LỜI GIẢI ĐỀ LẦN 1

Phạm Hy Hiếu – Toán PTNK 07-10

BÀI 1.

Tìm tất cả các giá trị của b sao cho tồn tại a để hệ phương trình sau có nghiệm (x, y):

$$\begin{cases} (x-1)^2 + (y+1)^2 = b \\ y = x^2 + (2a+1)x + a^2 \end{cases}$$

Lời giải:

Ta có:

$$\begin{cases} (x-1)^2 + (y+1)^2 = b \\ y = x^2 + (2a+1)x + a^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)^2 + (y+1)^2 = b & (1) \\ y + a = (x+a)^2 + (x+a) & (2) \end{cases}$$

Rõ ràng từ (1) ta phải có $b \geq 0$.

Xem mỗi phương trình của hệ là một họ đường cong với tham số a, b trong mặt phẳng tọa độ Descartes Oxy. Từ (1) suy ra nghiệm (x, y) của hệ phải nằm trên đường tròn $\left(I, \sqrt{b}\right)$. Mặt khác, trong mặt phẳng Oxy xét parabol $(P): y = x^2 + x$ và xét vector $\overrightarrow{v(a)} = (-a, -a)$, ta có phép tịnh tiến $\mathcal{T}_{\overrightarrow{v(a)}}: (P) \mapsto (P'_a): y + a = (x+a)^2 + (x+a)$. Hơn nữa, rõ ràng hệ có nghiệm khi và chỉ khi (I) và (P'_a) cắt nhau hoặc tiếp xúc với nhau. Vậy ta cần xác định b sao cho tồn tại một số thực a để (P'_a) có điểm chung với (I).

Xét đường thẳng $(d): y = x$, ta thấy vector chỉ phương của (d) là $\vec{u} = (1,1)$ nên $\vec{u} \parallel \overrightarrow{v(a)}$. Mặc khác, (d) tiếp xúc với (P) vì phương trình hoành độ giao điểm của (d) và (P) là $x = x^2 + x$, chỉ có một nghiệm duy nhất là $x = 0$ nên $(P'_a) \equiv \mathcal{T}_{\overrightarrow{v(a)}}\left((P)\right)$ cũng luôn luôn tiếp xúc với (d). Hơn nữa, (P) thuộc nửa mặt phẳng bờ (d) không chứa I nên tất cả các (P'_a) cũng thế.

Tiếp theo, khoảng cách từ I đến đường thẳng (d) là:

$$d_{I\backslash(d)} = \frac{|1-(-1)|}{\sqrt{1^2+1^2}} = \sqrt{2}$$

Bây giờ ta xét các khả năng của b:

- Nếu $\sqrt{b} < \sqrt{2} = d_{I\backslash(d)}$ thì $\left(I, \sqrt{b}\right)$ sẽ luôn thuộc nửa mặt phẳng bờ (d) không chứa (P'_a) nào cả, hơn nữa $\left(I, \sqrt{b}\right) \cap (d) = \emptyset$ nên $(I) \cap (P'_a) = \emptyset$, vậy nên không tồn tại a để hệ có nghiệm.
- Nếu $\sqrt{b} \geq \sqrt{2}$ thì (I) sẽ luôn có giao điểm với (d). Giả sử giao điểm đó là $K(k, k)$ thế thì (P'_{-k}) tiếp xúc với (d) tại K (tính chất của phép tịnh tiến). Suy ra tồn tại $a = -k$ để hệ có nghiệm.

Vậy tất cả các giá trị cần tìm của b là $b \geq 2$.

BÀI 2.

Dãy số$\{u_n\}_{n=0}^{\infty}$ xác định bởi $x_1 = 3, x_{n+1} = \dfrac{x_n^2 + 3}{3x_n}$. Chứng minh $\{x_n\}$ hôi tụ và tìm $\lim x_n$.

