

**SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
GIA LAI**

ĐỀ CHÍNH THỨC

**KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI CẤP TỈNH
LỚP 12 THPT NĂM HỌC 2010 – 2011**

Môn thi: **Toán - Bảng B**
Thời gian làm bài: **180 phút**
Ngày thi: **01/12/2010**

Câu 1: (3 điểm)

Tìm tất cả các bộ 3 số nguyên dương (m, n, p) sao cho $\frac{3mn-1}{mnp+1}$ là số nguyên dương.

Câu 2: (4 điểm)

Giả sử a, b, c là các số thực thỏa mãn $a < 2(b+c)$, $b < 2(c+a)$, $c < 2(a+b)$.

a) Chứng minh rằng nếu phương trình $x^2 - (a+b+c)x + ab+bc+ca = 0$ có nghiệm thì các nghiệm đều là số dương.

b) Chứng minh bất đẳng thức: $\frac{4(a^3+b^3+c^3)+15abc}{(a+b+c)(ab+bc+ca)} < 6$.

Câu 3: (4 điểm)

Tìm tất cả các đa thức $P(x)$ với hệ số thực, thỏa mãn đẳng thức

$$(x^4 + 3x^3 + 3x^2 + 2x).P(x) = (x^4 - x^3 + x - 1).P(x+1), \text{ với mọi } x \in \mathbb{R}.$$

Câu 4: (4,5 điểm)

Cho tam giác ABC có các cạnh là a, b, c . Gọi r, R, p, S lần lượt là bán kính đường tròn nội tiếp, bán kính đường tròn ngoại tiếp, nửa chu vi, diện tích của tam giác. Chứng minh rằng:

a) $\sin A \cdot \sin B \cdot \sin C = \frac{S}{2R^2}$, $\cos \frac{A}{2} \cdot \cos \frac{B}{2} \cdot \cos \frac{C}{2} = \frac{p}{4R}$ và $\sin \frac{A}{2} \cdot \sin \frac{B}{2} \cdot \sin \frac{C}{2} = \frac{r}{4R}$.

b) $\frac{b+c-a}{b+c} + \frac{c+a-b}{c+a} + \frac{a+b-c}{a+b} \geq \frac{3r}{R}$.

Câu 5: (4,5 điểm)

Cho tứ diện SABC có các cạnh SA, SB, SC vuông góc với nhau từng đôi một. Gọi SM là đường cao của tam giác BSC và I_1, I_2 lần lượt là các tâm đường tròn nội tiếp tam giác BSM, CSM. Đường thẳng I_1I_2 cắt SB tại P và SC tại Q. Chứng minh:

a) Tam giác PSQ vuông cân và $SP = SM = SQ$.

b) $V_{SABC} \geq 2.V_{SAPQ}$, trong đó V_{SABC} và V_{SAPQ} lần lượt là thể tích của tứ diện SABC và tứ diện SAPQ.

-----HẾT-----

**SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
GIA LAI**

**KÌ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI CẤP TỈNH
LỚP 12 THPT - NĂM HỌC 2010 - 2011**

ĐỀ CHÍNH THỨC

**ĐÁP ÁN VÀ HƯỚNG DẪN CHẤM
Môn: Toán - Bảng B**

Câu 1: (3 điểm)

Giả sử rằng $\frac{3mn-1}{mnp+1} = k$, trong đó k là số nguyên dương.....0,5 đ

Thế thì, ta có

$$3mn-1 = kmnp + k, \text{ hay } 3mn - kmnp = k+1, \text{ hay } mn = \frac{k+1}{3-kp} \dots\dots\dots 0,5 \text{ đ}$$

Vì m, n, p và k là các số nguyên dương, nên mn và $k+1$ cũng là số nguyên dương.
Do đó $3-kp$ cũng là số nguyên dương.....0,5 đ

