



VietNam
Inequality Mathematic Contest
2009



ĐÁP ÁN VÒNG 1



BÀI 1. Cho các số thực không âm a, b, c sao cho $ab + bc + ca = 1$. Chứng minh rằng

$$\frac{3ab+1}{a+b} + \frac{3bc+1}{b+c} + \frac{3ca+1}{c+a} \geq 4$$

LỜI GIẢI.

Bất đẳng thức đã cho tương đương với

$$\frac{3ab+ab+bc+ca}{a+b} + \frac{3bc+ab+bc+ca}{b+c} + \frac{3ca+ab+bc+ca}{c+a} \geq 4$$

Hay

$$\frac{4ab}{a+b} + \frac{4bc}{b+c} + \frac{4ca}{c+a} + a+b+c \geq 4$$

Chú ý rằng

$$\begin{aligned} ab(a+b) + bc(b+c) + ca(c+a) &= (a+b+c)(ab+bc+ca) - 3abc \\ &\leq (a+b+c)(ab+bc+ca) \leq a+b+c \end{aligned}$$

Nên theo bất đẳng thức *Cauchy – Schwarz* ta có

$$\begin{aligned} \frac{ab}{a+b} + \frac{bc}{b+c} + \frac{ca}{c+a} &= \frac{a^2b^2}{ab(a+b)} + \frac{b^2c^2}{bc(b+c)} + \frac{c^2a^2}{ca(c+a)} \\ &\geq \frac{(ab+bc+ca)^2}{ab(a+b) + bc(b+c) + ca(c+a)} \geq \frac{1}{a+b+c} \end{aligned}$$

Do đó

$$\frac{4ab}{a+b} + \frac{4bc}{b+c} + \frac{4ca}{c+a} + a+b+c \geq \frac{4}{a+b+c} + a+b+c$$

Mặt khác, theo bất đẳng thức *AM – GM* thì

$$\frac{4}{a+b+c} + a+b+c \geq 4$$

Vậy ta có điều phải chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi một trong 3 biến bằng 0 và 2 biến còn lại bằng nhau và bằng 1.

BÀI 2. Cho các số thực không âm a, b, c sao cho $a \geq b \geq c$. Chứng minh rằng

$$\frac{a^3b}{b^2 - bc + c^2} + \frac{b^3c}{c^2 - ca + a^2} + \frac{c^3a}{a^2 - ab + b^2} \geq ab + bc + ca$$

LỜI GIẢI. Bất đẳng thức đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} & \frac{a^3b(b+c)}{b^3+c^3} + \frac{b^3c(c+a)}{c^3+a^3} + \frac{c^3a(a+b)}{a^3+b^3} \geq ab + bc + ca \\ \Leftrightarrow & \frac{a^3(b^2+bc)}{b^3+c^3} + b^2 + bc + \frac{b^3(c^2+ca)}{c^3+a^3} + c^2 + ca + \frac{c^3(a^2+ab)}{a^3+b^3} + a^2 + ab \\ & \geq a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca) \end{aligned}$$

Hay

$$\begin{aligned} & (a^3 + b^3 + c^3) \left(\frac{b^2 + bc}{b^3 + c^3} + \frac{c^2 + ca}{c^3 + a^3} + \frac{a^2 + ab}{a^3 + b^3} \right) \geq (a + b + c)^2 \\ \Leftrightarrow & (a^3 + b^3 + c^3) \left(\frac{b}{b^2 - bc + c^2} + \frac{c}{c^2 - ca + a^2} + \frac{a}{a^2 - ab + b^2} \right) \geq (a + b + c)^2 \end{aligned}$$

Theo bất đẳng thức *Cauchy – Schwarz* thì

$$\begin{aligned} & \frac{b}{b^2 - bc + c^2} + \frac{c}{c^2 - ca + a^2} + \frac{a}{a^2 - ab + b^2} \\ & \geq \frac{(a + b + c)^2}{a^3 + b^2 + c^3 - (a^2b + b^2c + c^2a) + (ab^2 + bc^2 + ca^2)} \end{aligned}$$

Nên ta chỉ cần chứng minh

$$a^3 + b^2 + c^3 \geq a^3 + b^2 + c^3 - (a^2b + b^2c + c^2a) + (ab^2 + bc^2 + ca^2)$$

Hay

$$a^2b + b^2c + c^2a - ab^2 - bc^2 - ca^2 \geq 0$$

Bất đẳng thức này tương đương với

$$(a - b)(b - c)(a - c) \geq 0$$

đúng theo điều kiện $a \geq b \geq c$ ở giả thiết.

