

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

TỈNH ĐẮK LẮK

KỶ THI CHỌN ĐỘI TUYỂN HỌC SINH GIỎI DỰ THI QUỐC GIA
NĂM HỌC 2010 - 2011

MÔN: TOÁN 12 – THPT

Thời gian làm bài: 180 phút (không kể thời gian giao đề)

Ngày thi: 30/11/2010

Bài 1(2,0 điểm).

Cho tam giác ABC có ba góc A, B, C đều là góc nhọn. Chứng minh rằng:

$$2 < \sin A + \sin B + \sin C \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

Bài 2(3,0 điểm).

Trên các cạnh của một tam giác ABC, dựng về phía ngoài tam giác ABC các tam giác đều A'BC, B'CA, C'AB. Gọi A₀, A₁, B₀, B₁, C₀, C₁ lần lượt là trung điểm các cạnh BC, B'C', CA, C'A', AB, A'B' của hai tam giác ABC và A'B'C'. Chứng minh rằng các đoạn thẳng A₀A₁, B₀B₁, C₀C₁ đồng quy và bằng nhau.

Bài 3(3,0 điểm).

Cho n là số tự nhiên lớn hơn 1. Tìm ước chung lớn nhất của các số:

$$C_{2n}^1; C_{2n}^3; \dots; C_{2n}^{2n-1}$$

Bài 4(3,0 điểm).

Cho hai số thực dương a, b và a > b. Hai dãy số (u_n) và (v_n) được thành lập như sau:

u₁ = a; v₁ = b; u_{n+1} = $\frac{u_n + v_n}{2}$; v_{n+1} = $\sqrt{u_n \cdot v_n}$; với n là số tự nhiên lớn hơn 1. Chứng minh rằng:

1) Hai dãy số trên bị chặn.

2) $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$

Bài 5(3,0 điểm).

Cho hàm số $f(x) = \frac{a^{2x+2010}}{a^{2x} + a}$, với a là một số thực dương.

Tính tổng:

$$S = f(0) + f\left(\frac{1}{n}\right) + f\left(\frac{2}{n}\right) + \dots + f(1)$$

Bài 6(3,0 điểm).

Chứng minh bất đẳng thức: $\sqrt{3} - 1 \leq |1 + 2\sin x| + |1 + 2\cos x| \leq 2(\sqrt{2} + 1)$

Bài 7(3,0 điểm).

Cho đường tròn (O;R) và điểm A cố định trên đường tròn đó. Một điểm M di chuyển trên đường tròn (O;R), hai tiếp tuyến của đường tròn (O;R) tại điểm M và tại điểm A cắt nhau ở điểm P. Một đường tròn (O₁; R₁) đi qua điểm M và tiếp xúc với AP tại điểm P. Chứng minh rằng khi M di chuyển trên đường tròn (O;R), đường tròn (O₁;R₁) luôn luôn tiếp xúc với một đường tròn cố định.

----- Hết -----

Họ và tên thí sinh _____ Số báo danh _____

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO TỈNH ĐẮK LẮK **ĐÁP ÁN, BIỂU ĐIỂM VÀ HƯỚNG DẪN CHẤM**
MÔN: TOÁN 12 – THPT

A. ĐÁP ÁN – BIỂU ĐIỂM

Bài 1(2,0 điểm).

Chứng minh:

$$2 < \sin A + \sin B + \sin C \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

+/- Vì A, B, C là ba góc của một tam giác nên sin của các góc đó dương, vậy:

$$\sin A + \sin B + \sin C > \sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C. \quad (0.5 \text{ điểm})$$

Mặt khác:

$$\begin{aligned} \sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C &= \frac{1 - \cos 2A}{2} + \frac{1 - \cos 2B}{2} + 1 - \cos^2 C = 2 - \frac{1}{2}(\cos 2A + \cos 2B) - \cos^2 C \\ &= 2 - \cos(A+B)\cos(A-B) - \cos^2 C = 2 + \cos C \cos(A-B) - \cos^2 C = \\ &= 2 + \cos C(\cos(A-B) - \cos C) = 2 + \cos C(\cos(A-B) + \cos(A+B)) = \\ &= 2 + 2\cos A \cos B \cos C > 2. \end{aligned} \quad (0.5 \text{ điểm})$$

