

## Lời giải đề lần hai

Ngày 12 tháng 12 năm 2009

PHẠM HY HIẾU

**Bài toán 0.1.** Cho  $a, b, c > 0$ . Chứng minh bất đẳng thức:

$$\frac{a+b}{a+7b+c} + \frac{b+c}{b+7c+a} + \frac{c+a}{c+7a+b} \geq \frac{2}{3} \quad (1)$$

*Lời giải.* Đặt  $(x, y, z) := (a+7b+c, b+7c+a, c+7a+b)$ , ta có:

$$(a+b, b+c, c+a) = \left( \frac{7(z+x)-2y}{54}, \frac{7(x+y)-2z}{54}, \frac{7(y+z)-2x}{54} \right)$$

Từ đó:

$$\begin{aligned} (1) &\Leftrightarrow \frac{7(z+x)-2y}{54x} + \frac{7(x+y)-2z}{54y} + \frac{7(y+z)-2x}{54z} \geq \frac{2}{3} \\ &\Leftrightarrow \frac{7x-2z}{y} + \frac{7y-2x}{z} + \frac{7z-2y}{x} \geq 15 \\ &\Leftrightarrow \frac{7x+2y-2z}{y} + \frac{7y+2z-2x}{z} + \frac{7z+2x-2y}{x} \geq 21 \end{aligned}$$

Giả sử  $x = \max\{x, y, z\}$ , từ định nghĩa của  $(x, y, z)$  ta suy ra  $x < y + z$ .  
Vậy  $x, y, z$  là số đo ba cạnh của một tam giác nào đó. Suy ra:

$$\min\{7x+2y-2z, 7y+2z-2x, 7z+2x-2y\} > 0$$

Theo bất đẳng thức Cauchy - Schwarz ta có:

$$\begin{aligned} \sum_{cyc} \frac{7x+2y-2z}{y} &= \sum_{cyc} \frac{(7x+2y-2z)^2}{y(7x+2y-2z)} \\ &\geq \frac{(7(x+y+z))^2}{\sum_{cyc} y(7x+2y-2z)} \\ &= \frac{49(x+y+z)^2}{2(x^2+y^2+z^2)+5(xy+yz+zx)} \end{aligned}$$

Vậy ta chỉ cần chứng minh:

$$\begin{aligned}\frac{49(x+y+z)^2}{2(x^2+y^2+z^2)+5(xy+yz+zx)} &\geq 21 \\ \Leftrightarrow x^2+y^2+z^2-(xy+yz+zx) &\geq 0\end{aligned}$$

Bất đẳng thức sau cùng hiển nhiên đúng nên ta có ngay đpcm.  $\square$

**Bài toán 0.2.** *Tìm tất cả các hàm số  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  thỏa mãn hai điều kiện:*

1.  $|\{\frac{f(x)}{x} | x \in \mathbb{R}^*\}| < +\infty$ .
2.  $f(x-1-f(x)) = f(x) - x - 1, \forall x \in \mathbb{R}$ .

*Lời giải.* Đặt  $g(x) = x - f(x)$ , thế thì  $f(x) = x - g(x)$ . Ta có:

$$(1) \Rightarrow |\{\frac{g(x)}{x} | x \in \mathbb{R}^*\}| = |\{1 - \frac{f(x)}{x} | x \in \mathbb{R}^*\}| < +\infty \quad (i)$$

Mặt khác:

$$\begin{aligned}(2) &\Leftrightarrow f((x-f(x))-1) = (f(x)-x)-1 \\ &\Leftrightarrow f(g(x)-1) = -g(x)-1 \\ &\Leftrightarrow (g(x)-1)-g(g(x)-1) = -g(x)-1 \\ &\Leftrightarrow 2g(x) = g(g(x)-1) \quad (ii)\end{aligned}$$

Ta sẽ chứng minh  $g(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$ . Thật vậy, giả sử ngược lại rằng tồn tại  $x_0$  sao cho  $g(x_0) \neq 0$ . Ta sẽ chứng minh rằng tồn tại vô hạn số thực  $x$  sao cho  $g(x) \neq 0$ . Thật vậy, xét dãy số  $\{u_n\}_{n=0}^\infty$  xác định bởi:

$$\begin{cases} u_0 = x_0 \\ u_{n+1} = g(u_n) - 1, \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Ta có:

$$g(u_{n+1}) = g(g(u_n) - 1) = 2g(u_n) \Rightarrow g(u_{n+1}) = 2g(u_n) = \dots = 2^{n+1}g(u_0).$$