Vậy, bài toán được chứng minh xong. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$, hoặc 1 trong 3 biến bằng 0 và 2 biến còn lại bằng nhau.

BÀI 3. Cho các số thực x, y, z sao cho $xyz = 1$. Chứng minh rằng

$$\frac{3-x}{(1+x)^2} + \frac{3-y}{(1+y)^2} + \frac{3-z}{(1+z)^2} + \frac{16}{(1+x)(1+y)(1+z)} \geq \frac{47}{16}$$

LỜI GIẢI. Ta sẽ sử dụng bổ đề sau

BỔ ĐỀ. Với mọi số thực a, b, c bất kì thì

$$\frac{a-b}{a+b} \cdot \frac{b-c}{b+c} + \frac{b-c}{b+c} \cdot \frac{c-a}{c+a} + \frac{c-a}{c+a} \cdot \frac{a-b}{a+b} = \frac{8abc}{(a+b)(b+c)(c+a)} - 1$$

Chúng minh dành cho bạn đọc

Trở lại bài toán. Do $xyz = 1$ nên đặt $x = \frac{b}{a}, y = \frac{c}{b}, z = \frac{a}{c}$ thì bất đẳng thức được viết lại thành

$$\frac{3-\frac{b}{a}}{\left(1+\frac{b}{a}\right)^2} + \frac{3-\frac{c}{b}}{\left(1+\frac{c}{b}\right)^2} + \frac{3-\frac{a}{c}}{\left(1+\frac{a}{c}\right)^2} + \frac{16}{\left(1+\frac{b}{a}\right)\left(1+\frac{c}{b}\right)\left(1+\frac{a}{c}\right)} \geq \frac{47}{16}$$

Hay

$$\frac{3a^2-ab}{(a+b)^2} + \frac{3b^2-bc}{(b+c)^2} + \frac{3c^2-ca}{(c+a)^2} + \frac{16abc}{(a+b)(b+c)(c+a)} \geq \frac{47}{16}$$

Bây giờ áp dụng bổ đề trên với một chút phân tích biến đổi đơn giản, ta có

$$\begin{aligned} & \frac{3a^2-ab}{(a+b)^2} + \frac{3b^2-bc}{(b+c)^2} + \frac{3c^2-ca}{(c+a)^2} + \frac{16abc}{(a+b)(b+c)(c+a)} \\ &= \frac{3a^2}{(a+b)^2} + \frac{3b^2}{(b+c)^2} + \frac{3c^2}{(c+a)^2} - \frac{ab}{(a+b)^2} + \frac{bc}{(b+c)^2} + \frac{ca}{(c+a)^2} \\ &+ \frac{16abc}{(a+b)(b+c)(c+a)} \\ &= \frac{3}{4} \left[\left(\frac{a-b}{a+b} + 1 \right)^2 + \left(\frac{b-c}{b+c} + 1 \right)^2 + \left(\frac{c-a}{c+a} + 1 \right)^2 \right] \\ &- \frac{1}{4} \left[\frac{(a+b)^2 - (a-b)^2}{(a+b)^2} + \frac{(b+c)^2 - (b-c)^2}{(b+c)^2} + \frac{(c+a)^2 - (c-a)^2}{(c+a)^2} \right] \\ &+ \frac{16abc}{(a+b)(b+c)(c+a)} \\ &= \left(\frac{a-b}{a+b} \right)^2 + \left(\frac{b-c}{b+c} \right)^2 + \left(\frac{c-a}{c+a} \right)^2 + \frac{16abc}{(a+b)(b+c)(c+a)} \\ &+ \frac{3}{2} \left(\frac{a-b}{a+b} + \frac{b-c}{b+c} + \frac{c-a}{c+a} \right) + \frac{3}{2} \\ &= \left(\frac{a-b}{a+b} \right)^2 + \left(\frac{b-c}{b+c} \right)^2 + \left(\frac{c-a}{c+a} \right)^2 \\ &+ 2 \left(\frac{a-b}{a+b} \cdot \frac{b-c}{b+c} + \frac{b-c}{b+c} \cdot \frac{c-a}{c+a} + \frac{c-a}{c+a} \cdot \frac{a-b}{a+b} \right) + \frac{3}{2} \left(\frac{a-b}{a+b} + \frac{b-c}{b+c} + \frac{c-a}{c+a} \right) + 2 \\ &+ \frac{3}{2} = \left(\frac{a-b}{a+b} + \frac{b-c}{b+c} + \frac{c-a}{c+a} \right)^2 + \frac{3}{2} \left(\frac{a-b}{a+b} + \frac{b-c}{b+c} + \frac{c-a}{c+a} \right) + \frac{7}{2} \\ &= \left(\frac{a-b}{a+b} + \frac{b-c}{b+c} + \frac{c-a}{c+a} + \frac{3}{4} \right)^2 + \frac{7}{2} - \frac{9}{16} \geq \frac{47}{16}. \end{aligned}$$

