

Lời giải đề lần bốn

Phạm Hy Hiếu - Toán PTNK 07 - 10

Bài toán 1. Với số nguyên dương n nào thì tồn tại đa thức:

$$P_n(x) = x^n + a_{n-1}x_{n-1} + \dots + a_1x + a_0$$

với hệ số thực sao cho với mọi x thuộc $\mathbb{R}$, $P_n(x) > -3$ đồng thời:

$$P_n(-2) = P_n(0) = P_n(2) = 0$$

Lời giải. Tại $n = 2$, rõ ràng không tồn tại đa thức $P_2(x)$ thỏa mãn yêu cầu đề bài, vì đa thức bậc hai và không đồng nhất 0 thì không thể có ba nghiệm phân biệt là $-2, 0, 2$. Tại $n = 4$, giả sử tồn tại đa thức thỏa mãn yêu cầu đề bài, thế thì ta có thể đặt:

$$P_4(x) = x(x-2)(x+2)(x-k)$$

Ta có:

$$\begin{aligned} P_4(1) > -3 &\Rightarrow -3(1-k) > -3 \Rightarrow 1-k < 1 \Rightarrow k > 0 \\ P_4(-1) > -3 &\Rightarrow 3(-1-k) > -3 \Rightarrow -1-k > -1 \Rightarrow k < 0 \end{aligned}$$

Mâu thuẫn! Vậy không tồn tại đa thức $P_4(x)$ thỏa mãn yêu cầu đề bài. Hơn nữa, với n lẻ ta có:

$$\lim_{n \rightarrow -\infty} P_{2k+1}(x) = -\infty$$

nên không thể có $P_{2k+1}(x) > -3$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Cuối cùng, với $n \geq 6$ và n là số chẵn, ta sẽ chỉ ra có đa thức dạng sau:

$$P_{2k}(x) = x^{2k-4}(x-2)^2(x+2)^2$$

thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Vậy các giá trị cần tìm của n là n chẵn và $n \geq 6$. □

Bài toán 2. Cho hàm số $f(x) = 2x - \sin x$. Chứng minh rằng f khả nghịch đồng thời f^{-1} có thể viết được dưới dạng tổng của một hàm tuyến tính với một hàm tuần hoàn.

Lời giải. Ta có f liên tục, khả vi cấp một trên $\mathbb{R}$ đồng thời:

$$f'(x) = 2 - \cos x > 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

vậy f tăng trên $\mathbb{R}$ và do đó, đơn ánh trên $\mathbb{R}$. Hơn nữa:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

nên do tính liên tục của f , ta suy ra f cũng toàn ánh trên $\mathbb{R}$.

Vậy f song ánh trên $\mathbb{R}$ và do đó, khả nghịch.

Đặt $g = f^{-1}$. Ta có:

$$x = f(g(x)) = 2g(x) - \sin g(x) \Rightarrow g(x) = \frac{x + \sin g(x)}{2}$$

Ta lại có:

$$\begin{aligned} f(x) &= 2x - \sin x \\ \Rightarrow f(x + 2\pi) &= 2x + 4\pi - \sin x \end{aligned}$$

Trừ theo vế hai đẳng thức trên ta có:

$$f(x + 2\pi) = f(x) + 4\pi$$

Thay x bởi $g(x)$ ta được:

$$f(g(x) + 2\pi) = x + 4\pi$$

Lấy g của hai vế ta có:

$$\begin{aligned} g(x) + 2\pi &= g(x + 4\pi) \\ \Rightarrow \frac{x + \sin g(x)}{2} + 2\pi &= \frac{x + 4\pi + \sin g(x + 4\pi)}{2} \\ \Rightarrow \sin g(x) &= \sin g(x + 4\pi) \end{aligned}$$