Mà  $g(u_0) \neq 0$  nên  $|\{g(u_n) | n \in \mathbb{N}\}| = +\infty$ . Hơn nữa, giả sử có chỉ số  $n$  nào đó sao cho  $u_n = 0$  thì  $g(u_{n-1}) - 1 = u_n = 0$ , suy ra:

$$g(0) = g(g(u_{n-1}) - 1) = 2g(u_{n-1}) = 2$$

Từ đó  $u_{n+1} = g(u_n) - 1 = g(0) - 1 = 1$ . Do vậy,  $\{u_n\}$  không thể là dãy dừng với hằng số dừng là 0. Nói cách khác,  $\forall N > 0, \exists n > N : u_n \neq 0$ .

Vậy nếu  $|\{u_n | n \in \mathbb{N}\}| < +\infty$  thì  $|\{\frac{g(u_n)}{u_n} | n \in \mathbb{N}\}| = +\infty$ , mâu thuẫn với (i).

Do đó, nhận xét của ta được chứng minh.

Bây giờ quay lại với (ii), đặt  $\mathbb{A} := \{x \in \mathbb{R} | g(x) \neq 0\}$ , cố nhiên nếu  $x \in \mathbb{A}$  thì  $g(x) - 1 \in \mathbb{A}$ . Ta có:

$$\begin{aligned} (ii) \Rightarrow \frac{g(x) - 1}{2g(x)} &= \frac{g(x) - 1}{g(g(x) - 1)} \\ \Rightarrow -\frac{1}{2g(x)} &= \frac{g(x) - 1}{g(g(x) - 1)} - \frac{1}{2}, \forall x \in \mathbb{A} \end{aligned}$$

Nhưng điều này là vô lý, do từ (i) thì  $|\{\frac{g(x) - 1}{g(g(x) - 1)} - \frac{1}{2} | x \in \mathbb{R}^*\}| < +\infty$ ,

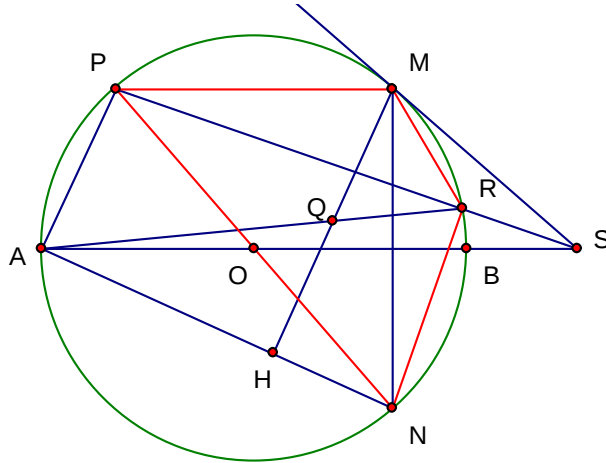
trong khi đó  $|\{g(u_n) | n \in \mathbb{N}\}| = +\infty$  nên  $|\{\frac{1}{g(x)} | x \in \mathbb{A}\}| = +\infty$ .

Mâu thuẫn trên cho thấy điều giả sử là sai và do đó  $g(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$ , tức là  $f(x) = x, \forall x \in \mathbb{R}$ . Thử lại ta thấy hàm này thỏa yêu cầu đề bài.

Vậy hàm số duy nhất thỏa mãn yêu cầu đề bài là  $f(x) = x$ .

**Bài toán 0.3.** Cho đường tròn  $(O)$  có đường kính  $AB$ .  $MN$  là dây cung không đi qua  $O$  và vuông góc với  $AB$ . Gọi  $H$  là hình chiếu của  $M$  lên  $AN$  và  $Q$  là trung điểm của  $MH$ .  $AQ \cap (O) \equiv R$  và  $NO \cap (O) \equiv P$ . Chứng minh rằng  $AB, PR$  và tiếp tuyến tại  $M$  của đường tròn  $(O)$  đồng quy.

Lời giải.



