

Sở Giáo Dục - Đào Tạo tp HCM

Ngày thi

Năm 2010

Đề thi Chọn Học Sinh Giỏi lớp 12

Môn thi: Toán học

Vòng 1

Bài 1.

Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x^{11} + xy^{10} = y^{22} + y^{12} \\ 7y^4 + 13x + 8 = 2y^4 \sqrt[3]{x(3x^2 + 3y^2 - 1)}. \end{cases}$$

Bài 2.Xác định đa $P(x)$ với hệ số thực thỏa mãn

$$P((x+1)^{2010}) = (P(x) + 3x + 1)^{2010} - (x+1)^{2010} \text{ và } P(0) = 0$$

Bài 3.

Cho hình thang $ABCD$ có $AD \parallel BC$. Một điểm E di động trên AB , gọi O_1, O_2 lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác AED, BEC .

Chứng minh rằng độ dài O_1O_2 không đổi.**Bài 4.**

- 1) Có tồn tại hay không hai đa thức bậc hai $g(x)$ và $h(x)$ sao cho $g(h(x)) = 0$ có bốn nghiệm $1, 2, 3, 4$.
- 2) Có tồn tại hay không ba đa thức bậc hai $g(x), h(x)$ và $z(x)$ sao cho $z(g(h(x))) = 0$ có tám nghiệm $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$.

Bài 5.

Tô màu các số nguyên dương từ 1 đến 2010 theo quy tắc sau: Số nào chia cho 24 dư 17 thì tô màu xanh, số nào cho 40 dư 7 thì tô màu đỏ, các số còn lại tô màu vàng.

- 1) Có bao nhiêu số được tô màu vàng ?
- 2) Tìm cặp (a, b) sao cho a được tô màu xanh, b được tô màu đỏ và $|a - b| = 2$.

———— Hết ————

Bài 1.

- 1) Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 1 = 2x + 2y \\ (2x - y - 2)y = 1 \end{cases}$$

- 2) Tìm tất cả giá trị của tham số a để bất phương trình sau có nghiệm

$$\begin{cases} x^2 - 7x - 8 < 0 \\ a^2x > (3a - 2)x + 2 \end{cases}$$

Bài 2.

- 1) Cho ΔABC có a, b, c là độ dài các cạnh, h_a, h_b, h_c là các đường cao tương ứng và R là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác. Chứng minh rằng

$$(ab + bc + ca) \left(\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} \right) \geq 18R$$

- 2) Từ các chữ số $1, 2, 3, 4, 5, 6$ có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên có 6 chữ số khác nhau mà trong mỗi số đó tổng của 3 chữ số thuộc hàng đơn vị, hàng chục, hàng trăm lớn hơn tổng của 3 chữ số còn lại là 3 đơn vị.

Bài 3.

- 1) Chứng minh rằng có duy nhất một điểm thuộc đồ thị (C) của hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2$ mà qua điểm đó chỉ kẻ được một tiếp tuyến tới (C)
- 2) Tìm tất cả các giá trị của x sao cho ứng với các giá trị đó hàm số sau đạt giá trị lớn nhất, nhỏ nhất

$$y = \sin^5 x - 3 \sin^4 x + \sin^3 x \cos^2 x - 3 \sin^2 x \cos^2 x + 2$$

Bài 4.

Cho dãy số (u_n) với $u_n = \frac{4n+1}{2^n}$. Dãy (s_n) được cho bởi $s_n = \sum_{i=1}^n u_i$. Tìm $\lim s_n$.

Bài 5.

Trong mặt phẳng (P) cho đoạn thẳng AB . Gọi O là trung điểm AB và M là điểm tùy ý trên đoạn OB ($M \neq B$). Trên cùng một nửa mặt phẳng bờ AB của (P) , dựng các hình vuông $AMCD, MBEF$. Điểm S thuộc đường thẳng vuông góc với mặt phẳng (P) tại A ($S \neq A$).

- 1) Xác định vị trí của điểm M để tổng thể tích của 2 khối chóp $S.ABF$ và $S.ACF$ đạt giá trị nhỏ nhất.
- 2) Đường thẳng AF cắt đường thẳng BC tại điểm N . Điểm H là hình chiếu vuông góc của điểm S trên đường thẳng MN . Tìm quỹ tích của H khi M di chuyển trên đoạn OM

———— Hết ————

Sở Giáo Dục & Đào Tạo Bình Định

Đề thi Chọn Học Sinh Giỏi

Năm học 2010-2011

Môn thi: Toán học

Vòng II

Bài 1. (5 điểm)

1) Giải hệ bất phương trình:

$$\begin{cases} x^6 + y^8 + z^{10} & \leq 1 \\ x^{2007} + y^{2009} + z^{2011} & \geq 1 \end{cases}.$$

2) Cho $a; b; c$ là các số thực dương. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^3}{bc} + \frac{b^3}{ca} + \frac{c^3}{ab} \geq a + b + c.$$

Bài 2. (4 điểm)

Cho các dãy số $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}; \{y_n\}_{n=1}^{\infty}; \{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ được xác định như sau:

$$x_1 = a; y_1 = b; z_1 = c; x_n = \frac{y_{n-1} + z_{n-1}}{2}, y_n = \frac{z_{n-1} + x_{n-1}}{2}, z_n = \frac{x_{n-1} + y_{n-1}}{2}$$

Chứng minh rằng các dãy trên hội tụ và $\lim x_n = \lim y_n = \lim z_n = \frac{a+b+c}{3}$.

