

Câu 1 (4 điểm). Rút gọn các biểu thức sau:

1) $P = \frac{a}{(a-b)(a-c)} + \frac{b}{(b-c)(b-a)} + \frac{c}{(c-a)(c-b)}$, trong đó a, b, c là các số đôi một khác nhau.

S, p, n	2 điểm
$P = \frac{a}{(a-b)(a-c)} + \frac{b}{(b-c)(b-a)} + \frac{c}{(c-a)(c-b)} = \frac{a(c-b) + b(a-c) + c(b-a)}{(a-b)(b-c)(c-a)}$	1 ®
$= \frac{ac - ab + ba - bc + cb - ca}{(a-b)(b-c)(c-a)} = 0$	1 ®

2) $Q = \frac{\sqrt{x+2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x-2\sqrt{x-1}}}{\sqrt{x+\sqrt{2x-1}} - \sqrt{x-\sqrt{2x-1}}}$, trong đó $x \geq 2$.

S, p, n	2 điểm
$Q = \frac{\sqrt{x+2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x-2\sqrt{x-1}}}{\sqrt{x+\sqrt{2x-1}} - \sqrt{x-\sqrt{2x-1}}} = \frac{\sqrt{x-1+2\sqrt{x-1}+1} + \sqrt{x-1-2\sqrt{x-1}+1}}{\sqrt{\frac{1}{2}[(2x-1)+2\sqrt{2x-1}+1]} - \sqrt{\frac{1}{2}[(2x-1)-2\sqrt{2x-1}+1]}} =$	0,5 ®
$= \frac{\sqrt{(\sqrt{x-1}+1)^2} + \sqrt{(\sqrt{x-1}-1)^2}}{\sqrt{\frac{1}{2}(\sqrt{2x-1}+1)^2} - \sqrt{\frac{1}{2}(\sqrt{2x-1}-1)^2}} = \frac{\sqrt{x-1}+1 + \sqrt{x-1}-1 }{\frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{2x-1}+1 - \sqrt{2x-1}-1)} =$	0,5 ®
$= \frac{\sqrt{x-1}+1 + \sqrt{x-1}-1}{\frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{2x-1}+1 - \sqrt{2x-1}+1)} \quad (\text{vì } x \geq 2 \text{ nên } \sqrt{x-1} \geq 1 \text{ và } \sqrt{2x-1} \geq 1)$	0,5 ®
$= \sqrt{2(x-1)}.$	0,5 đ

Câu 2 (4 điểm). Tìm x, y, z thỏa mãn hệ sau:

$$\begin{cases} x^3 - 3x - 2 = 2 - y \\ y^3 - 3y - 2 = 4 - 2z \\ z^3 - 3z - 2 = 6 - 3x \end{cases}$$

S, p, n	2 điểm
Biến đổi tương đương hệ ta có: $\begin{cases} x^3 - 3x - 2 = 2 - y \\ y^3 - 3y - 2 = 4 - 2z \\ z^3 - 3z - 2 = 6 - 3x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-2)(x+1)^2 = 2 - y \\ (y-2)(y+1)^2 = 2(2-z) \\ (z-2)(z+1)^2 = 3(2-x) \end{cases}$	1 ®
Nhân các vế của 3 phương trình với nhau ta được: $(x-2)(y-2)(z-2)(x+1)^2(y+1)^2(z+1)^2 = -6(x-2)(y-2)(z-2)$	1 đ
$\Leftrightarrow (x-2)(y-2)(z-2)[(x+1)^2(y+1)^2(z+1)^2 + 6] = 0$	0,5 ®
$\Leftrightarrow (x-2)(y-2)(z-2) = 0.$ $\Leftrightarrow x = 2 \text{ hoặc } y = 2 \text{ hoặc } z = 2$	0,5 đ

Với $x = 2$ hoặc $y = 2$ hoặc $z = 2$ thay vào hệ ta được $x = y = z = 2$.	0,5 ®
Vậy: với $x = y = z = 2$ thỏa mãn hệ đã cho.	0,5 đ

Câu 3 (4 điểm). 1) Chứng minh chữ số tận cùng (chữ số hàng đơn vị) của các số tự nhiên n và n^5 là như nhau.