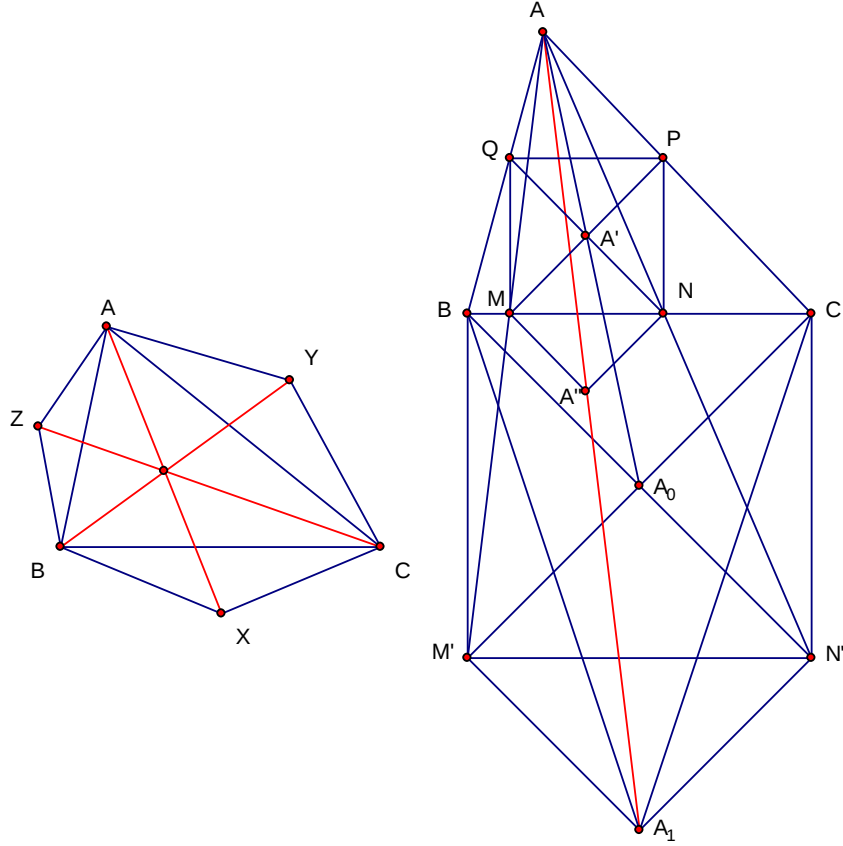
Do đó $h(x) = \sin g(x)$ là hàm tuần hoàn chu kỳ 4π và vì $g(x) = \frac{x + h(x)}{2}$ nên $g = f^{-1}$ có dạng tổng của một hàm tuyến tính với một hàm tuần hoàn.

Bài toán được chứng minh. $\square$

Bài toán 3. Cho $\triangle ABC$. Hình vuông $MNPQ$ nội tiếp $\triangle ABCA$ và có $M, N \in BC$. Gọi A' là tâm hình vuông và A'' là điểm đối xứng với A' qua BC . Các điểm B'', C'' xác định tương tự. Chứng minh rằng AA'', BB'', CC'' đồng quy.

Lời giải.

Trước hết ta chứng minh bổ đề sau:



Bổ đề. (Định lý Jacobi) Về phía ngoài $\triangle ABC$ ta dựng các tam giác $\triangle BXC, \triangle CYA, \triangle AZB$ đồng dạng với nhau và lần lượt cân tại X, Y, Z . Khi đó AX, BY, CZ đồng qui.

Chứng minh bổ đề. Từ giả thiết suy ra:

$$\angle XBC = \angle XCB = \angle YCA = \angle YAC = \angle ZAB = \angle ZBA = \alpha$$

Theo định lý sin ta có:

$$\frac{\sin \angle XAB}{\sin \angle XAC} = \frac{\frac{XC}{\sin \angle XAC}}{\frac{XB}{\sin \angle XAB}} = \frac{\frac{AX}{\sin \angle ACX}}{\frac{AX}{\sin \angle ABX}} = \frac{\sin (B + \alpha)}{\sin (C + \alpha)}$$