Vậy, bài toán được chứng minh xong.

BÀI 4. Cho các số thực phân biệt a, b, c và số thực bất kì $k \in [0; 1]$. Chứng minh rằng

$$\frac{a(a+kb)}{(a-b)^2} + \frac{b(b+kc)}{(b-c)^2} + \frac{c(c+ka)}{(c-a)^2} \geq \frac{7}{8}$$

LỜI GIẢI.

Đặt $x = \frac{a+b}{a-b}; y = \frac{b+c}{b-c}; z = \frac{c+a}{c-a}$ thì

$$(x+1)(y+1)(z+1) = (x-1)(y-1)(z-1) \Rightarrow xy + yz + zx = -1$$

Ta có

$$\begin{aligned} \frac{a(a+kb)}{(a-b)^2} + \frac{b(b+kc)}{(b-c)^2} + \frac{c(c+ka)}{(c-a)^2} &= \frac{1}{4} \left[\left(\frac{a+b}{a-b} + 1 \right)^2 + \left(\frac{b+c}{b-c} + 1 \right)^2 + \left(\frac{c+a}{c-a} + 1 \right)^2 \right] + \\ &+ \frac{k}{4} \left[\frac{(a+b)^2 + (a-b)^2}{(a-b)^2} + \frac{(b+c)^2 + (b-c)^2}{(b-c)^2} + \frac{(c+a)^2 + (c-a)^2}{(c-a)^2} \right] \\ &= \frac{1}{4} \left[(1+k)(x^2 + y^2 + z^2) + 2(x+y+z) + 3 - 3k \right] \\ &= \frac{1}{4} \left[(1+k)(x+y+z)^2 + 2(x+y+z) + \frac{1}{1+k} + 5 - k - \frac{1}{1+k} \right] \\ &= \frac{1}{4} \left[\left(\sqrt{1+k}(x+y+z) + \frac{1}{\sqrt{1+k}} \right)^2 + \frac{-k^2 + 4k + 4}{1+k} \right] \geq \frac{-k^2 + 4k + 4}{4(1+k)} \end{aligned}$$

Do đó việc còn lại là chứng minh bất đẳng thức

$$\frac{-k^2 + 4k + 4}{4(1+k)} \geq \frac{7}{8} \Leftrightarrow -2k^2 + 8k + 8 \geq 7 + 7k \Leftrightarrow (k-1)(2k+1) \leq 0$$

Bất đẳng thức trên hiển nhiên đúng với $k \in [0; 1]$

Vậy ta có điều phải chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $k = 1$. Khi đó ta sẽ có

$$x + y + z = \frac{-1}{1+k} = \frac{-1}{2}$$

Nếu đề bài không cho số cụ thể $\frac{7}{8}$ thì ta có thể giải bài toán bằng cách tính đạo hàm $f'(k) = \frac{-k(k+2)}{4(1+k)^2} = 0 \Leftrightarrow t = 0$ (nhận)

hoặc $t = -2$ (loại). Rồi lập bảng biến thiên với $k \in [0; 1]$ thì ta cũng được $\min f(t) = \frac{7}{8}$.

