' là giao điểm của $E'F'$ với BC thì tương tự cũng có CF', AD', FD và AD', BE', DE đồng quy. Phát biểu lại thì có điều kiện cần và đủ để một đường thẳng tiếp xúc với đường tròn nội tiếp như sau:

Cho tam giác ABC . Đường tròn nội tiếp (I) tiếp xúc với BC, CA, AB lần lượt tại D, E, F . Đường thẳng l cắt các cạnh BC, CA, AB lần lượt tại D', E', F' . Chứng minh rằng l tiếp xúc với (I) khi và chỉ khi một trong 3 điều kiện sau xảy ra:

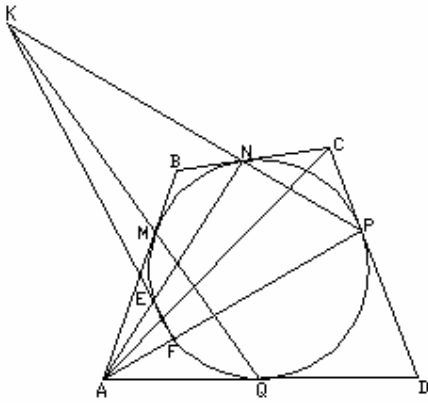
- giao điểm của BE', CF' thuộc EF .
- giao điểm của CF', AD' thuộc FD .
- giao điểm của AD', BE' thuộc DE .

Cần chú ý thêm một chút nữa rằng cả 3 điều kiện trên là tương đương nên xảy ra 1 điều kiện cũng có nghĩa là cả 3 điều kiện đều xảy ra.

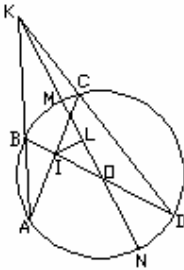
Bài toán 3 (MOP 95): Cho tứ giác $ABCD$ ngoại tiếp (O) . Tiếp điểm thuộc các cạnh AB, BC, CD, DA lần lượt là M, N, P, Q . AN, AP cắt (O) tại E, F . Chứng minh rằng ME, QF, AC đồng quy.

Gọi K là cực của AC . Xét tứ giác nội tiếp $MNPQ$ thì MQ và NP cắt nhau tại K . Lại xét đến tứ giác nội tiếp $EFNP$ thì cũng có EF và NP cắt nhau tại K , suy ra MQ và EF cắt nhau tại K .

Ta thấy ME và QF cắt nhau tại 1 điểm thuộc đường đối cực của K tức thuộc AC hay ME, QF, AC đồng quy.



Bài toán 4: Cho tứ giác ABCD nội tiếp (O). AC cắt BD tại I. (AOB), (COD) cắt nhau tại điểm L khác O. Chứng minh rằng $\angle ILO = 90^\circ$.



Gọi K là giao điểm của AB và CD.

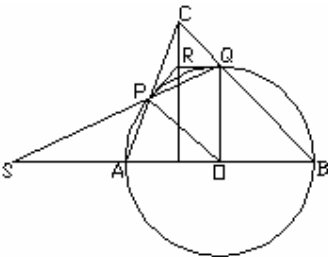
Ta thấy $KA.KB = KC.KD$ nên K thuộc trục đẳng phương của (AOB) và (COD) nên K, L, O thẳng hàng.

Suy ra $KL.KO = KA.KB = KM.KN$ (với M, N là giao điểm của KO với (O)).

Từ đó suy ra $(KOMN) = -1$ hay L thuộc đường đối cực của K.

Ta đã biết là đường đối cực của K đi qua I nên IL chính là đường đối cực của K, từ đó suy ra $KO \perp IL$.

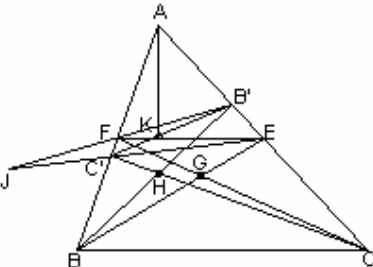
Bài toán 5: Cho tam giác ABC. Đường tròn đường kính AB cắt CA, CB tại P, Q. Các tiếp tuyến tại P, Q với đường tròn này cắt nhau tại R. Chứng minh rằng $CR \perp AB$.