(Vì các góc A, B, C nhọn nên $\cos A, \cos B, \cos C$ dương), do đó: $\sin A + \sin B + \sin C > 2$

$$\begin{aligned} +/ \text{ Ta có: } (\sin A + \sin B) + (\sin C + \sin \frac{\pi}{3}) &= 2\sin \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2} + 2\sin \frac{C+\frac{\pi}{3}}{2} \cos \frac{C-\frac{\pi}{3}}{2} \\ &\leq 2(\sin \frac{A+B}{2} + \sin \frac{C+\frac{\pi}{3}}{2}) = 4\sin \frac{A+B+C+\frac{\pi}{3}}{4} \cdot \cos \frac{A+B-C-\frac{\pi}{3}}{4} \leq 4\sin \frac{A+B+C+\frac{\pi}{3}}{4} \\ &= 4\sin \frac{\pi}{3}, \text{ suy ra: } \sin A + \sin B + \sin C \leq 3\sin \frac{\pi}{3} = \frac{3\sqrt{3}}{2} \end{aligned} \quad (1.0 \text{ điểm})$$

(Nếu thí sinh áp dụng bất đẳng thức Jensen nhưng có dùng đạo hàm để chứng minh là hàm lồi thì vẫn cho điểm tối đa, nếu không chứng minh hàm lồi thì cho nửa số điểm).

Bài 2(3,0 điểm).

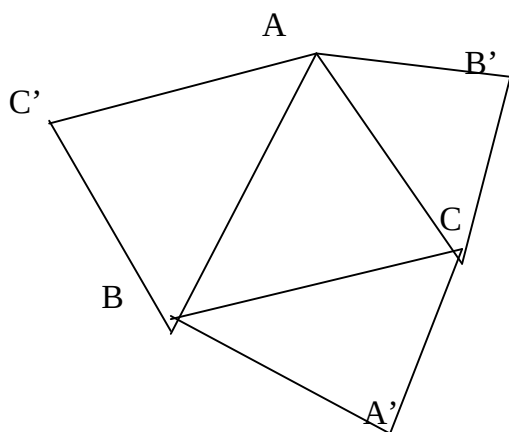
+/- Ta chứng minh AA', BB', CC' đồng qui và bằng nhau:

Gọi I là giao điểm của AA' và BB', sử dụng phép quay tâm C góc quay $+60^\circ$ ta có B' biến thành A và B biến thành A', nên B'B biến thành AA' suy ra: B'B=AA' và góc(B'B, AA') = 60° , vậy góc $\widehat{BIA'} = 60^\circ$. Trên tia IA' lấy I_1 sao cho $II_1 = IB$, nên tam giác IBI_1 đều. Sử dụng phép quay tâm B, góc quay 60° , thì A' biến thành C, A biến thành C' và I_1 biến thành I, do đó A'A = CC', vì A, I_1 , A' thẳng hàng, nên C, I, C' thẳng hàng hay A'A cắt CC' tại I, từ đó AA', BB', CC' đồng qui và bằng nhau.

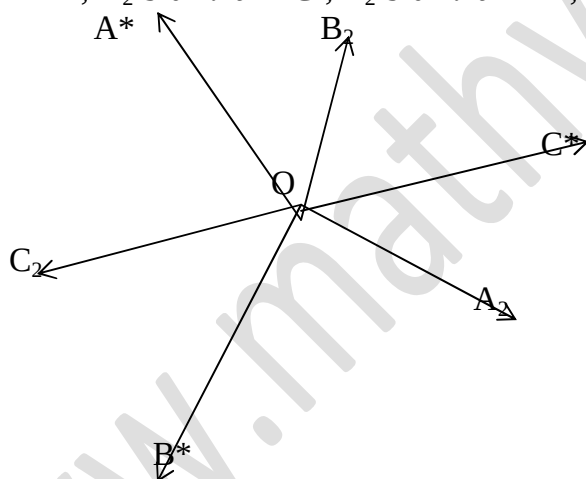
(1.0 điểm)

+/- Ta chứng minh các tam giác ABC, $A_0B_0C_0$, A'B'C' và $A_1B_1C_1$ có cùng trọng tâm G

- Xét hai tam giác ABC và C'B'A', ta đi chứng minh $\overrightarrow{AC'} + \overrightarrow{BA'} + \overrightarrow{CB'} = \vec{0}$ (hình 1)



