

ĐÁP ÁN VÀ HƯỚNG DẪN CHẤM
MÔN TOÁN 9

(ĐỀ CHÍNH THỨC)

Câu 1: (2,5 điểm)

Ta có

$$2^{1975} = 2^{2 \cdot 987 + 1} = 2^{2 \cdot 987} \cdot 2 = 4^{987} \cdot 2 \dots\dots\dots 0,5$$

đ

$$= (3+1)^{987} \cdot 2 = (3k+1) \cdot 2 = 6k+2, \quad k \in \mathbb{N}^*.$$

Suy ra

$$2^{1975} \text{ chia cho } 3 \text{ dư } 2. \quad (1) \dots\dots\dots 0,5$$

đ

Ta có

$$5^{2010} = 5^{2 \cdot 1005} = 25^{1005} \dots\dots\dots 0,5$$

đ

$$(24+1)^{1005} = (3 \cdot 8 + 1)^{1005} = 3m+1, \quad m \in \mathbb{N}^*.$$

Suy ra

$$5^{2010} \text{ chia cho } 3 \text{ dư } 1. \quad (2) \dots\dots\dots 0,5$$

đ

Từ (1) và (2), ta có

đ $2^{1975} + 5^{2010}$ chia hết cho 3.....0,5

Câu 2: (2,5 điểm)

Ta có

$$xy + \sqrt{(1+x^2)(1+y^2)} = 1$$

$$\Rightarrow \left(xy + \sqrt{(1+x^2)(1+y^2)} \right)^2 = 1 \dots\dots\dots 0,5 \text{ đ}$$

$$\Rightarrow x^2 y^2 + (1+x^2)(1+y^2) + 2xy\sqrt{(1+x^2)(1+y^2)} = 1$$

$$\Rightarrow x^2 y^2 + 1 + x^2 + y^2 + x^2 y^2 + 2xy\sqrt{(1+x^2)(1+y^2)} = 1$$

$$\Rightarrow x^2 y^2 + x^2 + y^2 + x^2 y^2 + 2xy\sqrt{(1+x^2)(1+y^2)} = 0$$

$$\Rightarrow x^2(1+y^2) + y^2(1+x^2) + 2xy\sqrt{(1+x^2)(1+y^2)} = 0 \dots\dots\dots 1$$

đ

$$\Rightarrow \left(x\sqrt{1+y^2} + y\sqrt{1+x^2} \right)^2 = 0 \dots\dots\dots 0,5$$

đ

$$\Rightarrow x\sqrt{1+y^2} + y\sqrt{1+x^2} = 0 \dots\dots\dots 0,5$$

đ

Câu 3 : (3 điểm)

Trước hết, ta chứng minh bất đẳng thức sau

$$\frac{1}{\sqrt{a}} + \frac{1}{\sqrt{b}} \leq \sqrt{\frac{2(a+b)}{ab}}. \quad (1) \dots\dots\dots (\text{nêu được}) \dots\dots\dots 0,5$$

đ

Thật vậy, ta có

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{a}} + \frac{1}{\sqrt{b}} \leq \sqrt{\frac{2(a+b)}{ab}} &\Leftrightarrow \left(\frac{1}{\sqrt{a}} + \frac{1}{\sqrt{b}} \right)^2 \leq \frac{2(a+b)}{ab} \\ \Leftrightarrow \frac{1}{a} + \frac{2}{\sqrt{ab}} + \frac{1}{b} &\leq \frac{2}{a} + \frac{2}{b} \Leftrightarrow \frac{1}{a} - \frac{2}{\sqrt{ab}} + \frac{1}{b} \geq 0 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{\sqrt{a}} - \frac{1}{\sqrt{b}} \right)^2 \geq 0 \end{aligned} \quad (\text{hiển}$$

nhiên).....1 đ

Tương tự (1), ta có

$$\frac{1}{\sqrt{b}} + \frac{1}{\sqrt{c}} \leq \sqrt{\frac{2(b+c)}{bc}} \quad (2)$$

và

$$\frac{1}{\sqrt{c}} + \frac{1}{\sqrt{a}} \leq \sqrt{\frac{2(c+a)}{ca}}. \quad (3)$$

Cộng (1), (2), (3) theo vế, ta có

$$2\left(\frac{1}{\sqrt{a}} + \frac{1}{\sqrt{b}} + \frac{1}{\sqrt{c}}\right) \leq \sqrt{\frac{2(a+b)}{ab}} + \sqrt{\frac{2(b+c)}{bc}} + \sqrt{\frac{2(c+a)}{ca}} \dots\dots\dots 0,5$$