Gọi O là trung điểm AB và S là giao điểm của PQ và AB.

Áp dụng tính chất cực và đối cực vào tứ giác nội tiếp APQB ta thấy CR chính là đường đối cực của S. Do đó $CR \perp OS$ hay $CR \perp AB$.

Bài toán 6: Cho tam giác ABC. BB' , CC' là các đường cao. E, F là trung điểm của AC, AB. EF cắt $B'C'$ tại K. Chứng minh rằng AK vuông góc với đường thẳng OI của tam giác ABC.



Gọi H, G, O lần lượt là trực tâm, trọng tâm và tâm đường tròn OI của tam giác ABC. J là giao điểm của FB' và EC' .

Áp dụng định lý Pappus cho 2 bộ 3 điểm BFC' và CEB' suy ra J, H, G thẳng hàng, tức J thuộc đường thẳng OI của tam giác ABC.

Mặt khác, tứ giác C'FB'E nội tiếp đường tròn OI, và theo tính chất cực của tứ giác nội tiếp thì AK là đường đối cực của điểm J, từ đó suy ra AK vuông góc với OJ tức đường thẳng OI của tam giác ABC.

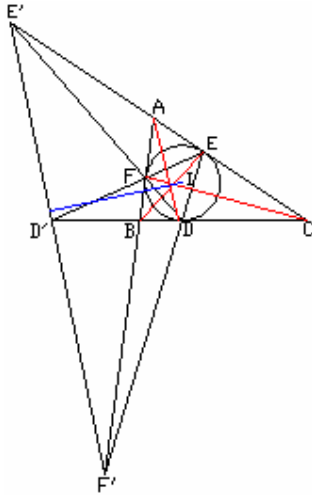
Mở rộng ra thêm một chút, nếu như xác định các điểm K, L, M là giao điểm của các cạnh tương ứng của 2 tam giác $A'B'C'$ và DEF với A' , B' , C' là chân các đường cao còn D, E, F là trung điểm các cạnh BC, CA, AB tương ứng thì có thể thấy rằng AK, BL, CM song song với nhau và cùng vuông góc với đường thẳng OI của tam giác ABC.

2. Cực và đối cực với đường tròn nội tiếp:

Trong 1 tam giác, đường tròn nội tiếp làm xuất hiện các tiếp tuyến với nó, và điều này rất thuận lợi cho việc áp dụng cực và đối cực.

Vì tính liên mạch của các bài toán với nhau nên xin không phát biểu từng bài toán cụ thể riêng rẽ ra.

Hãy xét tam giác ABC có (I) là đường tròn nội tiếp. D, E, F là các tiếp điểm của (I) với các cạnh BC, CA, AB tương ứng.



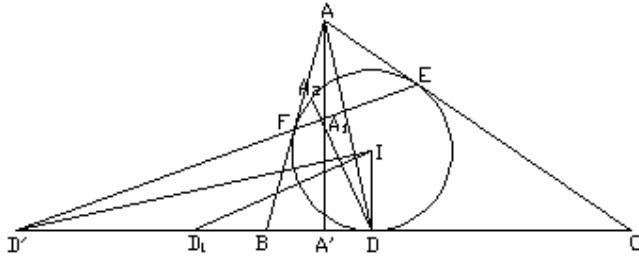
Gọi D' , E' , F' lần lượt là các giao điểm của EF, FD, DE với BC, CA, AB.

Ta thấy rằng EF là đường đối cực của A, mà D' thuộc EF nên đường đối cực của D' sẽ đi qua A. Do $D'D$ là tiếp tuyến với (I) nên AD chính là đường đối cực của D' .

Tương tự BE, CF cũng là các đường đối cực của E' , F' .

Ta biết rằng AD, BE, CF đồng quy tại 1 điểm, gọi là K, thì D' , E' , F' phải thuộc đường đối cực của K. Từ đó suy ra D' , E' , F' thẳng hàng và đường thẳng $D'E'F'$ vuông góc với IK.

Đường thẳng $D'E'F'$ trên được gọi là đường thẳng Giécgôn và K được gọi là điểm Giécgôn.



Ta thấy D' là cực của AD nên $ID' \perp AD$. Nếu hạ đường cao AA' thì dễ thấy 2 tam giác $AA'D$, $D'DI$ đồng dạng.