Bài 3. (3 điểm)

Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n thì $[(2 + \sqrt{3})^n]$ là số lẻ.

Bài 4. (5 điểm)

Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp trong trường tròn (O) . Gọi P là giao điểm hai đường chéo AC và BD . Gọi $I; J$ lần lượt là tâm đường tròn nội tiếp các tam giác PAB và PCD . Chứng minh rằng các đường thẳng qua các điểm P, I, J theo thứ tự vuông góc với BC, CA, BD đồng quy.

Bài 5. (3 điểm)

Cho tập hợp A gồm n phần tử, $n > 4$. Tìm n biết rằng trong số các tập con của A có đúng $16n$ tập con có số phần tử là lẻ.

———— Hết ————

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
ĐỀ THI CHÍNH THỨC

KÌ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI QUỐC GIA
LỚP 12 THPT NĂM 2010

Môn: TOÁN

Thời gian: 180 phút (không kể thời gian giao đề)

Ngày thi: 11/3/2010

Câu 1. (4 điểm)

Giải hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} x^4 - y^4 = 240 \\ x^3 - 2y^3 = 3(x^2 - 4y^2) - 4(x - 8y). \end{cases}$$

Câu 2. (5 điểm)

Cho dãy số thực (a_n) xác định bởi

$$a_1 = 5 \text{ và } a_n = \sqrt[n]{a_{n-1}^{n-1} + 2^{n-1} + 2 \cdot 3^{n-1}} \text{ với mọi } n \geq 2.$$

- 1/ Tìm số hạng tổng quát của dãy số (a_n) .
- 2/ Chứng minh rằng (a_n) là dãy số giảm.

Câu 3. (5 điểm)

Trong mặt phẳng, cho đường tròn (O) và hai điểm cố định B, C nằm trên đường tròn đó sao cho dây BC không là đường kính. Xét một điểm A di động trên (O) sao cho $AB \neq AC$ và A không trùng với B, C . Gọi D và E lần lượt là giao điểm của đường thẳng BC với đường phân giác trong và đường phân giác ngoài của góc $\widehat{BAC}$. Gọi I là trung điểm của DE . Đường thẳng đi qua trực tâm của tam giác ABC và vuông góc với AI cắt các đường thẳng AD và AE tương ứng tại M và N .

- 1/ Chứng minh rằng đường thẳng MN luôn đi qua một điểm cố định.
- 2/ Xác định vị trí của điểm A sao cho tam giác AMN có diện tích lớn nhất.

Câu 4. (3 điểm)

Chứng minh rằng với mỗi số nguyên dương n , phương trình

$$x^2 + 15y^2 = 4^n$$

có ít nhất n nghiệm tự nhiên (x, y) .

Câu 5. (3 điểm)

Cho số nguyên dương n . Cho bảng ô vuông kích thước 3×3 . Người ta dùng n màu để tô tất cả các ô vuông con của bảng sao cho trong mỗi cách tô, mỗi ô vuông con được tô bởi một màu.

Hai cách tô màu được coi là như nhau nếu cách tô màu này có thể nhận được từ cách tô màu kia nhờ một phép quay quanh tâm của bảng ô vuông.

Hỏi có tất cả bao nhiêu cách tô màu đôi một không như nhau?

(Lưu ý: Trong một cách tô không nhất thiết phải dùng đủ n màu).

-----HẾT-----

- Thí sinh không được sử dụng tài liệu và máy tính cầm tay.
- Giám thị không giải thích gì thêm.

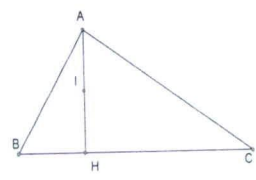
HƯỚNG DẪN CHẤM THI
(Bản hướng dẫn có 04 trang)

I. HƯỚNG DẪN CHUNG

- Nếu thí sinh làm bài không theo cách nêu trong đáp án mà vẫn đúng thì vẫn cho điểm từng phần như hướng dẫn chấm quy định;
- Việc chi tiết hóa thang điểm (nếu có) so với hướng dẫn chấm phải bảo đảm không sai lệch với hướng dẫn chấm và được thống nhất thực hiện trong Hội đồng chấm thi;
- Điểm toàn bài không làm tròn số.

II. ĐÁP ÁN VÀ THANG ĐIỂM

Câu	Đáp án	Điểm
1a (3,0 đ)	Giải phương trình : $4\sin^3 x - 4\cos^2 x - 11\sin x - 2 = 0$ (1) Đặt $\sin x = t$, với $t \leq 1$ thì: (1) $\Leftrightarrow 4t^3 + 4t^2 - 11t - 6 = 0$ $\Leftrightarrow (2t-3)(2t+1)(t+2) = 0$ $\Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{3}{2} \\ t = -\frac{1}{2} \\ t = -2 \end{cases}$ $\Leftrightarrow t = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow t = -\frac{1}{2}$ (do $t \leq 1$). Vậy $\sin x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{7\pi}{6} + k2\pi \end{cases}; k \in \mathbb{Z}.$	0,5 0,5 1,0 1,0
1b (3,0 đ)	Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2 y^2 - 8x + y^2 = 0 \\ 2x^2 - 4x + 10 + y^3 = 0 \end{cases}$ (I) Xét hệ hai phương trình bậc 2 theo ẩn x và tham số y, ta có : $\Delta_1' = 16 - y^4$ $\Delta_2' = 4 - 2(10 + y^3) = -16 - 2y^3$	1,0