đ

hay

$$\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{a}} + \frac{1}{\sqrt{b}} + \frac{1}{\sqrt{c}}\right) \leq \sqrt{\frac{a+b}{ab}} + \sqrt{\frac{b+c}{bc}} + \sqrt{\frac{c+a}{ca}}$$

hay

$$\sqrt{\frac{2}{a}} + \sqrt{\frac{2}{b}} + \sqrt{\frac{2}{c}} \leq \sqrt{\frac{a+b}{ab}} + \sqrt{\frac{b+c}{bc}} + \sqrt{\frac{c+a}{ca}} \dots\dots\dots 1$$

đ

Câu 4: (3,5 điểm)

a) Ta có

$$\Delta' = (m-1)^2 - (m-3) = m^2 - 3m + 4 \dots\dots\dots 0,5 \text{ đ}$$

$$= \left(m - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{7}{4} > 0, \quad \forall m \in \dots\dots\dots 0,5$$

đ

Vậy phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt x_1 và x_2 0,5

đ

b) Ta có

$$x_{1,2} = m - 1 \pm \sqrt{m^2 - 3m + 4}.$$

Do đó, với m nguyên, các nghiệm x_1 và x_2 cũng là số nguyên khi và chỉ khi
 tồn tại số tự nhiên k thỏa mãn
 $\Delta' = k^2 \dots\dots\dots 0,5 \text{ đ}$

Hơn nữa

$$\Delta' = k^2 \Leftrightarrow m^2 - 3m + 4 = k^2 \Leftrightarrow 4m^2 - 12m + 16 = 4k^2$$

$$\Leftrightarrow (2m-3)^2 - 4k^2 = -7 \Leftrightarrow (2m-3+2k)(2m-3-2k) = -7 \dots\dots\dots 0,5 \text{ đ}$$

Vi

$$(2m-3+2k) - (2m-3-2k) = 4k \geq 0,$$

nên

$$2m-3+2k \geq 2m-3-2k.$$

Ngoài ra

$$-7 = 7 \cdot (-1) = 1 \cdot (-7).$$

Vậy có hai trường hợp

$$2m-3+2k = 7 ; 2m-3-2k = -1$$

hoặc

$$2m-3+2k = 1 ; 2m-3-2k = -7 \dots\dots\dots 0,5$$

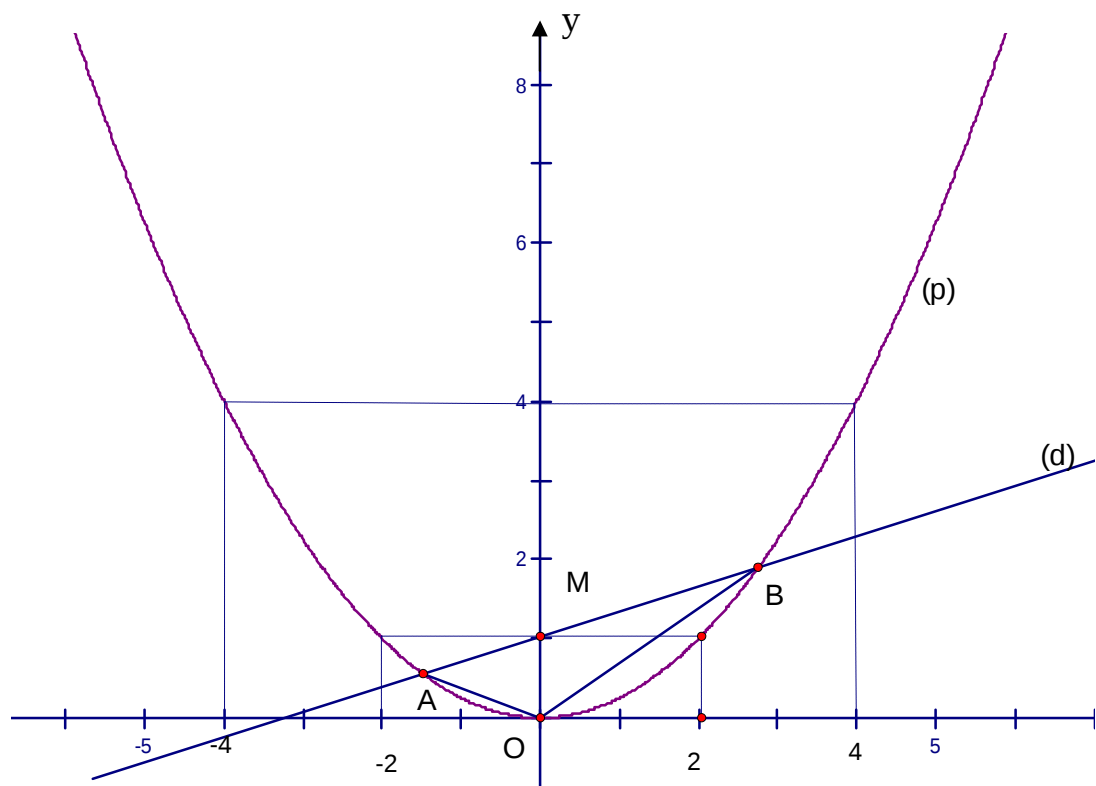
đ

Do đó $m=3 ; k=2$ hoặc $m=0 ; k=2$.