Suy ra $(k, p) = (1,1), (2,1), (1,2) \dots\dots\dots 0,5 \text{ đ}$

- Nếu $(k, p) = (1,1)$, thì $mn = 1$. Do đó $(m, n) = (1,1)$.
- Nếu $(k, p) = (2,1)$, thì $mn = 3$. Do đó $(m, n) = (3,1)$ hoặc $(1,3)$.
- Nếu $(k, p) = (1,2)$, thì $mn = 2$. Do đó $(m, n) = (2,1)$ hoặc $(1,2) \dots\dots\dots 0,5 \text{ đ}$

Vậy

$$(m, n, p) = (1,1,1), (3,1,1), (1,3,1), (2,1,2), (1,2,2) \dots\dots\dots 0,5 \text{ đ}$$

Câu 2: (4 điểm)

a) Từ giả thiết, suy ra rằng $a+b+c < 4(a+b+c)$, hay $a+b+c > 0 \dots\dots\dots 0,5 \text{ đ}$

Bây giờ, không mất tính tổng quát, giả sử $a \geq b \geq c$.

Khi đó, vì $a+b+c > 0$ nên $a > 0$. Ta có

$$ab+bc+ca = a(b+c)+bc > a(a-b-c)+bc \text{ (vì } 2(b+c) > a \text{)} \dots\dots\dots 0,5 \text{ đ}$$

$$= (a-b)(a-c) \geq 0.$$

Suy ra $ab+bc+ca > 0$ 0,5 đ

Nếu phương trình $x^2 - (a+b+c)x + ab+bc+ca = 0$ có 2 nghiệm $x_1 \geq x_2$, thì

$$x_1 + x_2 = a+b+c > 0 \text{ và } x_1 x_2 = ab+bc+ca > 0 \text{0,5 đ}$$

Suy ra $x_1 > 0$ và $x_2 > 0$ (đpcm).....0,5 đ

b) Vì $a+b+c > 0$ và $ab+bc+ca > 0$ nên bất đẳng thức đã cho tương đương với

$$-4(a^3+b^3+c^3) + 6(a+b+c)(ab+bc+ca) - 15abc > 0, \quad (1)$$

Đặt

$$A = a^3 + b^3 + c^3,$$

$$B = a + b + c,$$

$$C = ab + bc + ca,$$

$$D = abc,$$

$$M = a^2 + b^2 + c^2.$$

Ta đã biết rằng

$$a^3 + b^3 + c^3 = (a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca) + 3abc.$$

hay

$$A = B(M - C) + 3D. \quad (2) \text{.....0,5 đ}$$

- Chứng minh (1):

Ta cần chứng minh $-4A + 6BC - 15D > 0$.

Ta có:

$$-4A + 6BC - 15D > 0$$

$$\Leftrightarrow -4[B(M - C) + 3D] + 6BC - 15D > 0 \quad (\text{do (2)})$$

$$\Leftrightarrow -4BM + 4BC - 12D + 6BC - 15D > 0$$

$$\Leftrightarrow -4BM + 10BC - 27D > 0$$

$$\Leftrightarrow 2B(5C - 2M) - 27D > 0$$

$$\Leftrightarrow 2B[5C - 2(B^2 - 2C)] - 27D > 0$$

$$\Leftrightarrow 2B(5C - 2B^2 + 4C) - 27D > 0$$

$$\Leftrightarrow 2B(9C - 2B^2) - 27D > 0$$

$$\Leftrightarrow -4B^3 + 18BC - 27D > 0$$

$$\Leftrightarrow (8B^3 - 12B^3) + 18BC - 27D > 0 \dots\dots\dots 0,5 \text{ đ}$$

$$\Leftrightarrow 8B^3 - 12(a+b+c)B^2 + 18B(ab+bc+ca) - 27abc > 0$$

$$\Leftrightarrow 8B^3 - 12aB^2 - 12bB^2 - 12cB^2 + 18abB + 18bcB + 18caB - 27abc > 0$$

$$\Leftrightarrow 2B(4B^2 - 6cB - 6bB + 9bc) - 3a(4B^2 - 6cB - 6bB + 9bc) > 0$$

$$\Leftrightarrow (2B - 3a)(4B^2 - 6cB - 6bB + 9bc) > 0$$

$$\Leftrightarrow (2B - 3a)(2B - 3b)(2B - 3c) > 0$$

$$\Leftrightarrow (2b + 2c - a)(2c + 2a - b)(2a + 2b - c) > 0$$

$$(\text{hiển nhiên, do giả thiết}) \dots\dots\dots 0,5 \text{ đ}$$

Câu 3: (4 điểm)