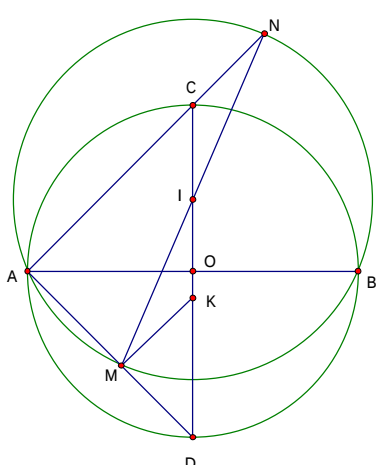
S, p, n	2 điểm
Ta có: $n^5 - n = n(n^4 - 1) = n(n^2 - 1)(n^2 + 1) = n(n - 1)(n + 1)(n^2 + 1) =$	0,5 ®
$n(n - 1)(n + 1)(n^2 - 4 + 5) = n(n - 1)(n + 1)(n^2 - 4) + 5n(n - 1)(n + 1) =$ $= (n - 2)(n - 1)n(n + 1)(n + 2) + 5n(n - 1)(n + 1).$	0,5 ®
Ta có $(n - 2)(n - 1)n(n + 1)(n + 2)$ và $5n(n - 1)(n + 1)$ đều chia hết cho 10	0,5 ®
Do đó $n^5 - n$ chia hết cho 10, suy ra điều phải chứng minh.	0,5 đ

2) Tìm số nguyên tố p để $5p^2 + 1$ là số nguyên tố.

S, p, n	2 điểm
+ Nếu $p = 2$ thì $5p^2 + 1 = 21$ không phải là số nguyên tố.	0,5 ®
+ Nếu $p > 2$ thì p phải là số lẻ (vì p là số nguyên tố).	0,5 ®
Do đó $5p^2 + 1$ là số chẵn lớn hơn 2, suy ra $5p^2 + 1$ không phải là số nguyên tố.	0,5 đ
Vậy: không có số nguyên tố p nào thỏa mãn đề bài.	0,5 đ

Câu 4 (6 điểm). Cho đường tròn tâm O , bán kính $R > 0$ không đổi và hai đường kính cố định AB, CD vuông góc với nhau. Lấy điểm I bất kỳ trên đoạn OC (I không trùng với O và C); dựng đường tròn tâm I bán kính IA , đường tròn này cắt tia AD và tia AC lần lượt tại M và N (khác điểm A).

1) Chứng minh rằng ba điểm I, M, N thẳng hàng.

S, p, n	2 điểm
	0,5 ®
Vì góc $N\hat{A}M = 90^\circ$ nên MN là đường kính của đường tròn (I, IA) .	1 ®
$\Rightarrow$ ba điểm I, M, N thẳng hàng.	0,5 đ

2) Từ M kẻ đường thẳng song song với AC , đường thẳng này cắt CD tại K . Chứng minh rằng: $DM \cdot DA = DK \cdot DO$.

S, p, n	2 điểm
Xét 2 tam giác KMD và AOD có: Vì góc $\widehat{NAM} = 90^\circ$ và $MK \parallel AC$ nên ta có: $\widehat{KMD} = \widehat{AOD} = 90^\circ$ (Vì góc $\widehat{NAM} = 90^\circ$ và $MK \parallel AC$) Góc $\widehat{MDK}$ chung.	0,5 ®
Suy ra hai tam giác vuông KMD và AOD đồng dạng.	0,5 ®
Từ đó suy ra: $\frac{DK}{DM} = \frac{DA}{DO}$.	0,5 ®
$\Rightarrow DM \cdot DA = DK \cdot DO$	0,5 đ

3) Tính tổng MA + NA theo R.

S, p, n	2 điểm
Từ $\begin{cases} \widehat{INC} = \widehat{IMK} \\ IM = IN \\ \widehat{MIK} = \widehat{NIC} \end{cases} \Rightarrow \triangle ICN = \triangle IKM$	0,5 ®
$\Rightarrow CN = MK$.	0,5 ®
Vì $\triangle MKD$ vuông cân nên $CN = MK = MD$.	0,5 ®
Vậy $AM + AN = AM + CN + AC = AM + MD + AC = AD + AC = 2\sqrt{2} \cdot R$.	0,5 ®

Câu 5 (2 điểm). Cho ba số thực a, b, c thỏa mãn $a + b + c = 3$. Chứng minh rằng:

$$a^4 + b^4 + c^4 \geq a^3 + b^3 + c^3$$

S, p, n	2 điểm
Với mỗi số thực x ta có: $(x-1)(x^3-1) = (x-1)^2(x^2+x+1) = (x-1)^2 \left[\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \right] \geq 0$	0,5 ®
Do vậy: $a^4 + b^4 + c^4 - (a^3 + b^3 + c^3) = a^3(a-1) + b^3(b-1) + c^3(c-1)$	0,5 đ
$= a^3(a-1) + b^3(b-1) + c^3(c-1) - (a-1) - (b-1) - (c-1)$	0,5 ®
$= (a-1)(a^3-1) + (b-1)(b^3-1) + (c-1)(c^3-1) \geq 0$ Suy ra: $a^4 + b^4 + c^4 \geq a^3 + b^3 + c^3$	0,5 đ

Ghi chú: Thí sinh luận bị theo cách khác (nếu đúng) vẫn được điểm theo quy định.