

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
LÀO CAI
ĐỀ THI CHÍNH THỨC

KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI CẤP TỈNH
LỚP 12 THPT NĂM HỌC 2010 – 2011
Môn: TOÁN

Thời gian: **180 phút** (không kể thời gian giao đề)
 Ngày thi: **16/12/2010**

Câu 1 (5,5 điểm)

1. Giải phương trình: $x^2 + 2010x + 2011 = 2x\sqrt{2010x + 2011}$.
2. Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x^2y + xy^2 = 30 \\ x^3 + y^3 = 35 \end{cases}$$
.

Câu 2 (3,0 điểm)

Tìm tất cả các hàm số $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện $|f(x) - f(q)| \leq 2010(x - q)^2$, với mọi số thực x và mọi số hữu tỉ q .

Câu 3 (6,0 điểm)

1. Trong mặt phẳng Oxy , cho tam giác ABC có đỉnh $A(5; 2)$, đường trung trực của cạnh BC , đường trung tuyến kẻ từ đỉnh C của tam giác ABC lần lượt có phương trình là $d: x + y - 6 = 0$ và $d': 2x - y + 3 = 0$. Tìm tọa độ các đỉnh còn lại của tam giác ABC .
2. Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$, có cạnh đáy bằng a . Gọi α là góc giữa mặt bên và mặt đáy, β là góc giữa hai mặt bên kề nhau. Tính thể tích của hình chóp $S.ABC$ và chứng minh rằng:
$$\tan^2 \alpha = \frac{4}{3 \tan^2 \left(\frac{\beta}{2} \right) - 1}.$$

Câu 4 (2,5 điểm)

Trong mặt phẳng cho n đường thẳng ($n \geq 3$) trong đó không có hai đường thẳng nào song song và không có ba đường thẳng nào đồng quy. Chứng minh rằng tồn tại một tam giác có các đỉnh là ba đường thẳng đã cho mà tam giác này không bị chia cắt bởi bất kỳ đường thẳng nào trong các đường thẳng còn lại.

Câu 5 (3,0 điểm)

Với các chữ số 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 có thể lập được bao nhiêu số gồm bảy chữ số khác nhau sao cho ba chữ số đầu không đồng nhau.

----- **Hết** -----

Ghi chú:

- Thí sinh không được sử dụng tài liệu.
- Cán bộ coi thi không ghi ý thích gì thêm.

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
LÀO CAI
HỌC NGƯỜI NCHM
CHÍNH THỨC

KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI CẤP TỈNH
LỚP 12 THPT NĂM HỌC 2010 – 2011
Môn: TOÁN
 (Học sinh nào làm bài này gồm có 04 trang)

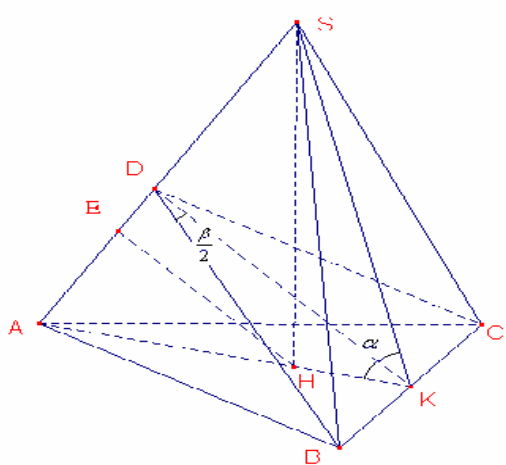
A. Học sinh nào làm bài

- Cho điểm là 0,25;
- Điểm toàn bài là tổng điểm thành phần, không làm tròn;
- Chỉ cho điểm khi đã làm cả thí sinh chính xác và một khi nào;
- Học sinh giải đúng bằng cách khác cho điểm tổng cộng các thành phần.

B. Đáp án và thang điểm

Câu	Nội dung	Điểm
1.1	Giải phương trình: $x^2 + 2010x + 2011 = 2x\sqrt{2010x + 2011}$	
	- Điều kiện: $x \geq \frac{-2011}{2010}$	0,25
	- Phương trình đã cho có dạng $(x - \sqrt{2010x + 2011})^2 = 0$	0,75
	$\Leftrightarrow x = \sqrt{2010x + 2011}$	0,5
	$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 - 2010x - 2011 = 0 \end{cases}$	0,5
	$\Leftrightarrow x = 2011$	0,5
1.2	Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2y + xy^2 = 30 \\ x^3 + y^3 = 35 \end{cases}$	
	- Viết lại hệ $\begin{cases} xy(x+y) = 30 \\ x^3 + y^3 + 3xy(x+y) = 125 \end{cases}$	0,75
	$\Leftrightarrow \begin{cases} xy(x+y) = 30 \\ (x+y)^3 = 125 \end{cases}$	0,75
	$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y = 5 \\ xy = 6 \end{cases}$	0,75
	- Giải ra ta được nghiệm của hệ là (2; 3) và (3; 2).	0,75
2	Tìm tất cả các hàm số $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn $ f(x) - f(q) \leq 2010(x - q)^2$, với mọi x thuộc $\mathbb{R}$ và mọi q thuộc $\mathbb{R}$.	
	- Với mọi $x, x_0 \in \mathbb{R} (x \neq x_0)$, chọn số q nằm giữa x và x_0 thì: $ f(x) - f(x_0) = f(x) - f(q) + f(q) - f(x_0) \leq f(x) - f(q) + f(q) - f(x_0) \leq$	0,5
	$2010(x - q)^2 + 2010(q - x_0)^2 \leq 2010(x - x_0)^2 + 2010(x - x_0)^2 = 4020(x - x_0)^2$ (1)	0,5