	Hệ có nghiệm khi và chỉ khi : $\begin{cases} 16 - y^4 \geq 0 \\ -16 - 2y^3 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 \leq y \leq 2 \\ y \leq -2 \end{cases} \Leftrightarrow y = -2$ Thế $y = -2$ vào (I) ta được $x = 1$ Vậy hệ có nghiệm duy nhất $(1 ; -2)$	1,0 1,0												
2 (4,0đ)	Tìm GTLN, GTNN của hàm số: $y = 2 + \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + 2\sqrt{1 + \sin x + \cos x + \sin x \cos x}, x \in R.$ Hàm số viết lại là : $y = f(x) = 2 + \sin x + \cos x + 2\sqrt{1 + \sin x + \cos x + \sin x \cos x}.$ Đặt $\sin x + \cos x = t, t \leq \sqrt{2}$, suy ra $\sin x \cos x = \frac{t^2 - 1}{2}$. Từ đó: $f(t) = 2 + t + \sqrt{2} t + 1 = \begin{cases} (1 + \sqrt{2})t + 2 + \sqrt{2}; t \geq -1 \\ (1 - \sqrt{2})t + 2 - \sqrt{2}; t < -1 \end{cases}.$ Ta có bảng xét dấu: <table><tr><td>t</td><td>$-\sqrt{2}$</td><td>-1</td><td>$\sqrt{2}$</td></tr><tr><td>$f'(t)$</td><td></td><td>-</td><td>+</td></tr><tr><td>f(t)</td><td>$4 - 2\sqrt{2}$</td><td>1</td><td>$4 + 2\sqrt{2}$</td></tr></table> Do đó: $\max_{x \in R} f(x) = \max_{-\sqrt{2} \leq t \leq \sqrt{2}} f(t) = \max\left(\left(4 - 2\sqrt{2}\right); \left(4 + 2\sqrt{2}\right)\right) = 4 + \sqrt{2}, \text{ khi } x = \frac{\pi}{4} + k2\pi$ $\min_{x \in R} f(x) = \min_{-\sqrt{2} \leq t \leq \sqrt{2}} f(t) = 1, \text{ khi } x = \frac{-\pi}{2} + k2\pi \vee x = \pi + k2\pi, k \in Z$	t	$-\sqrt{2}$	-1	$\sqrt{2}$	$f'(t)$		-	+	f(t)	$4 - 2\sqrt{2}$	1	$4 + 2\sqrt{2}$	0,5 1,0 1,0 0,5 0,5 0,5
t	$-\sqrt{2}$	-1	$\sqrt{2}$											
$f'(t)$		-	+											
f(t)	$4 - 2\sqrt{2}$	1	$4 + 2\sqrt{2}$											
3a (2,0 đ)	Chứng minh hệ thức: $a^2 \overrightarrow{IA} + b^2 \overrightarrow{IB} + c^2 \overrightarrow{IC} = \vec{0}$ Ta có : $\overrightarrow{IA} = -\overrightarrow{IH}$ (vì I là trung điểm của AH) Trong tam giác vuông ta có: $b^2 = aHC, c^2 = aHB \text{ và } a^2 = b^2 + c^2$ $\Rightarrow b^2 HB = c^2 HC \Rightarrow b^2 \overrightarrow{HB} = -c^2 \overrightarrow{HC}$  Ta có: $a^2 \overrightarrow{IA} + b^2 \overrightarrow{IB} + c^2 \overrightarrow{IC} = a^2 \overrightarrow{IA} + b^2 (\overrightarrow{IH} + \overrightarrow{HB}) + c^2 (\overrightarrow{IH} + \overrightarrow{HC})$ $= a^2 \overrightarrow{IA} + (b^2 + c^2) \overrightarrow{IH} + b^2 \overrightarrow{HB} + c^2 \overrightarrow{HC}$ $= a^2 \overrightarrow{IA} + a^2 \overrightarrow{IH} + b^2 \overrightarrow{HB} + c^2 \overrightarrow{HC} = \vec{0} \text{ (đpcm)}$	0,5 0,5 0,5												