BÀI 5. Cho A, B, C là 3 góc của một tam giác nhọn. Tìm giá trị nhỏ nhất của $2\tan A + 9\tan B + 17\tan C$

LỜI GIẢI 1.

Đặt $\tan A = 4x, \tan B = \frac{5}{3}y, \tan C = z$

Chú ý rằng $\tan A + \tan B + \tan C = \tan A \tan B \tan C$ nên

$$4x + \frac{5}{3}y + z = 4x \cdot \frac{5}{3}y \cdot z$$

Hay $12x + 5y + 3z = 20xyz, (x, y, z > 0)$

Và P được biểu diễn theo x, y, z thành

$$P = 8x + 15y + 17z$$

Do đó $20xyzP^2 = (12x + 5y + 3z)(8x + 15y + 17z)^2$

Mà theo bất đẳng thức $AM - GM$ thì

$$(12x + 5y + 3z)(8x + 15y + 17z)^2 \geq 20 \cdot \sqrt[20]{x^{12}y^5z^3} \cdot \left(40 \cdot \sqrt[40]{x^8y^{15}z^{17}}\right)^2 = 32000xyz$$

Suy ra $20xyzP^2 \geq 32000xyz$

Hay $P \geq 40$

Vậy $\min P = 40$, đạt được khi $x = y = z$. Chú ý rằng $12x + 5y + 3z = 20xyz$ nên $20x = 20x^3$, suy ra $x = y = z = 1$, hay $\tan A = 4, \tan B = \frac{5}{3}, \tan C = 1$, tức là $A = \arctan 4, B = \arctan \frac{5}{3}, C = \arctan 1$.

LỜI GIẢI 2.

Ta sẽ cố gắng đưa bất đẳng thức về một biến bằng kỹ thuật khảo sát hàm số

Chú ý rằng $\tan A + \tan B + \tan C = \tan A \tan B \tan C$ nên ta chuyển về dạng đại số bằng cách đặt $\tan A = x, \tan B = y, \tan C = z$ thì bài toán được viết lại như sau

“Cho các số dương x, y, z sao cho $x + y + z = xyz$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $P = 2x + 9y + 17z$ ”

Từ điều kiện $x + y + z = xyz$, suy ra $z = \frac{x+y}{xy-1}, (xy > 1)$, thay vào P ta được

$$P = 2x + 9y + \frac{17(x+y)}{xy-1}$$

Xét $f(x) = 2x + \frac{17(x+y)}{xy-1}, x > \frac{1}{y}$ với y là tham số dương

Ta có $f'(x) = \frac{2x^2y^2 - 4xy - 17y^2 - 15}{(xy-1)^2}$ trên $\left(\frac{1}{y}; +\infty\right)$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x_0 = \frac{1}{y} + \frac{\sqrt{34(y^2+1)}}{2y}$$

Khi qua x_0 thì hàm số đổi dấu từ $-$ sang $+$ nên $f(x)$ đạt cực tiểu tại x_0

Từ đó

$$P = f(x) + 9y \geq f(x_0) + 9y = g(y)$$

Xét

$$g(y) = 9y + \frac{19}{y} + 2 \frac{\sqrt{34(y^2+1)}}{y}$$

$$g'(y) = 9 - \frac{19}{y^2} - \frac{68}{y^2 \sqrt{34(y^2+1)}}$$

$$g'(y) = 0 \Leftrightarrow (9y^2 - 19) \sqrt{34(y^2+1)} = 68 \Leftrightarrow y_0 = \frac{5}{3}$$

Từ đó lập bảng biến thiên, ta thấy hàm số đổi dấu từ $-$ sang $+$ khi đi qua y_0 nên $g(y)$ đạt cực tiểu tại y_0 và $g(y_0) = 40$

$$\text{Vậy } P \geq g(y) \geq g\left(\frac{5}{3}\right) \geq 40$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = 4, y = \frac{5}{3}, z = 1$.