Vậy $m=3$ hoặc $m=0 \dots\dots\dots 0,5$

đ

Câu 5: (4 điểm)





a) Hoành độ giao điểm của (d) và (P) là nghiệm của phương trình

$$\frac{1}{4}x^2 = mx + 1 \text{ hay } x^2 - 4mx - 4 = 0 \dots\dots\dots 0,5$$

đ

Ta có

$$\Delta' = 4m^2 + 4 > 0 \dots\dots\dots 0,5$$

đ

Vậy phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt.

Do đó (d) luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt A và B.....0,5 đ

b) Xét đường thẳng (d): $y = mx + 1$ ($m \in \mathbb{R}$).

Với $x = 0$ thì $y = 1$, nên (d) luôn cắt trục Oy tại điểm M(0;1).

Gọi diện tích tam giác AOB là S. Ta có

$$S = S_{\triangle OAM} + S_{\triangle OBM}.$$

Giả sử $A(x_1; y_1)$ và $B(x_2; y_2)$.

Ta có

$$S_{\triangle OAM} = \frac{1}{2} \cdot OM \cdot |x_1| = \frac{1}{2} \cdot |x_1|,$$
$$S_{\triangle OBM} = \frac{1}{2} \cdot OM \cdot |x_2| = \frac{1}{2} \cdot |x_2|.$$

Vậy

$$S = \frac{1}{2} \cdot (|x_1| + |x_2|) \dots\dots\dots 0,5$$

đ

Vì x_1 và x_2 là nghiệm của phương trình $x^2 - 4mx - 4 = 0$, nên theo hệ thức Vi-ét ta có $x_1 + x_2 = 4m$ và $x_1 x_2 = -4 \dots\dots\dots 0,5$ đ

Do đó

$$\begin{aligned} S^2 &= \frac{1}{4} \cdot (|x_1| + |x_2|)^2 = \frac{1}{4} \cdot (x_1^2 + x_2^2 + 2|x_1 x_2|) \\ &= \frac{1}{4} \cdot ((x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 + 2|x_1 x_2|) \\ &= \frac{1}{4} (16m^2 + 16) = 4(m^2 + 1). \end{aligned}$$

Suy ra

$$S = 2\sqrt{m^2 + 1} \dots\dots\dots 0,5$$

đ

Hơn nữa

$$m^2 + 1 \geq \frac{(m+1)^2}{2},$$

vì

$$\begin{aligned} m^2 + 1 \geq \frac{(m+1)^2}{2} &\Leftrightarrow 2m^2 + 2 \geq m^2 + 2m + 1 \\ &\Leftrightarrow m^2 - 2m + 1 \geq 0 \Leftrightarrow (m-1)^2 \geq 0 \end{aligned} \quad \text{(hiển}$$

nhiên).....0,5 đ

Do đó

$$S = 2\sqrt{m^2 + 1} \geq 2\sqrt{\frac{(m+1)^2}{2}} = |m+1| \cdot \sqrt{2} \quad (\text{đpcm}) \dots\dots\dots 0,5$$

đ

Câu 6: (4,5 điểm)

$$\begin{aligned} PNB &= CNM && \text{(hai góc đối đỉnh)} \\ &= \frac{1}{2}(180^\circ - ACB) && \text{(tính chất tiếp tuyến)} \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2} \left[90^\circ + (90^\circ - ACB) \right]$$

$$= \frac{1}{2} (90^\circ + ABC) \quad (\text{hai góc phụ nhau})$$

$$= 45^\circ + \frac{1}{2} . ABC$$

$$= 45^\circ + IBC . \quad (2) \dots\dots\dots 1,5$$

đ

Từ (1) và (2) suy ra $PIB = PNB$.

Do đó 4 điểm P, N, I, B cùng nằm trên một đường tròn.....0,5

đ

Hơn nữa, vì INB vuông nên

IB là đường kính của đường tròn
này.....0,5 đ

Suy ra IPB vuông.....0,5

đ

.....**HẾT**.....

Giám khảo lưu ý: Cách giải khác, nếu đúng, vẫn đạt điểm tối đa.