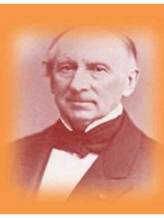
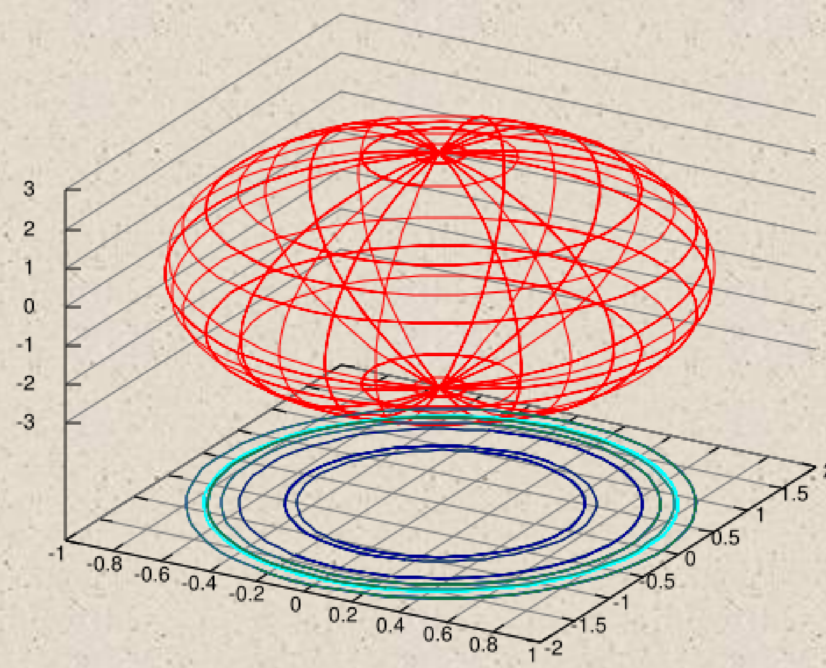


LƯỢNG GIÁC

MỘT SỐ CHUYÊN ĐỀ VÀ ỨNG DỤNG

TẬP 3 : TÌM GIÁ TRỊ LỚN NHẤT, GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT
MỘT SỐ PHƯƠNG PHÁP LƯỢNG GIÁC HÓA



VÕ ANH KHOA – HOÀNG BÁ MINH

VÕ ANH KHOA – HOÀNG BÁ MINH

LƯỢNG GIÁC

MỘT SỐ CHUYÊN ĐỀ VÀ ỨNG DỤNG

TẬP 3 : TÌM GIÁ TRỊ LỚN NHẤT, GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT

MỘT SỐ PHƯƠNG PHÁP LƯỢNG GIÁC HÓA

TP. HỒ CHÍ MINH, THÁNG 8 – 2011

LỜI NÓI ĐẦU

Cuốn sách "LƯỢNG GIÁC – MỘT SỐ CHUYÊN ĐỀ VÀ ỨNG DỤNG" này được biên soạn với mục đích cung cấp, bổ sung kiến thức cho học sinh THPT và một số bạn đọc quan tâm đến mảng kiến thức này trong quá trình học tập và làm việc. Trong tập 3 "TÌM GIÁ TRỊ LỚN NHẤT, GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT; MỘT SỐ PHƯƠNG PHÁP LƯỢNG GIÁC HÓA" này, chúng tôi sẽ trình bày các kỹ thuật đại số, giải tích về hai vấn đề trên. Tuy nhiên, chúng tôi sẽ xoáy vào trọng tâm là "PHƯƠNG PHÁP LƯỢNG GIÁC HÓA", một dạng ứng dụng kỹ thuật khá hay trong một số bài toán.