Đẳng thức đã cho tương đương với

$$x(x+2)(x^2+x+1).P(x) = (x^2-1)(x^2-x+1).P(x+1), \forall x \in \mathbb{R}. \quad (1) \dots\dots\dots 0,5 \text{ đ}$$

- Với $x = -2$: $(1) \Rightarrow P(-1) = 0$.

- Với $x = 1$: $(1) \Rightarrow P(1) = 0 \dots\dots\dots 0,5 \text{ đ}$

Vậy $P(x) = (x+1)(x-1).G(x) = (x^2-1).G(x) \dots\dots\dots 0,5 \text{ đ}$

Thay vào (1), ta có

$$x(x+2)(x^2+x+1)(x^2-1).G(x) = (x^2-1)(x^2-x+1)(x+2)x.G(x+1), \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow (x^2+x+1).G(x) = (x^2-x+1).G(x+1), \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \frac{G(x)}{x^2-x+1} = \frac{G(x+1)}{x^2+x+1}. \quad (2) \dots\dots\dots 0,5 \text{ đ}$$

Đặt $H(x) = \frac{G(x)}{x^2-x+1} \quad (x \neq \pm 1) \dots\dots\dots 0,5 \text{ đ}$

Ta có

$$(2) \Leftrightarrow H(x) = H(x+1), \forall x \in \mathbb{R}, x \neq \pm 1 \dots\dots\dots 0,5 \text{ đ}$$

Vậy $H(x) = C$ (C : hằng số).....0,5 đ

Suy ra $P(x) = C(x^2 - 1)(x^2 - x + 1)$.

Thử lại, thấy đa thức trên thỏa mãn điều kiện bài toán.....0,5 đ

Câu 4: (4,5 điểm)

a1) Chứng minh: $\sin A \cdot \sin B \cdot \sin C = \frac{S}{2R^2}$.

Ta có

$$S = \frac{abc}{4R} = \frac{(2R \cdot \sin A)(2R \cdot \sin B)(2R \cdot \sin C)}{4R} = 2R^2 \cdot \sin A \sin B \sin C.$$

Suy ra điều phải chứng minh.....0,5 đ

a2) Chứng minh: $\cos \frac{A}{2} \cdot \cos \frac{B}{2} \cdot \cos \frac{C}{2} = \frac{p}{4R}$.

Theo Định lý hàm số sin, ta có

$$2R = \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = \frac{a+b+c}{\sin A + \sin B + \sin C} \dots\dots\dots 0,5 \text{ đ}$$

$$= \frac{2p}{4 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}}.$$

Giám khảo lưu ý:

Thí sinh không cần chứng minh công thức

$$\sin A + \sin B + \sin C = 4 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}.$$

Suy ra

$$\cos \frac{A}{2} \cdot \cos \frac{B}{2} \cdot \cos \frac{C}{2} = \frac{p}{4R} \dots\dots\dots 0,5 \text{ đ}$$

a3) Chứng minh: $\sin \frac{A}{2} \cdot \sin \frac{B}{2} \cdot \sin \frac{C}{2} = \frac{r}{4R}$.

