

Câu I:(4,0 điểm)

Cho đa thức $P(x)$ bậc $2n$; a & b là các số thực bất kỳ. Chứng tỏ rằng:

a) Nếu $P(x)$ có $2n$ nghiệm thực phân biệt, thì đa thức

$P(x) - (a+b)P'(x) + abP''(x)$ cũng có $2n$ nghiệm thực.

b) Nếu $P(x) > 0 \forall x$ thì $Q(x) > 0 \forall x$, với đa thức

$$Q(x) = P(x) + aP'(x) + a^2P''(x) + \dots + a^{2n}P^{(2n)}(x)$$

Câu II:(4,0 điểm)

Cho dãy số $\{x_n\}$: $x_1=2$; $x_n = 3x_{n-1} + 2n^3 - 9n^2 + 9n - 3$; $n \in \mathbb{N}^*$; $n \geq 2$.

Chứng minh rằng với mỗi số nguyên tố p thì $\sum_{i=1}^{p-1} x_i$ chia hết cho p .

Câu III:(4,0 điểm)

Cho các số thực $a, b, c \in (0;1]$ thỏa mãn điều kiện $ab + bc + ca = 1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $M = a + b + c + 3abc$.

Câu IV:(4,0 điểm)

Cho hai đường tròn $(O_1; R_1)$ và $(O_2; R_2)$ cắt nhau tại hai điểm phân biệt $A; B$. Gọi P và Q là hai điểm thay đổi tương ứng trên $(O_1; R_1)$ và $(O_2; R_2)$ sao cho P, B, Q thẳng hàng.

a) Chứng minh rằng đường trung trực của PQ luôn đi qua một điểm cố định.

b) Tìm vị trí P, Q sao cho diện tích tam giác APQ lớn nhất.

Câu V:(4,0 điểm):

Cho $A = \{1; 2; \dots; n\}$; $n \in \mathbb{N}^*$. Kí hiệu $(a_1; a_2; \dots; a_k)$ chỉnh hợp chập k của n phần tử thuộc A . Tìm số các chỉnh hợp chập k của n phần tử thuộc A thỏa mãn đồng thời cả hai điều kiện sau:

i) $a_i < a_j (\forall i < j; i, j = 1; 2; \dots; k)$

ii) $a_i - i$ chia hết cho 3 ($\forall i = 1; 2; \dots; k$)

.....Hết.....

Họ và tên thí sinh:.....Số báo danh:.....

Chữ ký của giám thị 1:.....Chữ ký của giám thị 2:.....

**HƯỚNG DẪN CHẤM: THI CHỌN ĐỘI TUYỂN HỌC SINH GIỎI QUỐC GIA
LỚP 12 THPT NĂM HỌC 2010 – 2011**

Câu I(4 đ)

a)(2đ) Nếu $a=0$ thì hiển nhiên đúng

Nếu $a \neq 0$, xét $f(x) = e^{-\frac{x}{a}}P(x) \Rightarrow f'(x) = \frac{e^{-\frac{x}{a}}}{-a}(P(x) - aP'(x))$.

Theo định lý Lagranger giữa 2 nghiệm của $f(x)$ (chính là 2 nghiệm của $P(x)$) có một nghiệm của $f'(x)$ (chính là nghiệm của $P(x) - a.P'(x)$) (0,5)

Khi đó $P(x) - a.P'(x)$ đã có $2n-1$ nghiệm thực; lại do bậc của nó là $2n$ suy ra có thêm nghiệm thứ $2n$. (*) (0,5)

Nếu $P(x)$ có x_0 là nghiệm bội k (từ 2 trở lên) thì $P(x)=(x-x_0)^k R(x)$; $R(x)$ là đa thức; $P'(x)=k(x-x_0)^{k-1}R(x)+(x-x_0)^k R'(x)$ nên $P(x) - a.P'(x)$ cũng có nghiệm bội $k-1$. Do vậy (*) cũng đúng khi $P(x)$ có $2n$ không cần phân biệt . (0,5)

Áp dụng kết quả trên cho đa thức $P(x)$ thay bằng $P(x)-a.P'(x)$; số a thay bằng b ta có $(P(x)-a.P'(x))-b(P(x)-a.P'(x))'=P(x)-(a+b)P'(x)+abP''(x)$ cũng có $2n$ nghiệm thực. Đpcm (0,5)

b)(2,0đ)

Vì $P(x) > 0$ với mọi x nên hệ số bậc cao nhất dương.