Ở các chương chính, chúng tôi chia làm 3 phần :

- **Phần I :** Nêu lý thuyết cùng ví dụ minh họa ngay sau đó, giúp bạn đọc hiểu và biết cách trình bày bài. Đồng thời đưa ra các dạng toán cơ bản, thường gặp trong quá trình làm bài trên lớp của học sinh THPT. Ở phần này, chúng tôi sẽ trình bày một số bài để bạn đọc có thể nắm vững hơn, tránh sai sót.
- **Phần II :** Trong quá trình tham khảo và tổng hợp tài liệu, chúng tôi sẽ đưa vào phần này các dạng toán khó nhằm giúp cho các học sinh bồi dưỡng, rèn luyện kĩ năng giải LƯỢNG GIÁC thành thạo hơn khi gặp phải những dạng toán này.
- **Phần III :** Chúng tôi sẽ đưa ra lời giải gợi ý cho một số bài, qua đó bạn đọc kiểm tra lại đáp số, lời giải hoặc cũng có thể tham khảo thêm.

Trong quá trình biên soạn, mặc dù chúng tôi đã cố gắng bằng việc tham khảo một lượng rất lớn các tài liệu có sẵn và tiếp thu có chọn lọc ý kiến từ các bạn đồng nghiệp để dần hoàn thiện cuốn sách này, nhưng khó tránh khỏi những thiếu sót bởi tầm hiểu biết và kinh nghiệm còn hạn chế, chúng tôi rất mong nhận được ý kiến đóng góp quý báu của bạn đọc gần xa.

Chi tiết liên hệ tại : anhkhoavo1210@gmail.com
minh.9a1.dt@gmail.com

CÁC TÁC GIẢ
VÕ ANH KHOA – HOÀNG BÁ MINH.

LỜI CẢM ƠN

Trong quá trình biên soạn, chúng tôi xin cám ơn đến những bạn đã cung cấp tài liệu tham khảo và vui lòng nhận kiểm tra lại từng phần của bản thảo hoặc bản đánh máy, tạo điều kiện hoàn thành cuốn sách này :

- Trần Phong (ĐH Sư Phạm Tp.HCM)
- Ngô Minh Nhựt (ĐH Kinh Tế Tp.HCM)
- Mai Ngọc Thắng (ĐH Kinh Tế Tp.HCM)
- Trương Tấn Sang (Westminster High School California)
- Nguyễn Thị Thanh Huyền (THPT Chuyên Lương Thế Vinh Đồng Nai)
- Nguyễn Hoài Anh (THPT Chuyên Phan Bội Châu Tp.Vinh)
- Nguyễn Đình Thi (ĐH Khoa Học Tự Nhiên Tp.HCM)

và một số thành viên diễn đàn MathScope.

MỤC LỤC

CHƯƠNG 9 : PHƯƠNG PHÁP LƯỢNG GIÁC HÓA

ĐỂ GIẢI MỘT SỐ BÀI TOÁN ĐẠI SỐ

CHƯƠNG 8

TÌM GIÁ TRỊ LỚN NHẤT, GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT

I. TÌM GIÁ TRỊ LỚN NHẤT, GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT HÀM LƯỢNG GIÁC

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên miền $D \subset \mathbb{R}$.

1. Một số thực M được gọi là giá trị lớn nhất của hàm số nếu :

$$\begin{cases} f(x) \leq \mathrm{M}, \forall x \in D \\ \exists x_0 \in D \text{ sao cho } f(x_0) = \mathrm{M} \end{cases}$$

   Kí hiệu : $\mathrm{M} = \max y$

2. Một số thực N được gọi là giá trị nhỏ nhất của hàm số nếu :

$$\begin{cases} f(x) \geq \mathrm{N}, \forall x \in D \\ \exists x_0 \in D \text{ sao cho } f(x_0) = \mathrm{N} \end{cases}$$

   Kí hiệu : $\mathrm{N} = \min y$

- *Chú ý rằng* : Nếu hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $[a; b]$ thì hàm số đó đạt giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất trên $[a; b]$

Như vậy, để tìm giá trị lớn nhất (GTLN) và giá trị nhỏ nhất (GTNN) của một hàm số hay một biểu thức lượng giác, tùy theo từng loại toán ta có thể dùng một trong các phương pháp sau. Ở đây, chúng ta chỉ đề cập đến các phương pháp đại số, giải tích.