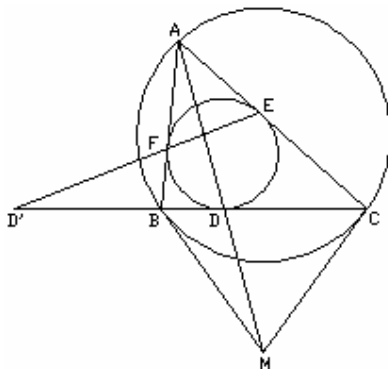
Gọi D_1 , A_1 là trung điểm của DD' , AA' thì có thể suy ra được 2 tam giác D_1DI , $A_1A'D$ cũng đồng dạng, từ đó suy ra $ID_1 \perp DA_1$. Lại do D_1D là tiếp tuyến của D_1 nên DA_1 là đường đối cực của D_1 đối với (I).

Bây giờ nếu gọi A_2 là giao điểm của DA_1 với (I) thì rõ ràng D_1A_2 là tiếp tuyến với (I).

Lại chú ý rằng do $(D'DBC) = -1$ nên $D_1B \cdot D_1C = D_1D^2$, suy ra $D_1B \cdot D_1C = D_1A_2^2$. Tức là D_1A_2 cũng là tiếp tuyến với đường tròn (BCA_2) . Từ đó suy ra (I) và (BCA_2) tiếp xúc với nhau.

Mặt khác, từ đẳng thức $D_1B \cdot D_1C = D_1D^2$ ta có D_1 thuộc trục đẳng phương của (I) và đường tròn ngoại tiếp (O). Nếu ta xác định các điểm tương tự E_1 , F_1 , B_1 , C_1 thì E_1 , F_1 cũng thuộc trục đẳng phương trên, tức D_1 , E_1 , F_1 thẳng hàng. Chú ý thêm là D_1 , E_1 , F_1 chính là cực của DA_1 , EB_1 , FC_1 đối với (I) cho nên 3 đường thẳng này đồng quy tại cực của đường thẳng $D_1E_1F_1$. Thêm nữa do $D_1E_1F_1$ là trục đẳng phương của (I) và (O) nên $D_1E_1F_1 \perp OI$, do đó cực của $D_1E_1F_1$ đối với (I) sẽ thuộc IO. Từ đó suy ra DA_1 , EB_1 , FC_1 và OI đồng quy.

Ta thấy rằng AD là đường đối cực của D' đối với (I). Bây giờ ta sẽ xét đường đối cực của D' đối với (O). Thấy rằng $(D'DBC) = -1$ nên D thuộc đường đối cực của D' đối với (O), vì vậy nếu muốn dựng đường đối cực của D' chỉ cần dựng thêm 1 điểm nữa là đủ. Lại do D' thuộc BC nên đường đối cực của D' sẽ đi qua cực của BC. Để thấy đó là giao điểm của các tiếp tuyến tại B và C đối với (O). Kí hiệu điểm đó là M thì MD chính là đường đối cực của D' đối với (O).



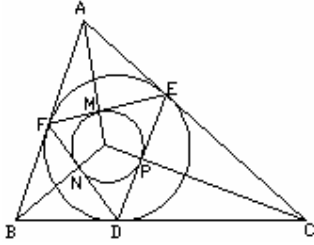
Từ đó suy ra $OD' \perp DM$.

Ta biết rằng $ID' \perp AD$. Nếu có thêm điều kiện $IO \perp AD$ thì 3 điểm O, I, D' thẳng hàng, suy ra A, D, M cũng thẳng hàng và đường thẳng ADM sẽ đường đối cực của D' vừa đối với (I) vừa đối với (O).

Ta biết AM chính là đường đối trung trong tam giác ABC nên từ đó có thể phát biểu được bài toán:

Cho tam giác ABC, đường tròn nội tiếp tiếp xúc với BC tại D. Chứng minh rằng nếu $OI \perp AD$ thì AD là đường đối trung của tam giác ABC.