Lấy điểm O, và gọi các điểm B*, C*, A* sao cho $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB^*}$; $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OC^*}$; $\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{OA^*}$
 Và $\overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{OC_2}$; $\overrightarrow{BA'} = \overrightarrow{OA_2}$; $\overrightarrow{CB'} = \overrightarrow{OB_2}$ (hình 2). Sử dụng phép quay tâm O, góc quay $+60^\circ$, ta có C₂ biến thành B*, A₂ biến thành C*, B₂ biến thành A*, nghĩa là:



(hình 2)

$\overrightarrow{OC_2} \rightarrow \overrightarrow{OB^*}$; $\overrightarrow{OA_2} \rightarrow \overrightarrow{OC^*}$; $\overrightarrow{OB_2} \rightarrow \overrightarrow{OA^*}$; vậy: $\overrightarrow{AC'} \rightarrow \overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{BA'} \rightarrow \overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{CB'} \rightarrow \overrightarrow{CA}$, do đó:
 $\overrightarrow{AC'} + \overrightarrow{BA'} + \overrightarrow{CB'} \rightarrow \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = \vec{0}$, vì phép quay là tương ứng 1-1, nên
 $\overrightarrow{AC'} + \overrightarrow{BA'} + \overrightarrow{CB'} = \vec{0}$, suy ra trọng tâm hai tam giác ABC, A'B'C' trùng nhau:

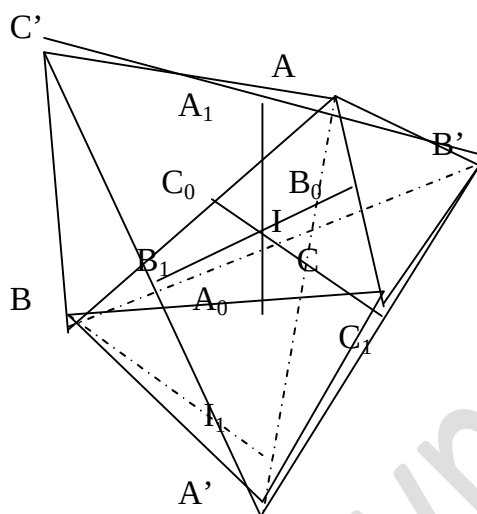
(1.0 điểm)

Hai tam giác còn lại là hai bài toán cơ bản, mỗi trường hợp **(0,25 điểm)**

- Sử dụng phép vị tự tâm G, hệ số $k = -\frac{1}{2}$, biến các đoạn thẳng AA', BB' và CC' lần lượt thành các đoạn thẳng A₀A₁, B₀B₁, C₀C₁ suy ra điều phải chứng minh.

(0,50 điểm)

Hình toàn bài



Bài 3(3,0 điểm).

Ta có: $(1+x)^n = C_{2n}^0 + C_{2n}^1 x + C_{2n}^2 x^2 + C_{2n}^3 x^3 + \dots + C_{2n}^{2n-1} x^{2n-1} + C_{2n}^{2n} x^{2n}$ (1)

Thay $x = -1$ vào (1) ta có: $C_{2n}^0 + C_{2n}^2 + \dots + C_{2n}^{2n} = C_{2n}^1 + C_{2n}^3 + \dots + C_{2n}^{2n-1}$

Thay $x = 1$ vào (1) ta có: $2^n = C_{2n}^0 + C_{2n}^1 + C_{2n}^2 + C_{2n}^3 + \dots + C_{2n}^{2n-1} + C_{2n}^{2n}$

Vậy: $C_{2n}^1 + C_{2n}^3 + \dots + C_{2n}^{2n-1} = 2^{n-1}$ (0,5 điểm)

Như vậy mọi ước chung của các số $C_{2n}^1; C_{2n}^3; \dots; C_{2n}^{2n-1}$ có dạng 2^p , ta cần tìm số tự nhiên p lớn nhất có thể. (0,5 điểm)

Giả sử $n = 2^k \cdot q$, trong đó q là số lẻ, khi đó $C_{2n}^1 = 2n = 2^{k+1} \cdot q$, nên ước chung của các số đang xét $\leq 2^{k+1}$, ta có: (0,5 điểm)

$C_{2^{k+1}q}^p = \frac{2^{k+1} \cdot q}{p} C_{2^{k+1}q-1}^{p-1}$, vì số các tổ hợp là nguyên, p là số lẻ, nên $C_{2^{k+1}q}^p$ chia hết cho 2^{k+1} , tức là $C_{2^{k+1}q}^p = 2^{k+1} \cdot M_p$, trong đó M_p nguyên, $p = 1, 3, \dots, 2n-1$. Vậy 2^{k+1} là ước chung của các số đang xét và là ước chung lớn nhất. (1,5 điểm)

Bài 4(3,0 điểm).