Ta có

$$\begin{aligned}\sin A \sin B \sin C &= 8 \cdot \left(\sin \frac{A}{2} \cdot \sin \frac{B}{2} \cdot \sin \frac{C}{2} \right) \cdot \left(\cos \frac{A}{2} \cdot \cos \frac{B}{2} \cdot \cos \frac{C}{2} \right) \\ &= 8 \cdot \left(\sin \frac{A}{2} \cdot \sin \frac{B}{2} \cdot \sin \frac{C}{2} \right) \cdot \frac{p}{4R} \dots\dots\dots 0,5 \text{ đ}\end{aligned}$$

Suy ra

$$\begin{aligned}\sin \frac{A}{2} \cdot \sin \frac{B}{2} \cdot \sin \frac{C}{2} &= \frac{R}{2p} \cdot \sin A \sin B \sin C \\ &= \frac{R}{2p} \cdot \frac{S}{2R^2} = \frac{S}{p} \cdot \frac{1}{4R} = r \cdot \frac{1}{4R} = \frac{r}{4R} \dots\dots\dots 0,5 \text{ đ}\end{aligned}$$

b) Theo Định lý hàm số sin và từ kết quả câu a), ta có

$$\begin{aligned}\frac{b+c-a}{b+c} &= \frac{2R \cdot \sin B + 2R \cdot \sin C - 2R \cdot \sin A}{2R \cdot \sin B + 2R \cdot \sin C} = \frac{\sin B + \sin C - \sin A}{\sin B + \sin C} \\ &= \frac{2 \cdot \sin \frac{B+C}{2} \cdot \cos \frac{B-C}{2} - 2 \cdot \sin \frac{A}{2} \cdot \cos \frac{A}{2}}{2 \cdot \sin \frac{B+C}{2} \cdot \cos \frac{B-C}{2}} \\ &= \frac{2 \cdot \cos \frac{A}{2} \cdot \cos \frac{B-C}{2} - 2 \cdot \sin \frac{A}{2} \cdot \cos \frac{A}{2}}{2 \cdot \cos \frac{A}{2} \cdot \cos \frac{B-C}{2}} \\ &= \frac{\cos \frac{B-C}{2} - \sin \frac{A}{2}}{\cos \frac{B-C}{2}} = \frac{\cos \frac{B-C}{2} - \cos \frac{B+C}{2}}{\cos \frac{B-C}{2}} \\ &= \frac{2 \cdot \sin \frac{B}{2} \cdot \sin \frac{C}{2}}{\cos \frac{B-C}{2}} \geq 2 \cdot \sin \frac{B}{2} \cdot \sin \frac{C}{2} = \frac{r}{2R \cdot \sin \frac{A}{2}}\end{aligned}$$

Vậy

$$\frac{b+c-a}{b+c} \geq \frac{r}{2R \cdot \sin \frac{A}{2}} \dots\dots\dots 1,0 \text{ đ}$$

Tương tự, ta suy ra

$$\frac{b+c-a}{b+c} + \frac{c+a-b}{c+a} + \frac{a+b-c}{a+b} \geq \frac{r}{2R} \left(\frac{1}{\sin \frac{A}{2}} + \frac{1}{\sin \frac{B}{2}} + \frac{1}{\sin \frac{C}{2}} \right) \dots\dots\dots 0,5 \text{ đ}$$