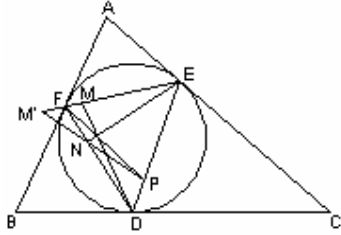
Nếu kéo dài các tiếp tuyến tại A, B, C cho cắt nhau tạo thành tam giác MNP thì MD, NE, PF là các đường đối cực của D', E', F' đối với (O). Vì D', E', F' thẳng hàng nên MD, NE, PF đồng quy.



Ta phát biểu lại cho cân đối hơn thì có bài toán sau:

Cho tam giác ABC, đường tròn nội tiếp tiếp xúc với BC, CA, AB lần lượt tại D, E, F. Đường tròn nội tiếp tam giác DEF tiếp xúc với EF, FD, DE lần lượt tại M, N, P. Chứng minh rằng AM, BN, CP đồng quy.

Ta thấy rằng DM, EN, CP cũng đồng quy. Ta mở rộng kết quả trên, liệu khi DM, EN, CP đồng quy thì AM, BN, CP có luôn đồng quy không?



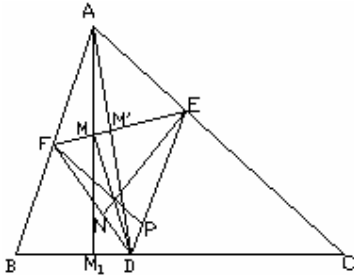
Để chứng minh khẳng định trên là đúng, ta chứng minh các cực của AM, BN, CP thẳng hàng.

Gọi M' là giao điểm của NP và EF thì (MM'EF) = -1 suy ra M' thuộc đường đối cực của M. Mặt khác M' thuộc EF, tức đường đối cực của A, nên M' chính là cực của AM.

Tương tự cũng xác định được N', P' là các cực của BN, CP.

Để thấy rằng các điểm M', N', P' thẳng hàng, từ đó suy ra AM, BN, CP đồng quy.

Thực ra kết quả trên còn được mở rộng hơn nữa, đó là bài toán sau:



Cho tam giác ABC. D, E, F thuộc BC, CA, AB sao cho AD, BE, CF đồng quy. M, N, P thuộc EF, FD, DE sao cho DM, EN, FP đồng quy. Chứng minh rằng AM, BN, CP đồng quy.

Tuy nhiên cách giải bài toán này lại không dùng cực và đối cực, cũng dễ hiểu vì ở đây không có đường tròn nào cả. Vì vậy tôi xin nêu 1 cách chứng minh dùng tỉ số kép và định lí Ceva.

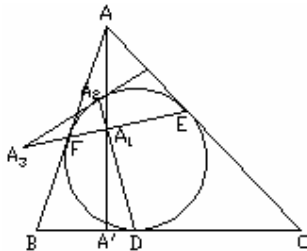
Gọi M₁, M' là lần lượt giao điểm của AM với BC, AD với EF.

Ta thấy rằng từ A chiếu xuyên tâm thì F, M, M', E biến thành B, M₁, D, C nên (BCM₁D) = (FEMM'), hay

$$\frac{M_1B}{M_1C} : \frac{DB}{DC} = \frac{MF}{ME} : \frac{M'F}{M'E}, \text{ suy ra } \frac{M_1B}{M_1C} = \frac{DB}{DC} \cdot \frac{MF}{ME} : \frac{M'F}{M'E}$$

Tương tự ta có 2 đẳng thức nữa đối với các điểm N₁, P₁ xác định tương tự. Nhân từng vế các đẳng thức đó lại với chú ý là các bộ 3 AD, BE, CE; DM, EN, FP; DM', EN', FP' đồng quy và áp dụng định lí Ceva ta sẽ có kết luận của bài toán.

Bây giờ trở lại bài toán của chúng ta, trong đề thi chọn đội tuyển tỉnh Hải Dương năm 2005 có 1 câu yêu cầu chứng minh thêm AA₂, BB₂, CC₂ đồng quy.



Một cách tự nhiên ta nghĩ đến việc chứng minh các cực của AA₂, BB₂, CC₂ thẳng hàng.

Ta thấy cực của AA₂ chính là giao điểm của các đường đối cực của A và A₂. Đường đối cực của A là EF còn của A₂ là tiếp tuyến tại A₂ đối với (I). Kí hiệu A₃ là giao điểm của EF với tiếp tuyến tại A₂ của (I) thì A₃ là cực của AA₂. Tương tự ta cũng xác định được B₃, C₃ là các cực của BB₂, CC₂.