	Vậy: Quỹ tích của M là đường tròn tâm I, bán kính $\frac{bc}{2a}$	0,5
4 (3,0 đ)	Chứng minh $s_1 + s_2 + \dots + s_n \geq s$ Với $i = 1, 2, \dots, n$, đặt: s_i : diện tích hình tròn ngoại tiếp hình chữ nhật thứ i ; s : diện tích hình tròn ngoại tiếp hình vuông đã cho; S_i : diện tích hình chữ nhật thứ i ; S : diện tích hình vuông. Ta có: $S_1 + S_2 + \dots + S_n = S$. Giả sử a là cạnh hình vuông, thì $S = a^2$, và $s = \frac{a^2\pi}{2}$, suy ra: $S = \frac{2}{\pi} s$. Gọi a_i, b_i là kích thước hình chữ nhật thứ i. Thế thì: $s_i = \pi r_i^2$, với $r_i^2 = \frac{a_i^2 + b_i^2}{4}$. $S_i = a_i b_i \leq \frac{a_i^2 + b_i^2}{2} = \frac{2}{\pi} \left(\pi \cdot \frac{a_i^2 + b_i^2}{4} \right) = \frac{2}{\pi} (\pi r_i^2) = \frac{2}{\pi} s_i$. Do đó: $\frac{2}{\pi} s_i \geq S_i \Rightarrow \frac{2}{\pi} (s_1 + s_2 + \dots + s_n) \geq S_1 + S_2 + \dots + S_n = S = \frac{2}{\pi} s$ Nghĩa là: $s_1 + s_2 + \dots + s_n \geq s$. Dấu "=" xảy ra khi $n = 1$ hoặc $a_i = b_i$	0,5 0,5 1,0 0,5 0,5
5 (2,0 đ)	Đa thức $f(x)$ có bậc 2010, $f(k) = \frac{1}{k}$, $k \in \{1; 2; \dots, 2011\}$. Tính $f(2012)$. Đặt $g(x) = x f(x) - 1$ (1). Hàm số $f(x)$ có bậc 2010 nên $g(x)$ có bậc 2011. Vì $f(k) = \frac{1}{k}$, $k \in \{1; 2; \dots, 2011\}$ nên $g(k) = 0$ hay $g(x)$ có dạng: $g(x) = c(x-1)(x-2)\dots(x-2011)$ (2), với c là hằng số. Cho $x = 0$ vào (1) và (2) ta suy ra $c = \frac{1}{2011!}$ (3). Kết hợp (1), (2) và (3) ta được $f(2012) = \frac{1}{1006}$.	0,5 0,5 0,5 0,5

=Hết=

Sở Giáo Dục & Đào Tạo PHÚ THỌ

Đề thi Chọn Học Sinh Giải

Năm học 2010-2011

Môn thi: Toán học

Ngày thi 5/11/2010

Vòng 1

Bài 1.

Giải phương trình:

$$\frac{2 + \sqrt{2}}{\sqrt{\tan x + \cot 2x}} = \sqrt{2} + 2 \sin 2x$$

Bài 2.

Giải hệ phương trình sau trên $\mathbb{R}$:

$$\begin{cases} x^2 + 1 + y^2 + xy = 4y \\ x + y - 2 = \frac{y}{x^2 + 1} \end{cases}$$

Bài 3.

Tìm tất cả các nghiệm nguyên của phương trình:

$$2(x + y) + xy = x^2 + y^2.$$

Bài 4.

Cho dãy số $V_n = n^{n+1} \cdot (n+1)^n \forall n \geq 3$.

- 1) Chứng minh rằng dãy (V_n) là dãy tăng $\forall n \geq 3$.
- 2) Tìm α lớn nhất sao cho $n^{n+1} \geq (n+1)^n + \alpha \forall n \geq 3$.

Bài 5.

Cho tam giác ABC thỏa mãn $a^2 = 4S \cot A$, trong đó $BC = a$ và S là diện tích của tam giác.

Gọi O và G lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp và trọng tâm của tam giác ABC . Chứng minh rằng hai đường thẳng AG và OG vuông góc với nhau.

Bài 6.

Điền số 896 số 1 và -1 vào bảng ô vuông kích thước 14×64 (14 hàng và 64 cột). Biết rằng với hai cột bất kỳ, số lần xuất hiện hai số cùng dấu ở trên cùng một hàng không vượt quá 7. Chứng minh rằng số các số 1 trong 896 số đã cho không lớn hơn 511.

———— Hết ————

Sở Giáo Dục - Đào Tạo Hải Phòng

Ngày thi

Đề thi Chọn Học Sinh Giải BẢNG A1

Môn thi: Toán học

Vòng 1

Bài 1. (1,5 đ)

Giải phương trình

$$2\sqrt[3]{2x-1} = 27x^3 - 27x^2 + 13x - 2.$$

Bài 2. (3,0 đ)Cho tam giác nhọn ABC , M là trung điểm BC . D, E là hình chiếu vuông góc của M lên AB, AC .Đường tròn (O_1) đi qua A, B, E ; đường tròn (O_2) đi qua A, C, D . Chứng minh $O_1O_2 \parallel BC$.**Bài 3.** (1,5 đ)Tìm hàm $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn

$$f^2(x) + 2yf(x) + f(y) = f(y + f(x)) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Bài 4. (2,5 đ)Tìm các số nguyên k, m thỏa mãn

$$k! + 48 = 48(k+1)^m.$$

Bài 5. (1,5 đ)Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn $xyz = 1$ Chứng minh rằng

$$\frac{(x^4 + y^4)^3}{x^6 + y^6} + \frac{(y^4 + z^4)^3}{y^6 + z^6} + \frac{(z^4 + x^4)^3}{z^6 + x^6} \geq 12.$$

————— Hết —————

Sở Giáo Dục & Đào Tạo Long An

Đề thi Chọn Học Sinh Giải

Năm học 2010-2011

Môn thi: Toán học

Vòng 2

Bài 1.

- 1) Giải phương trình $x^2 - 4x + 3 = \sqrt{x+5}$
- 2) Giải phương trình $x^3 + x^2 - 3x - 1 = 2\sqrt{x+2}$ trên $[-2; 2]$.