1. PHƯƠNG PHÁP BIẾN ĐỔI LƯỢNG GIÁC

- Dựa vào tính bị chặn của hàm số sin, hàm số cos

$$\begin{cases} |\sin x| \leq 1 \\ |\cos x| \leq 1 \end{cases}$$

- Dùng điều kiện có nghiệm của các phương trình cơ bản
  i. Phương trình bậc hai : $ax^2 + bx + c = 0$ có nghiệm $x \in \mathbb{R}$ khi và chỉ khi

$$\begin{cases} \Delta \geq 0 \\ a \neq 0 \end{cases}$$

  ii. Phương trình $a \sin x + b \cos x = c$ có nghiệm $x \in \mathbb{R}$ khi và chỉ khi

$$a^2 + b^2 \geq c^2$$

iii. Nếu hàm số có dạng

$$y = \frac{a_1 \sin x + b_1 \cos x + c_1}{a_2 \sin x + b_2 \cos x + c_2}$$

Ta tìm miền xác định của hàm số rồi quy đồng mẫu số, đưa về phương trình cổ điển $a \sin x + b \cos x = c$.

Nếu hàm số chưa đưa về dạng trên thì ta biến đổi để đưa về dạng trên (nếu được).

Bài 1: Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số

a. $y = 3\sin^2 x + 4\sin x \cos x - 5\cos^2 x + 2$

b. $y = \dfrac{16}{3}(\sin^3 x \cos 3x + \cos^3 x \sin 3x) + 3\cos 4x$

c. $y = \dfrac{2\cos^2 x - 2\sin 2x + 1}{1 + \sin^2 x}$

Giải:

a. Ta có :

$$y = 3.\frac{1 - \cos 2x}{2} + 2\sin 2x - \frac{5}{2}(1 + \cos 2x) + 2 = 2\sin 2x - 4\cos 2x + 1$$

Hay

$$2\sin 2x - 4\cos 2x = y - 1$$

Phương trình này có nghiệm khi và chỉ khi

$$2^2 + 4^2 \geq (y-1)^2$$
$$\Leftrightarrow -2\sqrt{5} + 1 \leq y \leq 2\sqrt{5} + 1$$

Do đó,

$$\max y = 2\sqrt{5} + 1 \Leftrightarrow x = \arctan\left(2 + \sqrt{5}\right) + k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$$
$$\min y = -2\sqrt{5} + 1 \Leftrightarrow x = \arctan\left(2 - \sqrt{5}\right) + k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$$

b. Ta đã chứng minh được

$$\sin^3 x \cos 3x + \cos^3 x \sin 3x = \frac{3}{4}\sin 4x$$

Do đó,

$$y = 4\sin 4x + 3\cos 4x$$

Phương trình này có nghiệm khi và chỉ khi

$$y^2 \leq 4^2 + 3^2 \Leftrightarrow -5 \leq y \leq 5$$

Vậy

$$\max y = 5 \Leftrightarrow x = \frac{\arctan\frac{1}{2} + k\pi}{2}\ (k \in \mathbb{Z})$$

$$\min y = -5 \Leftrightarrow x = \frac{-\arctan\frac{1}{2} + k\pi}{2}\ (k \in \mathbb{Z})$$

c. $D = \mathbb{R}$

Ta có :

$$y = \frac{1 + \cos 2x - 2\sin 2x + 1}{1 + \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)} = \frac{2\cos 2x - 4\sin 2x + 4}{3 - \cos 2x}$$

$$\Leftrightarrow y(3 - \cos 2x) = 2\cos 2x - 4\sin 2x + 4$$

$$\Leftrightarrow (2 + y)\cos 2x - 4\sin 2x = 3y - 4$$

Phương trình này có nghiệm khi và chỉ khi

$$(2 + y)^2 + 16 \geq (3y - 4)^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{7 - \sqrt{57}}{4} \leq y \leq \frac{7 + \sqrt{57}}{4}$$