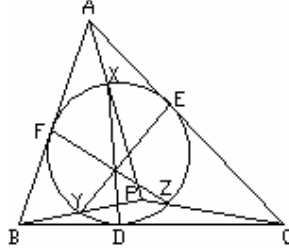
Để chứng minh A₃, B₃, C₃ thẳng hàng ta dùng định lí Mênelaút đối với tam giác DEF.

$$\text{Ta thấy: } \frac{A_3E}{A_3F} = \frac{A_3E}{A_3A_2} \cdot \frac{A_3A_2}{A_3F} = \left(\frac{A_2E}{A_2F} \right)^2 \quad (\text{vì 2 tam giác } A_3A_2E \text{ và } A_3FA_2 \text{ đồng dạng}) = \frac{\sin^2 EDA_2}{\sin^2 FDA_2}.$$

Tương tự ta cũng có thêm 2 tỉ số nữa, nhân chúng lại với nhau, chú ý là DA₂, EB₂, FC₂ đồng quy nên theo định lí Ceva dạng sin sẽ có kết luận của bài toán.

Ta thấy kết luận của bài toán chỉ dùng DA_2 , EB_2 , FC_2 đồng quy, mà không cần dùng A_2 , B_2 , C_2 là giao điểm của các đường nối D , E , F với trung điểm các đường cao và (I) .

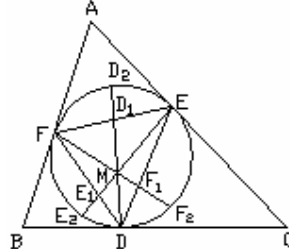
Kết quả riêng rẽ này đã được biết đến là bài toán Stanley-Rabinowitz và được phát biểu như sau:



Cho tam giác ABC , đường tròn nội tiếp tiếp xúc với BC , CA , AB lần lượt tại D , E , F . P là 1 điểm bất kỳ trong mặt phẳng. PA , PB , PC cắt (I) lần lượt tại X , Y , Z . Chứng minh rằng DX , EY , FZ đồng quy.

Có thể thấy rằng dạng phát biểu này là dạng phát biểu nghịch của bài toán của chúng ta. Nhưng cách chứng minh của nó thì hoàn toàn là sự đi ngược lại những biến đổi trên của ta.

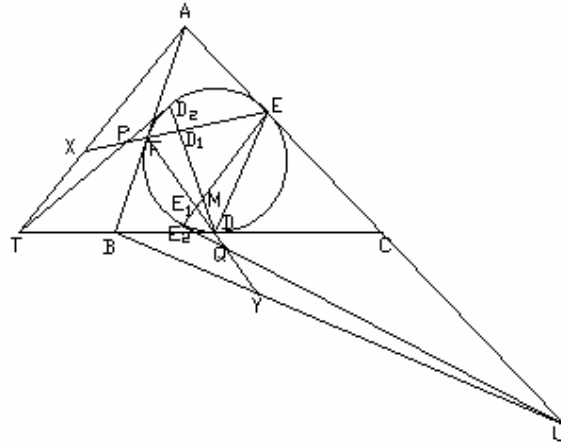
Bây giờ xét điểm M bất kỳ trong mặt phẳng, giả sử DM cắt EF và (I) lần lượt tại D_1 , D_2 . Các điểm E_1 , E_2 , F_1 , F_2 xác định tương tự.



Ta biết rằng AD_1 , BE_1 , CF_1 và AD_2 , BE_2 , CF_2 đồng quy. Ta gọi các điểm đồng quy đó lần lượt là M_1 , M_2 .

Vậy thì giữa M , M_1 , M_2 có quan hệ gì với nhau?

Một cách tự nhiên ta sẽ nghĩ chúng thẳng hàng. Và bằng con đường quen thuộc ta sẽ cố gắng chứng minh nó bằng cực và đối cực. Điều đó có nghĩa là chúng ta phải chứng minh 3 đường đối cực của chúng đồng quy.



Ta thấy cực của AD_2 , BE_2 , CF_2 là giao điểm của các tiếp tuyến tại D_2 , E_2 , F_2 tương ứng với EF , FD , DE . Kí hiệu các điểm đó là P , Q , R thì suy ra PQR là đường đối cực của M_2 .