1) Ta có: $u_1 > v_1$ và theo bất đẳng thức Cauchy ta có $u_2 > v_2$, suy ra $u_2 = \frac{u_1 + v_1}{2} < u_1; v_2 = \sqrt{u_1 v_1} > v_1$. Do đó $b = v_1 < v_2 < u_2 < u_1 = a$.

Giả sử $n = k \geq 2$ các bất đẳng thức sau đều đúng: $b \leq v_k < v_{k+1} < u_{k+1} < u_k \leq a$.

Với $n = k+1$ thì theo Cauchy: $u_{k+2} > v_{k+2}$

$$\Rightarrow u_{k+2} = \frac{u_{k+1} + v_{k+1}}{2} < u_{k+1}; v_{k+2} = \sqrt{u_{k+1}v_{k+1}} > v_{k+1}.$$

Từ đó suy ra: $b \leq v_n < v_{n+1} < u_{n+1} < u_n \leq a$. Tức là dãy số (u_n) giảm và bị chặn dưới, nên bị chặn, dãy (v_n) tăng bị chặn trên nên bị chặn. **(2,0 điểm)**

2) Đặt $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = x$; $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = y$, ta có:

$$x = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} = \frac{1}{2} \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n + \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n \right) = \frac{1}{2}(x + y) \Leftrightarrow x = y. \quad (1,0 \text{ điểm})$$

Bài 5(3,0 điểm).

Ta có: $f(1-x) = \frac{a^{2(1-x)+2010}}{a^{2(1-x)} + a} = \frac{a^{2011}}{a^{2x} + a}$, suy ra $f(x) + f(1-x) = \frac{a^{2x+2010}}{a^{2x} + a} + \frac{a^{2011}}{a^{2x} + a} = a^{2010}$ **(1,0 điểm)**

$$\text{Vì: } S = f(0) + f\left(\frac{1}{n}\right) + f\left(\frac{2}{n}\right) + \dots + f(1)$$

$$S = f(1) + f\left(\frac{n-1}{n}\right) + f\left(\frac{n-2}{n}\right) + \dots + f(0)$$

$$\text{Do đó: } 2S = [f(0) + f(1)] + \left[f\left(\frac{1}{n}\right) + f\left(\frac{n-1}{n}\right) \right] + \left[f\left(\frac{2}{n}\right) + f\left(\frac{n-2}{n}\right) \right] + \dots + [f(1) + f(0)]$$
 (1,0 điểm)

$$\text{Mà } [f(0) + f(1)] = \left[f\left(\frac{1}{n}\right) + f\left(\frac{n-1}{n}\right) \right] = \left[f\left(\frac{2}{n}\right) + f\left(\frac{n-2}{n}\right) \right] = \dots = [f(1) + f(0)] = a^{2010}$$
 (0,5 điểm)

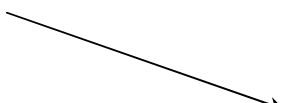
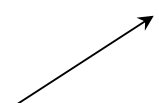
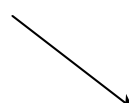
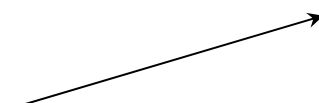
$$\text{Suy ra: } 2S = (n+1) a^{2010} \text{ hay } S = \frac{1}{2}(n+1)a^{2010}. \quad (0,5 \text{ điểm})$$

Bài 6(3,0 điểm).

Đặt $f(x) = |1 + 2\sin x| + |1 + 2\cos x| \geq 0$ nên

$f^2(x) = 6 + 4(\sin x + \cos x) + 2|1 + 2(\sin x + \cos x) + 4\sin x \cos x|$, đặt $t = \sin x + \cos x$, với điều kiện $|t| \leq \sqrt{2}$ ta có hàm số $g(t) = 6 + 4t + 2|2t^2 + 2t - 1|$ trên miền $|t| \leq \sqrt{2}$, ta có bảng biến thiên