Lời giải:

Ta có $x_1 = 3 > 1$. Giả sử $x_n > 1$, ta có:

$$x_{n+1} > 1 \Leftrightarrow x_n^2 + 3 > 3x_n \Leftrightarrow x_n^2 - 3x_n + 3 \geq 0 \text{ (đúng vì } \Delta = 3^2 - 4 \cdot 3 < 0)$$

Vậy theo nguyên lý qui nạp thì $x_n > 1$ với mọ $in = 1,2, \ldots$

Xét hàm số:

$$f(x) = \frac{x^2 + 3}{3x} = \frac{x}{3} + \frac{1}{x}$$

Ta có $x_{n+1} = f(x_n)$. Hơn nữa f khả vi trên $(1, +\infty)$ với $x > 1$ thì:

$$|f'(x)| = \left|\frac{1}{3} - \frac{1}{x^2}\right| < \frac{2}{3} < 1$$

Theo định lý giá trị trung bình Largrange thì với mọi $y > x > 1$ đều tồn tại $c \in (x, y)$ thỏa:

$$f'(c) = \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \Rightarrow |f(x) - f(y)| < |f'(c)(x - y)| < \frac{2}{3}|x - y| = q|x - y| \; (q = \frac{2}{3} < 1)$$

Từ đó:

$$\begin{aligned}
|x_{n+1} - x_n| &< q|x_n - x_{n-1}| < q^2|x_{n-1} - x_{n-2}| < \cdots < q^{n-1}|x_2 - x_1| \\
\Rightarrow |x_m - x_n| &= |(x_m - x_{m-1}) + (x_{m-1} - x_{m-2}) + \cdots + (x_{n+1} - x_n)| \\
&\leq |x_m - x_{m-1}| + |x_{m-1} - x_{m-2}| + \cdots + |x_{n+1} - x_n| \\
&< |x_2 - x_1| \cdot (q^{n-1} + q^n + \cdots + q^{m-2}) \\
&= q^{n-1} \cdot |x_2 - x_1| \cdot (1 + q + \cdots + q^{m-n+1})
\end{aligned}$$

Do $0 < q < 1$ nên $\lim q^n = 0$, vậy thì $\forall \varepsilon > 0, \exists N, \forall m, n > N$ thì $|x_m - x_n| < \varepsilon$. Vậy theo tiểu chuẩn Cauchy thì $\{x_n\}$ có giới hạn hữu hạn khi $n \to \infty$.

Đặt $\lim x_n = L$ thì L là nghiệm duy nhất của phương trình $f(L) = L$ trên $(1, +\infty)$ tức là:

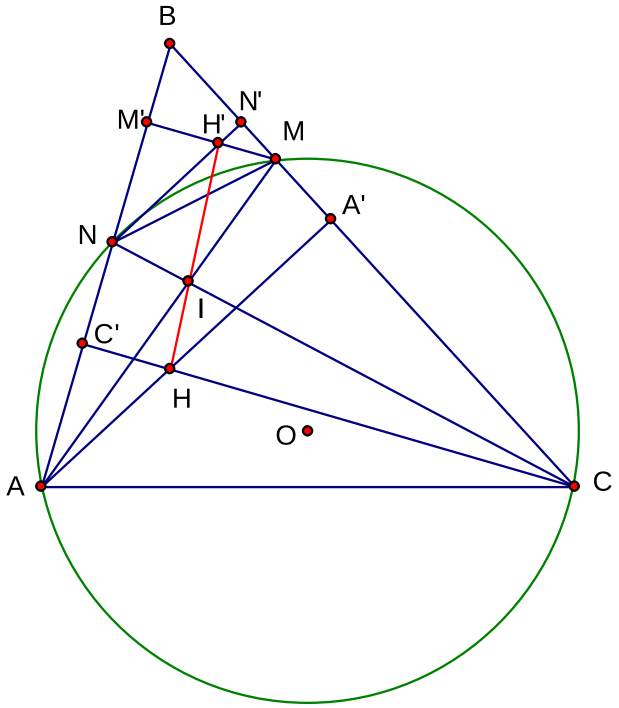
$$L = \frac{L}{3} + \frac{1}{L} \Leftrightarrow \frac{2L}{3} = \frac{1}{L} \Leftrightarrow L = \sqrt{\frac{3}{2}}$$

Vây $\lim x_n = \sqrt{\frac{3}{2}}$.

BÀI 3.

Trên các cạnh AB và BC của tam giác ABC lấy các điểm M và N tương ứng. Chứng minh rằng bốn điểm A, M, N và C nằm trên một đường tròn khi và chỉ khi giao điểm các đoạn thẳng AN và CM nằm trên đoạn thẳng đi qua trực tâm các tam giác ABC và BMN.