Bài 2.

Cho $a > 2$ và dãy số x_n với $x_1 = a$ và $2x_{n+1} = \sqrt{3x_n^2 + \frac{n+3}{n}}$ với $n \in \mathbb{N}^*$

- 1) Chứng minh : $x_n > 1$, với $n \in \mathbb{N}^*$
- 2) Chứng minh dãy số (x_n) có giới hạn và tìm giới hạn đó.

Bài 3.

Cho tam giác ABC . Gọi M là điểm chuyển động trên cạnh AB . N là điểm chuyển động trên cạnh AC

- 1) Giả sử $BM = CN$, chứng minh đường trung trực của MN luôn đi qua một điểm cố định .
- 2) Giả sử $\frac{1}{AM} + \frac{1}{AN}$ không đổi. Chứng minh MN luôn đi qua một điểm cố định.

Bài 4.

Tìm các số nguyên tố a, b, c sao cho $a^b + 1999 = c$.

Bài 5.

Trong mặt phẳng cho 6 điểm tùy ý sao cho không có 3 điểm nào thẳng hàng. Người ta tô mỗi đoạn thẳng tạo ra từ 6 điểm bằng một trong hai màu đen hoặc trắng. Chứng minh tồn tại tam giác có các cạnh được tô cùng màu.

———— Hết ————

Sở Giáo Dục & Đào Tạo Quảng Ninh

Đề thi Chọn Học Sinh Giỏi

Bảng A

Môn thi: Toán học

Năm học 2010-2011

Vòng I

Bài 1.

1) Giải phương trình:

$$(5x-6)^2 - \frac{1}{\sqrt{5x-7}} = x^2 - \frac{1}{\sqrt{x-1}}$$

2) Tìm các giá trị của tham số m sao cho bất phương trình sau có nghiệm:

$$x^3 + 3x^2 - 1 \leq m \left(\sqrt{x} - \sqrt{x-1} \right)^3$$

Bài 2.

Giả sử M là một điểm nằm trong $\triangle ABC$ thỏa mãn: $\widehat{MAB} = \widehat{MBC} = \widehat{MCA} = \alpha$.

Chứng minh rằng: $\cot \alpha = \cot A + \cot B + \cot C$.

Bài 3.

Cho điểm O cố định và số thực a không đổi. Một hình chóp $S.ABC$ thay đổi thỏa mãn:

$OA = OB = OC = a$; $SA \perp OA$, $SB \perp OB$, $SC \perp OC$, $\widehat{ASB} = 90^\circ$, $\widehat{BSC} = 60^\circ$, $\widehat{CSA} = 120^\circ$.

Chứng minh rằng:

1) $\triangle ABC$ là tam giác vuông.

2) Khoảng cách SO không thay đổi.

Bài 4.

Ký hiệu C_n^k là số các tổ hợp chập k của n phần tử ($0 \leq k \leq n$), tính tổng sau:

$$S = C_{2010}^0 + 2C_{2010}^1 + 3C_{2010}^2 + \cdots + 2011C_{2010}^{2010}.$$

Bài 5.

Các số thực dương x, y thỏa mãn điều kiện $x + y + 1 = 3xy$. Tìm giá trị lớn nhất của:

$$M = \frac{3x}{y(x+1)} + \frac{3y}{x(y+1)} - \frac{1}{x^2} - \frac{1}{y^2}$$

———— Hết ————

Sở Giáo Dục - Đào Tạo Đồng Nai

Ngày thi

Đề thi Chọn Học Sinh Giải

Môn thi: Toán học

Vòng 1

Bài 1.

Giải phương trình trên tập số thực:

$$x^5 - x^4 - x^3 - 11x^2 + 25x - 14 = 0.$$

Bài 2.Cho $a; b; c > 0$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} \geq \frac{3(a+b+c)}{2(a^2+b^2+c^2)}.$$

Bài 3.

Giải phương trình:

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \cdot \sin^3 3x + \cos\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) \cdot \cos^3 x = 0.$$

Bài 4.Cho $m; n$ là 2 số nguyên dương chẵn, $u; v$ là 2 số nguyên dương lẻ sao cho $m^2 - n^2 = u^2 - v^2 > 0$.Chứng minh $(m^2 + v^2)$ là hợp số.**Bài 5.**

Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ có đáy $ABCD$ là hình vuông. M di động trên đoạn AB , ($0 < AM < AB$). Lấy N thuộc cạnh A_1D_1 sao cho $A_1N = AM$. Chứng minh: MN luôn cắt và vuông góc với một đường thẳng cố định khi M thay đổi.

———— Hết ————

ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI TỈNH THÁI BÌNH NĂM HỌC 2010-2011

Thời gian làm bài: 180 phút (không kể thời gian phát đề)

(Áp dụng cho các thí sinh từ Tự thực đến chuyên B)

Câu 1: (4 điểm)

Cho hàm số $y = 2x^3 - (4m+1)x^2 + 4(m^2 - m + 1)x - 2m^2 + 3m - 2$ có đồ thị là (C_m)

1. Tìm điểm cố định mà (C_m) luôn đi qua với mọi m .
2. Tìm m để hàm số có cực đại và cực tiểu, đồng thời các giá trị cực trị của hàm số cùng dấu.