Tương tự cực của DD_2 , EE_2 , FF_2 là giao điểm của các tiếp tuyến tại D_2 , E_2 , F_2 tương ứng với BC , CA , AB . Kí hiệu các điểm đó là T , U , V thì suy ra TUV là đường đối cực của M_1 .

Có thể thấy rằng khi đó đường đối cực của D_1 là AT , nên cực của AD_1 là giao điểm của EF với AT . Ta gọi điểm đó là X . Các điểm Y , Z xác định tương tự. Khi đó XYZ là đường đối cực của điểm M .

Vấn đề của chúng ta là cần chứng minh các đường thẳng PQR , TUV , XYZ đồng quy, hay chỉ đơn giản là chứng minh PQ , TU , XY đồng quy.

Đây là 3 đường thẳng nối 3 cặp điểm với nhau, điều đó khiến ta nghĩ đến định lý Đơgiácgiơ, theo định lý này thì để chứng minh PQ , TU , XY đồng quy ta cần phải chứng minh các giao điểm của PT và QU , TX và UY , XP và YQ thẳng hàng.

Dễ thấy PT là tiếp tuyến tại D_2 , QU là tiếp tuyến tại E_2 nên giao điểm của PT và QU chính là cực của D_2E_2 .

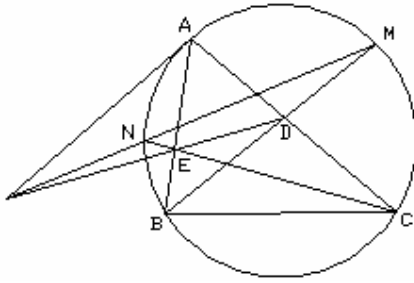
TX chính là TA , đường đối cực của D_1 ; UY chính là UB , đường đối cực của E_1 nên giao điểm của TX và UB chính là cực của D_1E_1 .

XP chính là EF , YQ chính là FD nên giao điểm của XP và YQ là điểm F .

Vậy để chứng minh 3 giao điểm trên thẳng hàng, ta sẽ chứng minh các đường đối cực của chúng đồng quy, tức cần phải chứng minh D_1E_1 , D_2E_2 , AB đồng quy. Chỗ này chỉ cần áp dụng định lý Pascal cho lục giác suy biến DFE_2D_2 sẽ thu được điều phải chứng minh.

Chỗ chứng minh cuối cùng này phát biểu riêng ra thành 1 bài toán cũng khá thú vị:

Cho tam giác ABC, trên các cạnh AC, AB lấy các điểm D, E. BD, CE cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC tại M, N tương ứng. Chứng minh rằng DE, MN và tiếp tuyến tại A đồng quy.

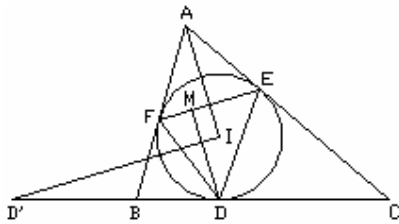


4. Đường thẳng OI và đường thẳng OI':

Phần này tôi xin nói một chút về tính chất của đường thẳng OI và đường thẳng OI' từ góc độ cực và đối cực. Các kết quả này không nhiều và còn nhiều vấn đề mở. Rất mong được thảo luận cùng các bạn.

Trong tam giác ABC, đường tròn nội tiếp (I) đã tạo nên tam giác DEF là các tiếp điểm của nó với các cạnh của tam giác. Ở tam giác DEF này có 1 tính chất rất đặc biệt đó là đường thẳng OI' của nó chính là đường thẳng OI.

Bài toán này có khá nhiều cách giải, có lẽ ngắn nhất là dùng phép nghịch đảo. Tuy nhiên nó không nêu lên thêm được nhiều tính chất khác. Các lời giải bằng phép vị tự cũng rất tuyệt. Nhưng ở đây còn có 1 lời giải dùng cực và đối cực khá độc đáo, lời giải đó như sau:



Qua I kẻ đường thẳng vuông góc với IA, IB, IC cắt BC, CA, AB lần lượt tại D', E', F'.