Lời giải:



Ký hiệu $I \equiv AM \cap CN$. Gọi AA', CC', MM', NN' lần lượt là các đường cao của tam giác BAC và tam giác BMN. Ta có A, C, A', C' đồng viên nên $\overline{HA} \cdot \overline{HA'} = \overline{HC} \cdot \overline{HC'}$, tức là $\mathcal{P}_{H;[CM]} = \mathcal{P}_{H;[AN]}$ (ở đây ta dùng ký hiệu $[UV]$ để chỉ đường tròn đường kính UV). Mặt khác ta cũng có M, N, M', N' đồng viên nên $\overline{H'M} \cdot \overline{H'M'} = \overline{H'N} \cdot \overline{H'N'}$, tức là $\mathcal{P}_{H';[CM]} = \mathcal{P}_{H';[AN]}$. Từ hai kết luận trên ta suy ra HH' là trục đẳng phương của $[CM]$ và $[AN]$. Vậy:

$$I \in HH' \Leftrightarrow \mathcal{P}_{I;[CM]} = \mathcal{P}_{I;[AN]} \Leftrightarrow \overline{IC} \cdot \overline{IM} = \overline{IA} \cdot \overline{IN} \Leftrightarrow A, C, M, N \text{ đồng viên}$$

Bài toán được chứng minh hoàn toàn.

BÀI 4.

Các số nguyên dương a, b, c, d thỏa mãn điều kiện $a^2 + ab + b^2 = c^2 + cd + d^2$. Chứng minh rằng $a + b + c + d$ là hợp số.

Lời giải:

Từ giả thiết ta suy ra:

$$(a+b)^2 - ab = (c+d)^2 - cd \Leftrightarrow (a+b+c+d)(a+b-c-d) = ab - cd$$

Giả sử ngược lại, $p = a + b + c + d$ là số nguyên tố. Thế thì từ $ab - cd = p(a + b - c - d)$ ta có:

$$ab - cd \,\vdots\, p \Rightarrow ab + c(a+b+c) \equiv 0 \pmod{p} \Rightarrow (c+a)(c+b) \equiv 0 \pmod{p}$$

Nhưng điều này là vô lý vì p nguyên tố và $a, b, c, d > 0$ nên $0 < c + a, c + b < p$, suy ra $(c + a, p) = (c + b, p) = 1$, vậy không thể có $(c + a)(c + b) \equiv 0 \pmod{p}$.

Vậy $a + b + c + d$ là hợp số (đpcm).

BÀI 5.

Xét một dãy số gồm các số 0 và các số 1. Xét các cặp số trong dãy này (không nhất thiết kề nhau), trong đó số bên trái là số 1 và số bên phải là số 0. Giả sử trong số các cặp này có đúng M cặp mà giữa số 1 và số 0 của cặp này có một số chẵn các số và có đúng N cặp mà giữa số 1 và số 0 của cặp này có một số lẻ số. Chứng minh rằng $M \geq N$.

Lời giải:

Với góc độ khảo sát của bài toán, ta thấy nếu bỏ một cặp số 11 hoặc 00 trong xâu nhị phân đã cho thì không có gì thay đổi. Thật vậy, nếu ta bỏ đi cặp 11 thì tất cả các số đứng trước nó không thể tham gia vào các cặp được liệt kê trong M và N, còn ở sau nó, cứ mỗi một số 0 thì tạo với số 1 đứng trước một phần tử được đến trong M và tạo với số 1 đứng sau một phần tử được đến trong N hoặc ngược lại (vì số chữ số ở giữa số 0 này với hai số 1 đứng cạnh nhau luôn khác tính chẵn lẻ), suy ra nếu ta bỏ cặp số 11 ấy đi thì hiệu $M - N$ không đổi. Lý luận tương tự với việc bỏ cặp số 00. Vậy ta chỉ cần xét các xâu nhị phân không có hai bit giống nhau đứng cạnh nhau. Hơn nữa, số 0 đứng đầu xâu và số 1 đứng cuối xâu ở bài toán này là vô nghĩa vì nó không thể tham gia vào việc tạo nên các cặp số được đếm trong M và N nên ta chỉ phải xét các xâu nhị phân có dạng 101010 ... 10. Nhưng lúc này rõ ràng $N = 0$ (vì số các số đứng giữa một số 1 bất kỳ và một số 0 bất kỳ luôn là số chẵn, do chúng là 0101 ... 01) nên ta hiển nhiên có đpcm.