Câu 2: (4 điểm)

1. Giải phương trình: $\frac{\sqrt{3} \sin 2x - \cos 2x - 5 \sin x + (2 - \sqrt{3}) \cos x + 3 + \sqrt{3}}{2 \cos x + \sqrt{3}} = 1.$
2. Giải phương trình: $\log_3 \frac{2x-1}{(x-1)^2} = 3x^2 - 8x + 5.$

Câu 3: (2 điểm)

Tìm tất cả các giá trị của m để hệ sau có nghiệm (x, y) thỏa mãn $x \geq -1$.

$$\begin{cases} x > 2 \\ y \\ \frac{x^3 + 4}{y(x-2y)} = 8m \end{cases}$$

Câu 4: (3 điểm)

1. Chứng minh rằng với mỗi số nguyên dương n luôn tồn tại duy nhất số thực x_n sao cho $\frac{1}{2010^{x_n}} - x_n + n = 0$. Xét dãy số (u_n) với $(u_n) = x_n - n$.

Tính $\lim u_n$.

2. Tìm n nguyên dương thỏa mãn:

$$C_n^0 + 2C_n^1 + 6C_n^2 + \dots + (n^2 - n + 2^n)C_n^n = 403.$$

Câu 5: (2 điểm)

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , viết phương trình các đường thẳng chứa các cạnh của hình vuông, biết rằng các đường thẳng lần lượt đi qua các điểm: $M(2;1), N(0;1), P(3;5), Q(-3;-1)$.

Câu 6: (3 điểm)

Cho hình chóp $S.ABC$ có G trọng tâm tam giác ABC .

1. Gọi (P) là mặt phẳng cắt các đoạn SA, SB, SC, SG lần lượt tại A', B', C', G' sao cho không có điểm nào trùng với đầu mút của các đoạn thẳng.

Chứng minh rằng: $\frac{SA}{SA'} \cdot \frac{SB}{SB'} \cdot \frac{SC}{SC'} = 3 \frac{SG}{SG'}.$

2. Khi hình chóp $S.ABC$ có tất cả các cạnh bằng a . Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng SM và BN với M, N lần lượt là trung điểm của AB, SC .
3. Khi hình chóp $S.ABC$ có $SA = a, SB = 2a, SC = 3a$ và $\angle ASB = 60^\circ, \angle BSC = 90^\circ, \angle CSA = 120^\circ$. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$.

Câu 7: (2 điểm)

Cho 2010 số thực dương $a_1, a_2, \dots, a_{2010}$ thỏa mãn:

$$\frac{1}{1+a_1} + \frac{2}{2+a_2} + \dots + \frac{2010}{2010+a_{2010}} \geq 2009.$$

Tìm giá trị lớn nhất của $P = a_1 a_2 \dots a_{2010}$.

Sở Giáo Dục & Đào Tạo Lâm Đồng

Đề thi Chọn Học Sinh Giải

Năm học 2010-2011

Môn thi: Toán học

Vòng 2

Bài 1.

Giải phương trình:

$$\sqrt[3]{x+6} + x^2 = 7 - \sqrt{x-1}$$

Bài 2.

Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a} \geq \sqrt{a^2 - ab + b^2} + \sqrt{b^2 - bc + c^2} + \sqrt{c^2 - ac + a^2}$$

Bài 3.

Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn:

$$f\left((x-y)^2\right) = x^2 - 2y \cdot f(x) + (f(y))^2, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$$

Bài 4.

Cho tam giác BCD nội tiếp đường tròn tâm O . Gọi A là điểm sao cho $ABCD$ là hình bình hành. Gọi d là đường phân giác trong của góc $\widehat{BAD}$, d cắt đường thẳng DC tại F và cắt đường thẳng BC tại G . Gọi Δ là đường thẳng qua C và vuông góc với d , Δ cắt đường tròn tâm O tại điểm thứ hai là E . Gọi I, J, K lần lượt là hình chiếu của E lên các đường thẳng CB, CD, BD .

- 1) Chứng minh ba điểm I, J, K thẳng hàng.
- 2) Chứng minh E là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác CFG .

Bài 5.

Giải phương trình nghiệm nguyên:

$$x^3 - y^3 = xy + 8.$$

———— Hết ————

Sở Giáo Dục - Đào Tạo Nghệ An

Ngày thi

Đề thi Chọn Học Sinh Giải

Môn thi: Toán học

Vòng 1

Bài 1.

Giải hệ :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = \frac{1}{5} \\ 4x^2 + 3x - \frac{57}{25} = -y(3x + 1) \end{cases}$$

Bài 2.

Cho dãy số (x_n) với $x_1 = a, x_{n+1} = x_n(x_n - 1) \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Tìm điều kiện cần và đủ của a để dãy số trên hữu hạn.

Bài 3.

Cho tam giác ABC có phân giác trong AD. Gọi E, F lần lượt là hình chiếu của D trên AB, AC.

Gọi H là giao điểm của BF và CE.

Chứng minh rằng AH vuông góc BC

Bài 4.

Cho tam giác ABC có diện tích S , $BC=a$, $CA=b$, $AB=c$. Chứng minh rằng

$$\frac{(b+c-a)a^2}{b+c} + \frac{(c+a-b)b^2}{a+c} + \frac{(a+b-c)c^2}{a+b} \geq 2\sqrt{3}S$$

Bài 5.