+)Giả sử $Q(x)$ có nghiệm thực x_1 , dùng định lý Bôzu, suy ra thương là đa thức bậc lẻ, nên lại có thêm nghiệm thực nữa, có thể trùng nghiệm x_1 . Khi đó $Q(x)$ có hai nghiệm phân biệt hoặc trùng nhau. (0,5)

+)Nếu $Q(x)=(x-x_1)^2 R(x)$ thì $Q(x)-aQ'(x)=(x-x_1)^2 R(x)-a(2(x-x_1)R(x)+(x-x_1)^2 R'(x))$ cũng có nghiệm x_1 (1)

+)Nếu $Q(x)$ có 2 nghiệm phân biệt thì theo cách làm câu a) suy ra $Q(x)-aQ'(x)$ cũng có nghiệm (2) (0,5)

+)Dễ thấy $Q(x)-aQ'(x)=P(x)$ với mọi x (3) (0,5)

Từ (1), (2) và (3) suy ra điều giả sử là sai hay $Q(x)$ vô nghiệm;

+)Do bậc của $Q(x)$ là $2n$ và hệ số bậc cao nhất là số dương(cũng là của $P(x)$) nên suy ra $Q(x) > 0$ với mọi x . (0,5)

Câu II(4đ)

Có $x_n + n^3 = 3(x_{n-1} + (n-1)^3) = \dots = 3^{n-1}(x_1 + 1^3) = 3^n$ (0,5)

Suy ra $x_n = 3^n - n^3$ (0,5)

Nếu $p=2$, có x_1 chia hết cho 2 (0,5)

Nếu p nguyên tố lẻ thì $\sum_{i=1}^{p-1} x_i = 3 + 3^2 + \dots + 3^{p-1} - 1^3 - 2^3 - \dots - (p-1)^3$ (0,5)

Vì $i^3 + (p-i)^3 \vdots p$; nên $1^3 + 2^3 + \dots + (p-1)^3 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{p-1} (i^3 + (p-i)^3) \vdots p$ (1,0)

Và $\sum_{i=1}^{p-1} 3^i = 3 \cdot \frac{3^{p-1} - 1}{3 - 1} \vdots p$ (Fec ma nhỏ) (0,5)

Vậy có $\sum_{i=1}^{p-1} x_i$ chia hết cho p. (0,5)

Câu III(4đ)

Đặt $\tan\alpha=a$; $\tan\beta=b$; $\tan\gamma=c$; $\alpha,\beta,\gamma \in (0;\frac{\pi}{4}]$ (0,5)

do $ab+bc+ca=1$ nên chứng minh được $\alpha+\beta+\gamma=\pi/2$. (0,5)

Giả sử $\alpha=\max(\alpha;\beta;\gamma)$ suy ra $\alpha \geq \pi/6$. Khi đó $M=\tan\alpha+\tan\beta+\tan\gamma+3\tan\alpha\tan\beta\tan\gamma=$

$$\tan\alpha + \frac{2\cos\alpha}{x+\sin\alpha} + 3\tan\alpha \cdot \frac{x-\sin\alpha}{x+\sin\alpha} = f(x) \text{ với } x=\cos(\beta-\gamma), 0 < x \leq 1$$

(0,5)

$$\text{Có } f(x) = 2 \cdot \frac{(3\tan^2\alpha - 1)}{(x + \sin\alpha)^2} \geq 0 \quad (0,5)$$