	$\forall y$ ta có $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) - f(x_0) = 0$. Suy ra $f(x)$ liên tục tại mọi $x_0 \in \mathbb{R}$.	0,25
	- Mất khác (1), ta có $\left \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right \leq 4020 x - x_0$,	0,5
	suy ra $\lim_{x \rightarrow x_0} \left \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right = 0$, hay $f'(x_0) = 0, \forall x_0 \in \mathbb{R}$.	0,5
	- Do $f(x)$ liên tục và có $f'(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$, suy ra $f(x) = c, \forall x \in \mathbb{R}$. - Thế lại, ta thấy hàm này thỏa mãn điều kiện bài toán.	0,75
3.1	Trong mặt phẳng Oxy, cho tam giác ABC có đỉnh $A(5; 2)$, đường trung trực của cạnh BC, đường trung tuyến kẻ từ đỉnh C của tam giác ABC lần lượt có phương trình là $d: x + y - 6 = 0$ và $d': 2x - y + 3 = 0$. Tìm tọa độ các đỉnh còn lại của tam giác ABC.	
	- Gọi $S \in B(a; b)$, Vì C thuộc đường thẳng d' nên gọi $C(c; 2c+3)$.	0,5
	- Ta có: trung điểm AB là $M\left(\frac{a+5}{2}; \frac{b+2}{2}\right) \in d'$	0,25
	và trung điểm BC là $N\left(\frac{a+c}{2}; \frac{b+2c+3}{2}\right) \in d$	0,25
	và $\overline{CB} = (a - c; b - 2c - 3)$.	0,25
	- Thế lại thì ta có hệ phương trình $\begin{cases} a + b + 3c - 9 = 0 \\ a - b + c + 3 = 0 \\ 2a - b + 14 = 0 \end{cases}$	0,75
	Giải ra được nghiệm của hệ là $\begin{cases} a = \frac{-19}{3} \\ b = \frac{4}{3} \\ c = \frac{14}{3} \end{cases}$	0,5
	$\forall y$ các đỉnh còn tìm $B\left(\frac{-19}{3}; \frac{4}{3}\right), C\left(\frac{14}{3}; \frac{37}{3}\right)$.	0,5
3.2	Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$, có cạnh đáy bằng a. Gọi α là góc giữa mặt bên và mặt đáy, β là góc giữa hai mặt bên kề nhau. Tính thể tích của hình chóp $S.ABC$ và chứng minh rằng $\tan^2 \alpha = \frac{4}{3 \tan^2 \left(\frac{\beta}{2}\right) - 1}$.	