Ta thấy rằng $\angle AIB = 90^\circ + \frac{C}{2}$ nên $\angle D'IB = \frac{C}{2} = \angle D'CI$, suy

ra 2 tam giác D'IB và D'CI đồng dạng, suy ra $\frac{D'B}{D'I} = \frac{D'I}{D'C}$ hay $D'I^2 = D'B \cdot D'C$ tức là D' thuộc trục đẳng phương của (O) và đường tròn điểm (I).

Tương tự E', F' cũng thuộc trục đẳng phương đó nên D', E', F' thẳng hàng và đường thẳng D'E'F' vuông góc với OI.

Bây giờ nếu ta gọi DM, EN, FP là các đường cao của tam giác DEF thì ta thấy $D'I \perp DM$ và D'D tiếp xúc với (I) nên DM là đường đối cực của D' đối với (I).

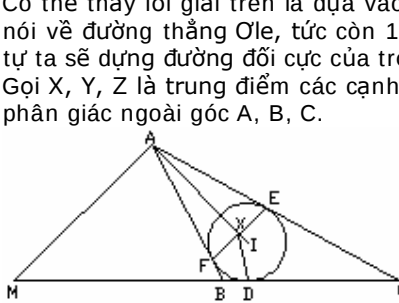
Tương tự EN, FP cũng là các đường đối cực của E', F' đối với (I).

Từ đó suy ra đường thẳng D'E'F' là đường đối cực của giao điểm của DM, EN, FP tức trục tâm H của tam giác DEF. Suy ra $D'E'F' \perp IH$.

Kết hợp các điều trên lại thì ta có I, O, H thẳng hàng, tức đpcm.

Có thể thấy lời giải trên là dựa vào việc dựng đường đối cực của trục tâm H của tam giác DEF. Đề bài nói về đường thẳng OI', tức còn 1 điểm quan trọng nữa là trọng tâm tam giác DEF. Bằng cách tương tự ta sẽ dựng đường đối cực của trọng tâm này để tìm thêm những tính chất mới.

Gọi X, Y, Z là trung điểm các cạnh EF, FD, DE. Để thấy rằng đường đối cực của X, Y, Z lần lượt là các phân giác ngoài góc A, B, C.



Đường đối cực của D, E, F lần lượt là BC, CA, AB cho nên cực của DX, EY, FZ sẽ là giao điểm của các phân giác ngoài với các cạnh đối diện, kí hiệu lần lượt là M, N, P.

Khi đó MNP là đường đối cực của trọng tâm G của tam giác DEF, suy ra $MNP \perp IG$.

Kết hợp với I, G, O thẳng hàng ta suy ra $MNP \perp OI$.

Vậy ta có bài toán:

Cho tam giác ABC, các phân giác ngoài các góc A, B, C cắt các cạnh đối diện lần lượt tại M, N, P. Chứng minh rằng M, N, P thẳng hàng và đường thẳng MNP vuông góc với OI.

Bây giờ nếu ta kéo dài các phân giác ngoài các góc A, B, C cho chúng cắt nhau tạo thành tam giác $A'B'C'$ (chính là các tâm đường tròn bàng tiếp) thì dễ thấy rằng AA', BB', CC' là các đường cao của tam giác $A'B'C'$, tức I là trực tâm của tam giác này. Điều đó có nghĩa là OI chính là đường thẳng Ole của tam giác $A'B'C'$ vì O là tâm đường tròn Ole của nó. Ta phát biểu lại kết quả trên đối với tam giác $A'B'C'$ nhưng thay đổi tên các điểm, ta sẽ có bài toán sau:

Cho tam giác ABC , các đường cao AA', BB', CC' . $B'C', C'A', A'B'$ lần lượt cắt BC, CA, AB tại M, N, P . Chứng minh rằng M, N, P thẳng hàng và đường thẳng MNP vuông góc với đường thẳng Ole của tam giác ABC .

Bài viết của tôi xin được kết thúc tại đây. Hy vọng rằng những bài toán này giúp các bạn phần nào trong việc sử dụng cực và đối cực. Rất mong nhận được sự trao đổi của các bạn.

Trong bài viết có sử dụng lời giải của bạn Circle và lovePearl_maytrang, các bài toán trên diễn đàn toán học và diễn đàn mathnfriend, xin chân thành cảm ơn các bạn. Lời cảm ơn cuối cùng xin gửi tới MrMATH!