Cho số nguyên dương $n \geq 2$ và tập $M = \{1; 2; 3; \dots; n\}$ Với mỗi tập A khác rỗng của M ta kí hiệu $|A|$ là số phần tử của tập A , $\min A$ và $\max A$ tương ứng là phần tử nhỏ nhất và lớn nhất của tập A .

Tính $\sum_{A \subset M, A \neq \emptyset} (\min A + \max A - |A|)$ theo n

———— Hết ————

Sở Giáo Dục & Đào Tạo

Đề thi Chọn Học Sinh Giỏi

Bà Rịa - Vũng Tàu

Môn thi: Toán học

Năm học 2010-2011

Vòng I

Bài 1.

Cho hàm số $y = \frac{x^2 + mx + m}{x^2 + 1}$. Tìm tất cả các giá trị của m để đồ thị hàm số cắt trục hoành tại hai điểm phân biệt và tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại hai điểm đó vuông góc với nhau.

Bài 2.

- 1) Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} \sqrt{2x} + \sqrt{2y} = 4 \\ \sqrt{2x+5} + \sqrt{2y+2} = 6 \end{cases}$$
- 2) Tìm GTLN và GTNN của hàm số $y = \tan^2 x + 16 \cos x$ trên $[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{3}]$.

Bài 3.

- 1) Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$, các mặt bên có góc ở đỉnh S có số đo là α ($0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$). Chứng minh điều kiện cần và đủ để tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp cách đều các mặt phẳng lần lượt chứa các mặt của hình chóp là $\alpha = \frac{\pi}{4}$.
- 2) Cho H là trực tâm của tam giác ABC không cân và góc A nhọn, hình chiếu của H trên AB, AC theo thứ tự là E, F . Gọi D là trung điểm của đoạn thẳng BC ; P, Q là giao điểm của các đường tròn đường kính AD , đường kính BC . Chứng minh H, P, Q thẳng hàng và các đường thẳng BC, EF, PQ đồng qui.

Bài 4.

Cho hàm số $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn $f(x+1) = f(x) + 2$ và $f^2(x) = 2f(x^2); \forall x \in \mathbb{R}$

Chứng minh:

- 1) $\forall x \in \mathbb{R}; \forall m \in \mathbb{Z}: f(x+m) = f(x) + 2m$.
- 2) $\forall q \in \mathbb{Q}: f(q) = 2q$

Bài 5.

Gọi T là phép biến đổi trên dãy số như sau: chọn 19 số hạng của dãy số và mỗi số hạng này được cộng thêm 1, các số hạng còn lại của dãy số giữ nguyên.

Cho dãy số gồm 2010 số nguyên $a_1; a_2; \dots; a_{2010}$

Chứng minh rằng : Từ dãy số đã cho, sau một số hữu hạn phép biến đổi T , ta có thể được dãy gồm 2010 số bằng nhau.

———— Hết ————

Sở Giáo Dục & Đào Tạo PHÚ THỌ

Đề thi Chọn Học Sinh Giỏi

Năm học 2010-2011

Môn thi: Toán học

Ngày thi 5/11/2010

Vòng 1

Bài 1.

Giải phương trình:

$$\frac{2 + \sqrt{2}}{\sqrt{\tan x + \cot 2x}} = \sqrt{2} + 2 \sin 2x$$

Bài 2.

Giải hệ phương trình sau trên $\mathbb{R}$:

$$\begin{cases} x^2 + 1 + y^2 + xy = 4y \\ x + y - 2 = \frac{y}{x^2 + 1} \end{cases}$$

Bài 3.

Tìm tất cả các nghiệm nguyên của phương trình:

$$2(x + y) + xy = x^2 + y^2.$$

Bài 4.

Cho dãy số $V_n = n^{n+1} \vee (n+1)^n \forall n \geq 3$.

- 1) Chứng minh rằng dãy (V_n) là dãy tăng $\forall n \geq 3$.
- 2) Tìm α lớn nhất sao cho $n^{n+1} \geq (n+1)^n + \alpha \forall n \geq 3$.

Bài 5.

Cho tam giác ABC thỏa mãn $a^2 = 4S \cot A$, trong đó $BC = a$ và S là diện tích của tam giác.

Gọi O và G lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp và trọng tâm của tam giác ABC . Chứng minh rằng hai đường thẳng AG và OG vuông góc với nhau.

Bài 6.

Điền số 896 số 1 và -1 vào bảng ô vuông kích thước 14×64 (14 hàng và 64 cột). Biết rằng với hai cột bất kỳ, số lần xuất hiện hai số cùng dấu ở trên cùng một hàng không vượt quá 7. Chứng minh rằng số các số 1 trong 896 số đã cho không lớn hơn 511.

———— Hết ————

SỞ GD-ĐT BÌNH PHƯỚC

ĐỀ CHÍNH THỨC

ĐỀ THI CHỌN HSG LỚP 12

NĂM HỌC 2010-2011

MÔN: TOÁN (Vòng 1)

Thời gian làm bài: 180 phút (không kể thời gian phát đề)

Ngày thi: 08/10/2010

Câu I (5 điểm)

1) Cho hàm số $y = x^3 - \frac{3}{2}mx^2 + \frac{1}{2}m^3, m \in \mathbb{R}$

a) Khảo sát vẽ đồ thị của hàm số khi $m = 1$.

b) Tìm m để đồ thị hàm số có các điểm cực đại và cực tiểu đối xứng nhau qua đường thẳng $y = x$.