Do đó

$$\max y = \frac{7 + \sqrt{57}}{4} \Leftrightarrow x = \arctan\frac{5 - \sqrt{57}}{8} + k\pi\ (k \in \mathbb{Z})$$

$$\min y = \frac{7 - \sqrt{57}}{4} \Leftrightarrow x = \arctan\frac{5 + \sqrt{57}}{8} + l\pi\ (l \in \mathbb{Z})$$

Chú ý: Tương tự câu a, ta đưa về bài toán dạng tổng quát

Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số

$$y = a\cos^2 x + b\sin x\cos x + c\sin^2 x + d$$

Bài 2: Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số

a. $y = \left|\sqrt{3}\sin 2x - 2\cos^2 x + 3\right|$

b. $y = \sin x\,(1 - 2\cos 2x)$

c. $y = \sqrt[4]{\sin x} - \sqrt{\cos x}$

d. $y = \sqrt{1 + 2\sin x} + \sqrt{1 + 2\cos x}$

Giải:

a. Ta có :

$$y = \left|\sqrt{3}\sin 2x - \cos 2x + 2\right| = \left|2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x - \frac{1}{2}\cos 2x\right) + 2\right| = 2\left|\sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) + 1\right|$$

Vì $\begin{cases} \sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) + 1 \geq 0 \\ \sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) \leq 1 \end{cases} \Rightarrow 0 \leq y \leq 4$

Vậy

$$\max y = 4 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} + k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$$

$$\min y = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{6} + l\pi \ (l \in \mathbb{Z})$$

b. Ta có :

$$y = \sin x - 2\sin x\cos 2x = \sin x - \sin 3x + \sin x = 2\sin x - \sin 3x$$

Ta xét :

$$|y| = |2\sin x - \sin 3x| \leq 2|\sin x| + |\sin 3x| \leq 3$$

$$\Leftrightarrow -3 \leq y \leq 3$$

Do đó,

$$\max y = 3 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \ (k \in \mathbb{Z})$$

$$\min y = -3 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} + l2\pi \ (l \in \mathbb{Z})$$

c. Hàm số xác định khi và chỉ khi

$$\begin{cases} \sin x \geq 0 \\ \cos x \geq 0 \end{cases}$$

Ta có :

$$y = \sqrt[4]{\sin x} - \sqrt{\cos x} \leq \sqrt[4]{\sin x} \leq 1$$

Vậy

$$\max y = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = 1 \\ \cos x = 0 \end{cases} \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} \ (\text{thỏa điều kiện xác định})$$

Hơn nữa,

$$y = \sqrt[4]{\sin x} - \sqrt{\cos x} \geq -\sqrt{\cos x} \geq -1$$

Vậy

$$\min y = -1 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = 0 \\ \cos x = 1 \end{cases} \Rightarrow x = 0 \ (\text{thỏa điều kiện xác định})$$

d. Điều kiện:

$$\begin{cases}1+2\sin x \geq 0\\ 1+2\cos x \geq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\sin x \geq -\dfrac{1}{2}\\ \cos x \geq -\dfrac{1}{2}\end{cases} \Leftrightarrow -\frac{\pi}{6}+k2\pi \leq x \leq \frac{2\pi}{3}+k2\pi$$

Vì chu kỳ của $\sin x$ và $\cos x$ là 2π nên ta cần xét trên $[-\pi;\pi]$. Do đó

$$-\frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{2\pi}{3}$$

Ta có :

$$y^2 = 2+2(\sin x+\cos x)+2\sqrt{(1+2\sin x)(1+2\cos x)}$$
$$= 2+2\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+2\sqrt{1+2\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+2\sin 2x}$$

Hơn nữa,

$$-\frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{2\pi}{3}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases}\dfrac{\pi}{12} \leq x+\dfrac{\pi}{4} \leq \dfrac{11\pi}{12}\\ -\dfrac{\pi}{3} \leq 2x \leq \dfrac{4\pi}{3}\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases}\sqrt{3}-1 \leq 2\sqrt{2}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right) \leq 2\sqrt{2}\\ -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \leq \sin 2x \leq 1\end{cases}$$