	 (Thí sinh không vẽ hình hoặc vẽ sai hình, giám khảo không chấm phần bài làm của thí sinh).	
	- Gọi K là trung điểm của BC. Vì S.ABC là hình chóp tam giác đều nên $AK \perp BC$, $SK \perp BC$, suy ra $\widehat{AKS} = \alpha$. - H$\square$ $KD \perp SA \Rightarrow SA \perp (DBC) \Rightarrow \widehat{BDC} = \beta$. Có $DB = DC \Rightarrow \widehat{BDK} = \frac{\beta}{2}$. - H$\square$ $SH \perp AK \Rightarrow H$ là tâm đáy.	0,5
	- Ta có $h = SH = \frac{a\sqrt{3}}{6} \tan \alpha \Rightarrow h^2 = \frac{a^2}{12} \tan^2 \alpha$ (1) - Diện tích $\triangle ABC$ là $S_{(\triangle ABC)} = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4}$	0,5
	- Vậy thể tích của hình chóp S.ABC là $V = \frac{1}{3} \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} \frac{a\sqrt{3}}{6} \tan \alpha = \frac{a^3}{24} \tan \alpha$.	0,5
	- Trong $\triangle SAH$ vuông tại H, có $\frac{1}{HE^2} = \frac{1}{HA^2} + \frac{1}{h^2} \Rightarrow \frac{1}{h^2} = \frac{1}{HE^2} - \frac{1}{HA^2}$	0,5
	$\Rightarrow h^2 = \frac{HE^2 \cdot HA^2}{HA^2 - HE^2} = \frac{\frac{a^2}{9 \tan^2 \frac{\beta}{2}} \left(\frac{2a\sqrt{3}}{3} \right)^2}{\left(\frac{2a\sqrt{3}}{3} \right)^2 - \frac{a^2}{9 \tan^2 \frac{\beta}{2}}} = \frac{a^2}{3 \left(3 \tan^2 \frac{\beta}{2} - 1 \right)}$ (2)	0,5
	- Từ (1) và (2), ta có $\frac{a^2}{12} \tan^2 \alpha = \frac{a^2}{3 \left(3 \tan^2 \frac{\beta}{2} - 1 \right)} \Leftrightarrow \tan^2 \alpha = \frac{4}{3 \tan^2 \frac{\beta}{2} - 1}$ (đpcm).	0,5
4	Trong mặt phẳng cho n đường thẳng ($n \geq 3$) trong đó không có hai đường thẳng nào song song và không có ba đường thẳng nào đồng quy. Chứng minh rằng tồn tại một tam giác đồng thời có thành ba đường thẳng đã cho mà tam giác này không bị chia cắt bởi bất kỳ đường thẳng nào trong các đường thẳng còn lại.	

	- Gọi s là số đường thẳng đã cho. Xét tất cả các giao điểm của $n-1$ đường thẳng còn lại. Gọi M là tập hợp các khoảng cách (chú ý rằng số đo là một số thực dương) từ các giao điểm đó đến đường thẳng d_1. M có số nhỏ nhất là t_0.	0,75
	- Gọi s là giao điểm của hai đường thẳng d_2 và d_3 có khoảng cách đến d_1 bằng t_0. Các đường thẳng d_2 và d_3 cắt đường thẳng d_1 tại các điểm Q và R thẳng hàng (vì không có hai đường thẳng nào song song). Như thế $\triangle PQR$ được tạo thành từ ba đường thẳng d_1, d_2 và d_3 và không bao gồm bất kỳ đường thẳng nào.	0,75
	- Thật vậy, gọi s có đường thẳng d_4 cắt cạnh PR hoặc cạnh PQ tại điểm $T \neq P$ (vì không có ba đường thẳng nào đồng quy). Khoảng cách từ T đến d_1 là t_1. Rõ ràng $t_1 < t_0$. Điều này trái với giả thiết t_0 là khoảng cách nhỏ nhất.	0,75
	- Vậy từ $\triangle PQR$ ta nhận yêu cầu.	0,25
5	Với các chữ số 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 có thể lập được bao nhiêu số gồm bảy chữ số khác nhau sao cho ba chữ số không đồng nhau.	
	- Gọi A là tập các số gồm bảy chữ số khác nhau. Ta có $A = 7!$.	0,25
	+ B là tập các số gồm 7 chữ số khác nhau mà 3 chữ số không đồng nhau. + C là tập các số gồm 7 chữ số khác nhau mà 3 chữ số đồng nhau: $C \subset A$. + D là tập các số gồm 7 chữ số khác nhau mà 4 chữ số đồng nhau: $D \subset C$. - Khi đó số các hoán vị theo yêu cầu là: $B = A - C$.	0,5
	- Tính C: + Gọi $\alpha = (a_1, a_2, a_3)$, với $a_1, a_2, a_3 \in \{1, 3, 5, 7\}$, suy ra có $C_4^3 = 4$ cách chọn α. Với mỗi α có 3! hoán vị, nên số cách chọn các β là $4 \cdot 3! = 24$ cách chọn. + Với mỗi β, số các hoán vị đồng $(\alpha, a_4, a_5, a_6, a_7)$ là 5! hoán vị. Suy ra có $24 \cdot 5! = 2880$ số, trong đó 3 số đồng nhau, nhưng các số mà 4 số đồng nhau đã kể hai lần.	1,0
	Tính D: + Gọi $\beta = (a_1, a_2, a_3, a_4)$ với $a_1, a_2, a_3, a_4 \in \{1, 3, 5, 7\}$, có $4! = 24$ hoán vị của β. + Với mỗi β, số các hoán vị gồm 7 chữ số đồng (β, a_5, a_6, a_7) là $4! = 24$ hoán vị. Suy ra $D = 24 \cdot 24 = 576$. Vậy $C = 2880 - 576 = 2304$. Do đó số các hoán vị theo yêu cầu là $B = 7! - 2304 = 2736$.	1,0
	Do đó số các hoán vị theo yêu cầu là $B = 7! - 2304 = 2736$.	0,25

----- Hết -----