Lập các tỉ số tương tự và nhân chúng lại với nhau ta có:

$$\prod \frac{\sin \angle XAB}{\sin \angle XAC} = \prod \frac{\sin (B + \alpha)}{\sin (C + \alpha)} = 1$$

Vậy nên theo định lý Ceva thì AX, BY, CZ đồng quy. Bổ đề được chứng minh. $\square$

Vào bài. Xét phép vị tự:

$$\mathcal{H}\left(A, \frac{\overline{AB}}{\overline{AQ}}\right) : Q \mapsto B, P \mapsto C, M \mapsto M', N \mapsto N', A' \mapsto A_0, A'' \mapsto A_1$$

Ta có $BCN'M'$ là hình vuông nhận A_0 làm tâm, hơn nữa A_1 đối xứng với A_0 qua $M'N'$. Xác định các điểm B_1, C_1 tương tự thì $\triangle BA_1C, \triangle CA_1B, \triangle AB_1C$ là các tam giác cân tại A_1, B_1, C_1 và đồng dạng với nhau. Theo bổ đề trên thì AA_1, BB_1, CC_1 đồng quy. Bài toán được chứng minh. $\square$

Bài toán 4. Chứng minh rằng tồn tại vô hạn số nguyên dương n sao cho $10^n + 3$ là hợp số.

Lời giải. Ta có:

$$\begin{aligned} 10^0 &\equiv 1 \pmod{7}, 10^1 \equiv 3 \pmod{7}, 10^2 \equiv 2 \pmod{7} \\ 10^3 &\equiv 6 \pmod{7}, 10^4 \equiv 4 \pmod{7}, 10^5 \equiv 5 \pmod{7} \end{aligned}$$

Suy ra 10 là căn nguyên thủy modulo 7. Từ đó suy ra tồn tại $k \in \{1, 2, \dots, 6\}$ sao cho:

$$10^k + 3 \equiv 0 \pmod{7}$$

Xét $n_t = 6t + k$ ta có:

$$10^n + 3 \equiv 10^{6t+k} + 3 \equiv (10^6)^t \cdot 10^k + 3 \equiv 10^k + 3 \equiv 0 \pmod{7}$$

Vậy dãy số $\{10^{n_t} + 3\}_{t \in \mathbb{N}^*}$ gồm vô hạn hợp số. Bài toán được chứng minh. $\square$

Bài toán 5. Số nguyên dương n được gọi là tốt nếu nó có thể viết được dưới dạng:

$$n = a_1 + a_2 + \dots + a_k$$

Trong đó $a_i \in \mathbb{N}^*$ đồng thời:

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} = 1$$

Chứng minh rằng nếu ta thừa nhận các số từ 24 đến 56 đều là số tốt thì các số từ 57 trở đi cũng là số tốt.

Lời giải. Giả sử n là số tốt. Đặt $n = a_1 + a_2 + \dots + a_k$ với a_i là các số nguyên dương thỏa mãn:

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} = 1$$

Ta có:

$$\begin{aligned} 2n + 8 &= 4 + 4 + 2(a_1 + a_2 + \dots + a_k) \\ 2n + 9 &= 3 + 6 + 2(a_1 + a_2 + \dots + a_k) \end{aligned}$$

Hơn nữa:

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2a_1} + \frac{1}{2a_2} + \dots + \frac{1}{2a_n} = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{2a_1} + \frac{1}{2a_2} + \dots + \frac{1}{2a_n} = 1$$

Do đó, nếu n là số tốt thì $2n + 8$ và $2n + 9$ cũng là các số tốt. Do vậy nếu ta thừa nhận $24, 25, \dots, 56 = 2 \cdot 24 + 8$ là các số tốt thì $57, 58, \dots, 121 = 2 \cdot 56 + 9$ cũng sẽ là các số tốt. Tiếp tục lý luận đi lên như vậy suy ra mọi số nguyên dương từ 57 trở đi đều là số tốt. Bài toán được chứng minh. $\square$