NHẬN XÉT. Đây là bài toán khá hay có dạng giống với một bài toán trong kì thi *VNTST* 2001:

“ Cho các số thực dương a, b, c sao cho $21ab + 2bc + 8ca \leq 12$. Tìm giá trị nhỏ nhất của

$$P = \frac{1}{a} + \frac{2}{b} + \frac{3}{c} ”$$

nhưng với yếu tố lượng giác đã “*lược bỏ*” đi dữ kiện quan trọng của bài toán 5 là $\tan A + \tan B + \tan C = \tan A \tan B \tan C$

BÀI 6. Cho các số thực không âm a, b, c . Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = (ab + bc + ca) \left(\frac{1}{(2a-b)^2} + \frac{1}{(2b-c)^2} + \frac{1}{(2c-a)^2} \right)$$

LỜI GIẢI. Không mất tính tổng quát, giả sử $c = \min\{a, b, c\}$ thì

$$\frac{1}{(2b-c)^2} \geq \frac{1}{4b^2} \Leftrightarrow 4b^2 \geq 4b^2 - 4bc + c^2 \Rightarrow c(4b-c) \geq 0 \text{ (đúng);}$$

$$\frac{1}{(2c-a)^2} \geq \frac{1}{a^2} \Leftrightarrow a^2 \geq a^2 - 4ac + 4c^2 \Leftrightarrow 4c(a-c) \geq 0 \text{ (đúng).}$$

Vì $a, b, c \geq 0$ nên $ab + bc + ca \geq ab$. Do đó

$$P \geq ab \left(\frac{1}{(2a-b)^2} + \frac{1}{4b^2} + \frac{1}{a^2} \right) = \frac{ab}{(2a-b)^2} + \frac{a}{4b} + \frac{b}{a} = \frac{\frac{a}{b}}{\left(2\frac{a}{b}-1\right)^2} + \frac{a}{4b} + \frac{b}{a} = \frac{t}{(2t-1)^2} + \frac{t}{4} + \frac{1}{t},$$

với $t = \frac{a}{b}$

$$\text{Xét } f(t) = \frac{t}{(2t-1)^2} + \frac{t}{4} + \frac{1}{t} \left(t \neq \frac{1}{2}; t > 0 \right)$$

$$f'(t) = \frac{(2t-1)^2 - 4t(2t-1)}{(2t-1)^4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{t^2} = \frac{-2t-1}{(2t-1)^3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{t^2}$$

$$f'(t) = 0 \Leftrightarrow 8t^5 - 12t^4 - 34t^3 + 43t^2 - 24t + 4 = 0$$

$$\begin{cases} t_1 = -2,097878850 \\ t_2 = 0,2626067385 \text{ (} t_1 \text{ loại vì } t_1 < 0 \text{)} \\ t_3 = 2,515979352 \end{cases}$$

(dùng máy tính bỏ túi hoặc **Maple** để được kết quả chính xác, chú ý dùng **Maple** kiểm tra thì phương trình trên chỉ có 3 nghiệm).

Từ đó lập bảng biến thiên, ta thấy hàm số đổi dấu từ $-$ sang $+$ khi đi qua t_2 và t_3 , nhưng vì $f(t_2) = 5,038581952 \dots, f(t_3) = 1,181220153 \dots$

Vậy, $\min P = \min f(t) = f(t_3) = 1,181220153 \dots$

Đạt được khi và chỉ khi $\begin{cases} c = 0 \\ a = b.t_3 \end{cases}$ và các hoán vị.

NHẬN XÉT. Cách chứng minh trên chính là dồn biến về biên $f(a, b, c) \geq f(a, b, 0)$ rồi đưa về hàm một biến và sử dụng kĩ thuật khảo sát hàm số. Tuy nhiên với lời giải trên chúng ta chỉ có thể giải quyết được được bài toán:

“Tìm giá trị nhỏ nhất của

$$(ab + bc + ca) \left(\frac{1}{(ka-b)^2} + \frac{1}{(kb-c)^2} + \frac{1}{(kc-a)^2} \right)''$$

trong phạm vi $k \in \left[\frac{1}{2}; 2\right]$ mà thôi. Vì thế đây sẽ là một vấn đề mở cho các bạn tìm một lời giải mở rộng cho toàn trục số k .