Ta có  $AP \parallel MH$  vì chúng cùng vuông góc với  $AN$ , mà  $Q$  là trung điểm của  $MH$  nên  $(AM, AN, AP, AQ)$  là chùm điều hòa. Suy ra  $MPNR$  là tứ giác

điều hòa. Do đó, tiếp tuyến tại  $M, N$  của đường tròn  $(O)$  cắt nhau tại một điểm  $S \in PR$ . Nhưng  $MN \perp AB$  và  $SM, SN$  tiếp xúc  $(O)$  nên  $S \in AB$ . Từ đó ta có  $PR, AB$  và tiếp tuyến tại  $M$  của  $(O)$  đồng quy tại  $S$ .  $\square$

**Bài toán 0.4.** Cho  $p$  là một số nguyên tố có dạng  $4k + 3$ . Tính tổng các nghiệm trong  $S = \{1, 2, \dots, p - 1\}$  của phương trình  $x^4 \equiv 4 \pmod{p} (*)$ .

*Lời giải.* Ta sử dụng ký hiệu  $\left(\frac{a}{p}\right)$  với  $p$  là một số nguyên tố lẻ để chỉ ký hiệu Legendre. Ta có  $p = 4k + 3$  nên:

$$\left(\frac{-1}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}} = (-1)^{\frac{4k+3-1}{2}} = (-1)^{2k+1} = -1$$

Suy ra:

$$\begin{aligned} x^4 - 4 \equiv 0 \pmod{p} &\Leftrightarrow (x^2 - 2)(x^2 + 2) \equiv 0 \pmod{p} \\ &\Leftrightarrow x^2 - 2 \equiv 0 \pmod{p} \vee x^2 + 2 \equiv 0 \pmod{p} \end{aligned}$$

Tuy nhiên  $\left(\frac{-1}{p}\right) = -1$  nên  $\left(\frac{2}{p}\right) = 1$  và  $\left(\frac{-2}{p}\right) = -1$  hoặc ngược lại,

$\left(\frac{2}{p}\right) = -1$  và  $\left(\frac{-2}{p}\right) = 1$ , tức là chỉ có một trong hai phương trình

$x^2 - 2 \equiv 0 \pmod{p}$  hay  $x^2 + 2 \equiv 0 \pmod{p}$  có nghiệm  $\pmod{p}$ .

Vậy phương trình  $(*)$  luôn có hai nghiệm  $\pmod{p}$  là  $x_1, x_2$  thỏa mãn điều kiện  $x_1 + x_2 \equiv 0 \pmod{p}$ , bởi vì nếu  $x^2 \equiv \pm 2 \pmod{p}$  thì  $(-x)^2 \equiv \pm 2 \pmod{p}$ . Gọi  $x_1^*, x_2^*$  là các số trong  $S$  cùng dư với  $x_1, x_2$  theo  $\pmod{p}$ . Vì

$x_1^*, x_2^* \in S$  nên  $x_1^* + x_2^* < 2(p - 1)$ , mặt khác  $x_1^* + x_2^* \equiv p \pmod{p}$  nên  $x_1^* + x_2^* = p$ .

Do đó, tổng các nghiệm (hai nghiệm) của phương trình  $(*)$  trong  $S$  là  $p$ .

**Bài toán 0.5.** Cho một  $n$  giác lồi  $n \geq 4$  không có ba đường chéo nào đồng quy.

1. Tìm số giao điểm của các đường chéo của đa giác?
2. Tìm số miền bên trong đa giác được các đường chéo chia thành?

*Lời giải.*

1. Tìm số giao điểm của các đường chéo của đa giác?

Gọi  $f(n)$  là số giao điểm của các đường chéo của đa giác. Ta thấy hiển nhiên  $f(4) = 1$ . Xét đỉnh  $A_{n+1}$  của đa giác lồi  $n + 1$  cạnh  $A_1 A_2 \dots A_{n+1}$ . Rõ ràng với mọi  $1 \leq i < j < k \leq n$ , vì  $A_1 A_2 \dots A_{n+1}$  là đa giác lồi nên  $A_{n+1}$  không thể