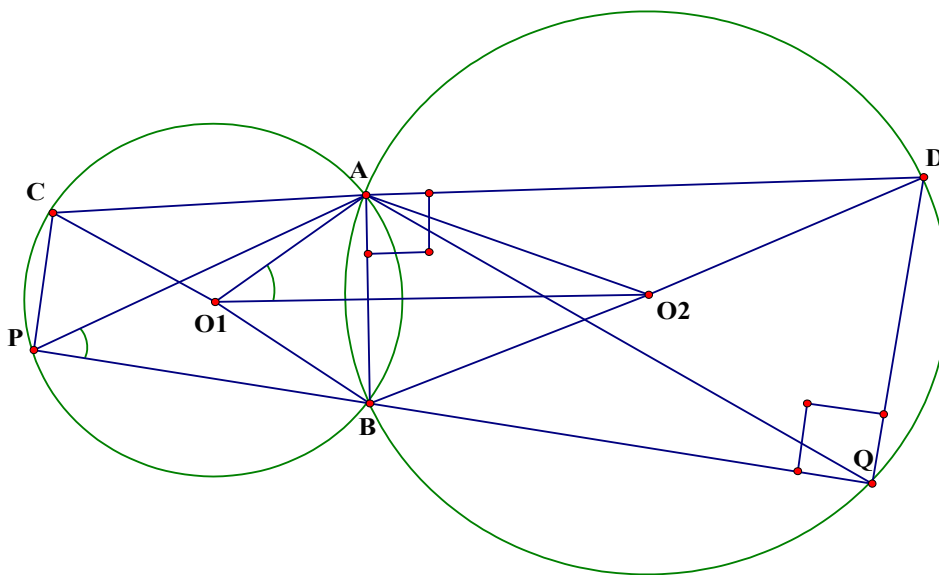
$$\text{nên } f(x) \leq f(1) = \tan\alpha + \frac{2\cos\alpha}{1+\sin\alpha} + 3\tan\alpha \cdot \frac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha} = \frac{2(2\sin\alpha + \cos 2\alpha)}{\cos\alpha + \frac{1}{2}\sin 2\alpha} = g(\alpha) \quad (0,5)$$

$$\text{Có } g'(\alpha) = \frac{1 - \sin 3\alpha}{(\cos\alpha + \frac{1}{2}\sin 2\alpha)^2} \geq 0 \quad (0,5)$$

$$\text{suy ra } g(\alpha) \leq g(\frac{\pi}{4}) = 8 - 4\sqrt{2} \quad (0,5)$$

Vậy $\max M = 8 - 4\sqrt{2}$ khi có 1 trong 3 số bằng 1, hai số còn lại bằng nhau và bằng $\sqrt{2} - 1$ (0,5)

Câu IV:(4đ)



a) Kẻ dây AD của (O_2) vuông với AB, kẻ dây AC của (O_1) vuông với AB. (0,5)

Khi đó BC; BD là các đường kính nên $CP \perp BP$; $DQ \perp BQ$; (0,5)

Do đó trung trực của PQ luôn đi qua trung điểm của CD- là điểm cố định. (1,0)

b) Tam giác APQ và tam giác AO₁O₂ có $\widehat{APB} = \widehat{AO_1O_2}$; $\widehat{AQB} = \widehat{AO_2O_1}$

Nên 2 tam giác đó đồng dạng. (0,5)

Tam giác AO₁O₂ không đổi, do đó diện tích tam giác APQ lớn nhất khi và chỉ khi AP lớn nhất. (0,5)

AP lớn nhất khi AP qua O₁, lúc đó AQ qua O₂ (1,0)

Câu V(4đ)

Đặt $a_i - i = 3b_i (i = 1; 2; \dots; k)$ (0,5)

vì $a_i < a_j (\forall i < j)$ nên ta có $0 \leq b_1 \leq b_2 \leq \dots \leq b_k \leq \left\lfloor \frac{n-k}{3} \right\rfloor$ (1,0)

suy ra $0 \leq b_1 < b_2 + 1 < \dots < b_k + k - 1 \leq \left\lfloor \frac{n-k}{3} \right\rfloor + k - 1$ (1,0)

Rõ ràng với mỗi bộ (a_i) thỏa yêu cầu ta có bộ (b_i+i-1) là một tổ hợp chập k của $\left\lfloor \frac{n-k}{3} \right\rfloor + k$ phần tử. (0,5)

Ngược lại với mỗi bộ (b_i+i-1) như trên, lấy $a_i - i = 3b_i (i = 1; 2; \dots; k)$, ta được bộ (a_i) thỏa yêu cầu (0,5)

Vậy số bộ (a_i) thỏa yêu cầu bằng số tổ hợp chập k của $\left\lfloor \frac{n-k}{3} \right\rfloor + k$ phần tử. (0,5)