BÀI 7. Cho x, y, z là độ dài 3 cạnh của một tam giác có diện tích S , và các số thực bất kì a, b, c sao cho $4xyz = a^2x + b^2y + c^2z + abc$. Chứng minh rằng

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq 4\sqrt{3}S$$

LỜI GIẢI. Ta sẽ sử dụng các bổ đề sau

BỔ ĐỀ 1. Với $\alpha + \beta + \gamma = \pi$, thì $\sin^2 \frac{\alpha}{2} + \sin^2 \frac{\beta}{2} + \sin^2 \frac{\gamma}{2} + 2\sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{\gamma}{2} = 1$

Chứng minh. Ta có

$$\begin{aligned} \sin^2 \frac{\alpha}{2} + \sin^2 \frac{\beta}{2} + \sin^2 \frac{\gamma}{2} &= \frac{1 - \cos \alpha}{2} + \frac{1 - \cos \beta}{2} + \sin^2 \frac{\gamma}{2} = 1 - \cos \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \cos \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right) + \sin^2 \frac{\gamma}{2} \\ &= 1 - \sin \frac{\gamma}{2} \left(\cos \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) - \cos \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right) \right) = 1 - 2\sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{\gamma}{2} \end{aligned}$$

Do đó, bổ đề 1 được chứng minh.

BỔ ĐỀ 2. Với $\alpha + \beta + \gamma = \pi$, và các số thực bất kì x, y, z thì

$$2yz \cos \alpha + 2zx \cos \beta + 2xy \cos \gamma \leq x^2 + y^2 + z^2$$

BỔ ĐỀ 3. Với x, y, z là độ dài 3 cạnh của một tam giác có diện tích S thì

$$2(xy + yz + zx) - x^2 - y^2 - z^2 \geq 4\sqrt{3}S$$

Bổ đề 2 và 3 là hai bổ đề đã quá quen thuộc với chúng ta nên chúng tôi không chứng minh lại nữa. Trở lại bài toán.

Từ giả thiết $4xyz = a^2x + b^2y + c^2z + abc$, ta có

$$\frac{abc}{4xyz} + \frac{a^2}{4yz} + \frac{b^2}{4xz} + \frac{c^2}{4xy} = 1$$

Nên theo bổ đề 1, tồn tại các góc α, β, γ sao cho $\alpha + \beta + \gamma = \pi$ với $\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{a}{2\sqrt{yz}}, \sin \frac{\beta}{2} = \frac{b}{2\sqrt{zx}},$

$$\sin \frac{\gamma}{2} = \frac{c}{2\sqrt{xy}}$$

Áp dụng bổ đề 2, ta có

$$\begin{aligned} 4yz \sin^2 \frac{\alpha}{2} + 4zx \sin^2 \frac{\beta}{2} + 4xy \sin^2 \frac{\gamma}{2} &= 2yz(1 - \cos \alpha) + 2zx(1 - \cos \beta) + 2xy(1 - \cos \gamma) \\ &= 2(xy + yz + zx) - 2(yz \cos \alpha + zx \cos \beta + xy \cos \gamma) \geq 2(xy + yz + zx) - x^2 - y^2 - z^2 \end{aligned}$$

Từ đây kết hợp với bổ đề 3 với chú ý rằng

$$4yz \sin^2 \frac{\alpha}{2} + 4zx \sin^2 \frac{\beta}{2} + 4xy \sin^2 \frac{\gamma}{2} = a^2 + b^2 + c^2$$

Ta thu được $a^2 + b^2 + c^2 \geq 4\sqrt{3}S$

Vậy, ta có điều phải chứng minh.

—HẾT—

Copyright © 2009 by *VIC Staff* and <http://www.vnineqmath.tk>