nằm ở miền trong tam giác  $\triangle A_i A_j A_k$  hoặc nằm trong các góc đối đỉnh với các góc trong của tam giác  $\triangle A_i A_j A_k$ . Do vậy, có một và chỉ một cặp đoạn thẳng trong ba cặp  $(A_{n+1} A_i, A_j A_k)$ ,  $(A_{n+1} A_j, A_k A_i)$  và  $(A_{n+1} A_k, A_i A_j)$  cắt nhau, tùy vào việc  $A_{n+1}$  nằm trong góc  $\angle A_i$ ,  $\angle A_j$  hay  $\angle A_k$ . Hơn nữa, do tính lồi, các đoạn  $A_{n+1} A_t$  có giao với các cạnh của tam giác  $\triangle A_i A_j A_k$  không thể là các cạnh  $A_{n+1} A_n$  và  $A_{n+1} A_1$  của đa giác, và vì thế, chúng phải là các đường chéo của đa giác. Do đó, kết hợp với giả thiết không có ba đường chéo nào đồng quy, ta thấy nếu thêm đỉnh  $A_{n+1}$  vào thì số giao điểm của các đường chéo của đa giác  $A_1 A_2 \dots A_n$  với  $A_{n+1} A_t$  ( $2 \leq t \leq n-1$ ) là  $\binom{n}{3}$ . Mặt khác ta có  $f(4) = 1 = \binom{4}{1}$  nên giả sử  $f(n) = \binom{n}{4}$  thì:

$$f(n+1) = f(n) + \binom{n}{3} = \binom{n}{4} + \binom{n}{3} = \binom{n+1}{4}.$$

Vậy theo *nguyên lý quy nạp* thì  $f(n) = \binom{n}{4}$ .

2. Tìm số miền bên trong đa giác được các đường chéo chia thành? Gọi  $g(n)$  là số miền bên trong đa giác được các đường chéo chia thành. Ta có  $g(4) = 4$ . Xét đa giác lồi  $n+1$  đỉnh là  $A_1 A_2 \dots A_{n+1}$ . Ta thấy với mỗi  $2 \leq k \leq n-1$ , các đường chéo  $A_{n+1} A_k$  bị các đường chéo  $A_i A_j$  cắt ( $1 \leq i \leq k-1$  và  $k+1 \leq j \leq n$ ) tại  $(k-1)(n-k)$  giao điểm phân biệt (do giả thiết không có ba đường chéo nào đồng quy). Các giao điểm này chia đoạn thẳng  $A_{n+1} A_k$  thành  $(k-1)(n-k) + 1$  đoạn thẳng nhỏ hơn và mỗi đoạn thẳng này làm cho số miền của đa giác lồi tăng thêm 1. Hơn nữa, nếu không kể đến các đường chéo chứa đỉnh  $A_{n+1}$  thì số miền của đa giác  $A_1 A_2 \dots A_{n+1}$  đã là  $g(n) + 1$  vì chúng bao gồm  $g(n)$  miền của đa giác lồi  $A_1 A_2 \dots A_n$  và thêm miền  $A_{n+1} A_n A_1$ . Các lý luận trên cho ta hệ thức truy hồi:

$$\begin{aligned} g(n+1) &= g(n) + 1 + \sum_{k=2}^{n-1} ((k-1)(n-k) + 1) \\ &= g(n) + 1 + (n-2) + \sum_{k=2}^{n-1} (k-1)(n-k) \\ &= g(n) + (n-1) + \frac{1}{2} \sum_{k=2}^{n-1} (((n-k) + (k-1))^2 - (n-k)^2 - (k-1)^2) \\ &= g(n) + (n-1) + \frac{(n-2)(n-1)^2}{2} - \frac{1}{2} \left( \sum_{k=2}^{n-1} (n-k)^2 + \sum_{k=2}^{n-1} (k-1)^2 \right) \\ &= g(n) + (n-1) + \frac{(n-2)(n-1)^2}{2} - \sum_{k=1}^{n-2} k^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
g(n+1) &= g(n) + (n-1) + \frac{(n-2)(n-1)^2}{2} - \frac{(n-1)(n-2)(2n-3)}{6} \\
&= g(n) + (n-1) + \frac{n(n-1)(n-2)}{6} \\
&= g(n) + (n-1) + \binom{n}{3}
\end{aligned}$$

Mặt khác chú ý rằng  $g(4) = 4 = \binom{4}{4} + \binom{3}{2}$  nên từ công thức truy hồi trên, sử dụng *nguyên lý quy nạp* ta suy ra:

$$g(n) = \binom{n}{4} + \binom{n-1}{2}$$

Đó là kết quả của bài toán.