Hơn nữa

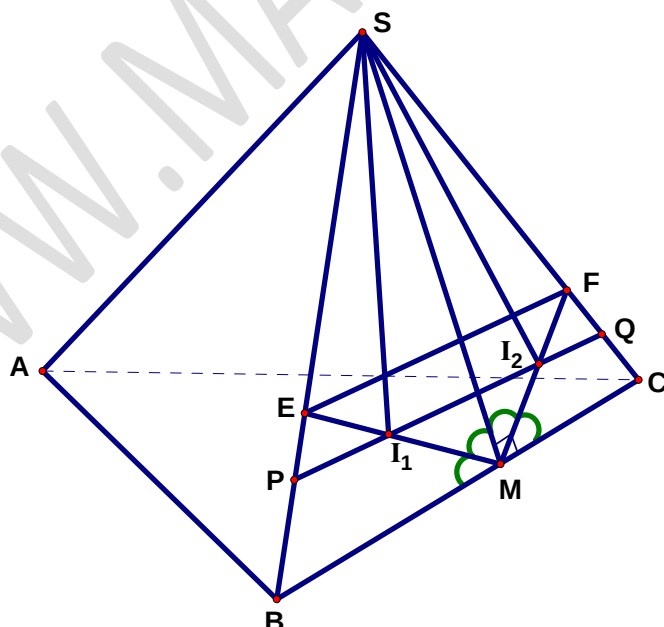
$$\frac{1}{\sin \frac{A}{2}} + \frac{1}{\sin \frac{B}{2}} + \frac{1}{\sin \frac{C}{2}} \geq 3 \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{\sin \frac{A}{2} \cdot \sin \frac{B}{2} \cdot \sin \frac{C}{2}}} \geq 3 \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{\left(\frac{1}{8}\right)}} = 3 \cdot 2 = 6.$$

Giám khảo lưu ý:
 Thí sinh không cần chứng minh công thức
 $\sin \frac{A}{2} \cdot \sin \frac{B}{2} \cdot \sin \frac{C}{2} \leq \frac{1}{8}.$

Vậy

$$\frac{b+c-a}{b+c} + \frac{c+a-b}{c+a} + \frac{a+b-c}{a+b} \geq \frac{r}{2R} \cdot 6 = \frac{3r}{R} \dots\dots\dots 0,5 \text{ đ}$$

Câu 5: (4,5 điểm)



a) - Giả sử MI_1 cắt SB tại E, MI_2 cắt SC tại F.....0,5 đ

Tứ giác SEMF nội tiếp $\Rightarrow \widehat{SEF} = \widehat{SMF} = 45^\circ$ và $\widehat{SFE} = \widehat{SME} = 45^\circ$
 $\Rightarrow \widehat{SEF} = \widehat{SFE} = 45^\circ \Rightarrow \triangle ESF$ vuông cân.....0,5 đ

Theo tính chất đường phân giác, ta có

$$\frac{I_1E}{I_1M} = \frac{SE}{SM} \text{ và } \frac{I_2F}{I_2M} = \frac{SF}{SM} \dots\dots\dots 0,5 \text{ đ}$$

Mà $SE = SF$, nên $\frac{I_1E}{I_1M} = \frac{I_2F}{I_2M}$.

Suy ra $PQ \parallel EF$ hay $\triangle PSQ$ vuông cân.....0,5 đ

- Ta có

$$\begin{aligned} \triangle PSI_1 &= \triangle MSI_1 \text{ (g-c-g)} \Rightarrow SP = SM, \\ \triangle QSI_2 &= \triangle MSI_2 \text{ (g-c-g)} \Rightarrow SQ = SM \dots\dots\dots 0,5 \text{ đ} \end{aligned}$$

Suy ra $SP = SM = SQ \dots\dots\dots 0,5 \text{ đ}$

b) Dựng $AH \perp mp(BSC)$. Ta có

$$\frac{V_{SABC}}{V_{SAPQ}} = \frac{(1/3) \cdot S_{BSC} \cdot AH}{(1/3) \cdot S_{PSQ} \cdot AH} = \frac{S_{BSC}}{S_{PSQ}} \dots\dots\dots 0,5 \text{ đ}$$

$$= \frac{(1/2) \cdot SB \cdot SC}{(1/2) \cdot SP \cdot SQ} = \frac{SB \cdot SC}{SM \cdot SM} = SB \cdot SC \cdot \frac{1}{SM^2} \dots\dots\dots 0,5 \text{ đ}$$

$$= SB \cdot SC \cdot \left(\frac{1}{SB^2} + \frac{1}{SC^2} \right) = \frac{SC}{SB} + \frac{SB}{SC} \geq 2 \dots\dots\dots 0,5 \text{ đ}$$

Suy ra điều phải chứng minh.

.....HẾT.....