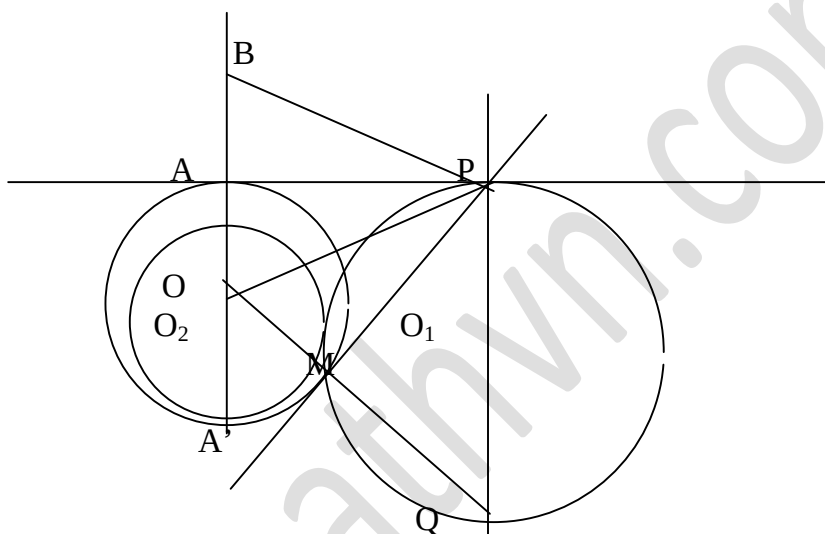
(2,0 điểm)

t	$-\sqrt{2}$	$-\frac{\sqrt{3}+1}{2}$	0	$\frac{\sqrt{3}-1}{2}$	$\sqrt{2}$
g(t)	$4t^2 + 8t + 4$	$-4t^2 + 8$		$4t^2 + 8t + 4$	
g'(t)	$8t+8$	$-8t$		$8t+8$	
Dấu g'(t)	-	+ 0 -		+	
g(t)					

Vậy $\min_{-\sqrt{2} \leq t \leq \sqrt{2}} g(t) = \min(g(-\frac{\sqrt{3}+1}{2}); g(\frac{\sqrt{3}-1}{2})) = (\sqrt{3}-1)^2$; (1,0 điểm)

$\max_{-\sqrt{2} \leq t \leq \sqrt{2}} g(t) = \max(g(-\sqrt{2}); g(0); g(\sqrt{2})) = 4(\sqrt{2}+1)^2$, từ đó suy ra đpcm

Bài 7(3,0 điểm).



+/- Kẻ đường kính AA' của (O;R), lấy trên AA' một điểm O₂ sao cho O₂A' = $\frac{3}{4}R$. Ta đi

chứng minh đường tròn (O₂, $\frac{3}{4}R$) chính là đường tròn cần tìm. (1,0 điểm).

+/- Kẻ đường kính PQ của (O₁;R₁), thì O, M, Q thẳng hàng, dễ thấy tam giác OQP cân tại Q, gọi B là điểm đối xứng của O qua A ta có hai tam giác QPO, POB đồng dạng với nhau suy ra $\frac{QP}{PO} = \frac{PO}{OB}$, hay $OP^2 = 4RR_1$ (1) (0,5 điểm).

+/- Do tam giác OAP vuông tại A nên $OA^2 + AP^2 = OP^2$, kết hợp (1) ta có:

$$OA^2 + AP^2 = 4RR_1 \Leftrightarrow R^2 + AP^2 = 4RR_1 \Leftrightarrow R_1^2 - \frac{5}{2}RR_1 + \frac{25}{16}R^2 + AP^2 = R_1^2 + \frac{3}{2}RR_1 + \frac{9}{16}R^2$$

$$\Leftrightarrow \left(R_1 - \frac{5}{4}R\right)^2 + AP^2 = \left(R_1 + \frac{3}{4}R\right)^2 \Leftrightarrow (O_1P - O_2A)^2 + AP^2 = \left(R_1 + \frac{3}{4}R\right)^2$$

$$\Leftrightarrow O_1O_2^2 = \left(R_1 + \frac{3}{4}R\right)^2 \Leftrightarrow O_1O_2 = R_1 + \frac{3}{4}R \text{ (đpcm)} \quad (1,5 \text{ điểm}).$$

B. HƯỚNG DẪN CHẤM

1/ Điểm của bài làm theo thang điểm 20, là tổng điểm của thành phần và không làm tròn số.

2/ Nếu thí sinh làm cách khác đúng vẫn cho điểm tối đa phần đó.

----- **HẾT** -----