2) (*Học viên TT GDTX không phải làm câu này*)

Tìm tất cả các giá trị của a, b để phương trình $\frac{x^2 - 2ax + b}{bx^2 - 2ax + 1} = m$ có hai nghiệm phân biệt với mọi m .

Câu II (4 điểm)

1) Cho phương trình: $2\cos 2x + \sin^2 x \cdot \cos x + \sin x \cdot \cos^2 x = m(\sin x + \cos x)$, với m là tham số.

a) Giải phương trình khi $m = 2$.

b) Tìm m để phương trình có ít nhất một nghiệm $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

2) Giải bất phương trình: $\sqrt{x^2 - 4x + 3} - \sqrt{2x^2 - 3x + 1} \geq x - 1$

Câu III (3 điểm)

Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} y + xy^2 = -6x^2 \\ 1 + x^3y^3 = 19x^3 \end{cases}$$

Câu IV (5 điểm)

Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D' có cạnh bằng a . Trên AB lấy điểm M, trên CC' lấy điểm N, trên D'A' lấy điểm P sao cho $AM = CN = D'P = x$ với $(0 \leq x \leq a)$.

1) Chứng minh rằng tam giác MNP là tam giác đều. Tính diện tích tam giác MNP theo a và x . Tìm x để diện tích ấy nhỏ nhất.

2) Khi $x = \frac{a}{2}$ hãy tính thể tích khối tứ diện B'MNP và bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện.

Câu V (3 điểm) (*Học viên TT GDTX không phải làm câu này*)

Chứng minh bất đẳng thức $\frac{2x^n}{1+x^{n+1}} \leq \left(\frac{1+x}{2}\right)^{n-1} \leq \frac{x^n - 1}{n(x-1)}$, trong đó x là số thực dương, $x \neq 1$ và $n \in \mathbb{N}^*$.

HẾT

Bài 1.

Chứng minh rằng các đồ thị hàm số $y = x^2 - 1$ và $y = \frac{2x+1}{x}$ có ba điểm chung phân biệt.
Xác định tọa độ tâm đường tròn đi qua ba điểm chung trên.

Bài 2.

Trong mặt phẳng Oxy cho elip (E) có phương trình $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ và đường tròn (C) có phương trình $x^2 + y^2 = 16$. Từ điểm M trên (C) ta kẻ hai tiếp tuyến đến (E) là MT_1 và MT_2 với hai tiếp điểm là T_1, T_2 .

- 1) Khi M có hoành độ $x_M = -4$, hãy viết phương trình các đường thẳng MT_1, MT_2, T_1T_2 .
- 2) Khi M thay đổi trên (C) , tìm giá trị lớn nhất của khoảng cách từ M đến đường thẳng T_1T_2 .

Bài 3.

- 1) Giải phương trình $\frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1} - \sqrt{3-x}} = x - \frac{1}{2}$
- 2) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2 + \sqrt{x} = 2y \\ y^2 + \sqrt{y} = 2x \end{cases}$

Bài 4.

Cho dãy số $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ thỏa mãn $x_1 = 1, x_{n+1} = \sqrt{x_n^2 + x_n + 1} - \sqrt{x_n^2 - x_n + 1}$ với mọi n nguyên dương.

- 1) Chứng minh rằng dãy số trên có giới hạn.
- 2) Tìm giới hạn của dãy số đó.

Bài 5.

- 1) Cho $f : [a; b] \rightarrow [a; b]$ là hàm số liên tục.
Chứng minh rằng phương trình $f(x) = x$ có nghiệm thuộc $[a; b]$
- 2) Cho $g : [-1; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ là hàm số liên tục.
Chứng minh rằng phương trình $xg^2(x) - 2g(x) + x = 0$ có nghiệm thuộc $[-1; 1]$

———— Hết ————

Sở Giáo Dục & Đào Tạo Quảng Bình

Đề thi Chọn Học Sinh Giỏi

Năm 2010

Môn thi: Toán học

Vòng I

Bài 1.

Giải PT

$$x^3 + 3x^2 + 4x + 2 = (3x + 2) \sqrt{3x + 1}$$

Bài 2.

1) Cho $x > 0$, tìm min:

$$\sqrt{x^3} - \frac{3x}{2}$$

2) Cho $a, b, c > 0$. CMR:

$$\sum \sqrt{\frac{a^3}{b^3}} \geq \sum \frac{a}{b}$$

Bài 3.

Cho dãy u_n xác định như sau: $u_1 = 1; u_{n+1} = u_n^2 + \frac{u_n}{2010}$. Tìm

$$\lim \left(\sum \frac{u_n}{u_{n+1}} \right)$$

Bài 4.

Cho hình vuông $ABCD$. Trên đoạn BD lấy M không trùng với B, D . Gọi E, F lần lượt là hình chiếu của M trên các cạnh AB, AD . CMR:

1) CM vuông góc với EF

2) Ba đường thẳng CM, BF, DE đồng quy

Bài 5.

Tìm tất cả các giá trị nguyên dương k để PT:

$$x^2 + y^2 + x + y = kxy$$

có nghiệm nguyên dương

———— Hết ————