Suy ra

$$y^2 \leq 2+2\sqrt{2}+2\sqrt{3+2\sqrt{2}} = 2+2\sqrt{2}+2\sqrt{\left(\sqrt{2}+1\right)^2} = 4+4\sqrt{2}$$

Do vậy,

$$\max y = 2\sqrt{\sqrt{2}+1} \Leftrightarrow \begin{cases}\sin 2x = 1\\ \sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)\end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4}$$

Tương tự, ta được

$$y^2 \geq \sqrt{3}+1$$

Do đó,

$$\min y = \sqrt{\sqrt{3}+1} \Leftrightarrow \begin{cases}\sin 2x = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}\\ \sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\end{cases} \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{6}$$

Bài 3: Tìm giá trị lớn nhất của hàm số

a. $y = \sin^9 x + \cos^{12} x$

b. $y = \sin^{2001} x + \cos^{2002} x$

c. $y = \cos 6x - \cos 2x + 4(-3\sin x + 4\sin^3 x + 2006)$

d. $y = 4\sin^2 x + \sin^2 3x - 4\sin x \sin^2 3x + 3$

Giải:

a. Ta có :

$$\begin{cases} |\sin x| \le 1 \Rightarrow \sin^7 x \le 1 \Rightarrow \sin^9 x \le \sin^2 x \\ |\cos x| \le 1 \Rightarrow \cos^{10} x \le 1 \Rightarrow \cos^{12} x \le \cos^2 x \end{cases}$$
$$\Rightarrow y \le \sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

Do đó,

$$\max y = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin^9 x = \sin^2 x \\ \cos^{12} x = \cos^2 x \end{cases} \Rightarrow x = 0$$

b. Ta có :

$$\begin{cases} \sin x \le 1 \Rightarrow \sin^3 x \le \sin^2 x \Rightarrow \sin^5 x \le \sin^4 x \le \sin^2 x \Rightarrow \ \dots \ \Rightarrow \sin^{2001} x \le \sin^2 x \\ \cos x \le 1 \Rightarrow \cos^4 x \le \cos^2 x \Rightarrow \ \dots \ \Rightarrow \cos^{2002} x \le \cos^2 x \end{cases}$$
$$\Rightarrow y \le \sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

Do đó,

$$\max y = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin^3 x = \sin^2 x \\ \cos^4 x = \cos^2 x \end{cases} \Rightarrow x = 0$$

c. Ta có :

$$\begin{aligned} y &= 1 - 2\sin^2 3x - \cos 2x + 3(-\sin 3x + 2006) \\ &= -2(\sin^2 3x + 2\sin 3x + 1) - \cos 2x + 1 + 8026 \\ &= \underbrace{-2(\sin 3x + 1)^2}_{\le 0} + \underbrace{2\sin^2 x}_{\le 2} + 8026 \le 8028 \end{aligned}$$

Do đó,

$$\max y = 8028 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin 3x = -1 \\ \sin^2 x = 1 \end{cases} \Rightarrow x = \frac{\pi}{2}$$

d. Ta có :

$$\begin{aligned} y &= (2\sin x - \sin^2 3x)^2 + \sin^2 3x - \sin^4 3x + 3 \\ &= (2\sin x - \sin^2 3x)^2 + \sin^2 3x\,(1 - \sin^2 3x) + 3 \ge 3 \end{aligned}$$

Do đó,

$$\max y = 3 \Leftrightarrow \begin{cases} 2\sin x - \sin^2 3x = 0 \\ \sin^2 3x\,(1 - \sin^2 3x) = 0 \end{cases} \Rightarrow x = 0$$

Bài 4: Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số

a. $y = 4\sin^2 2x - \sin x\left(8\sqrt{3}\cos x + 1\right) - \cos^2 x + 6 + 2\cos 6x$

b. $y = 3\cos^2 x - 4\cos x - \sqrt{3}\sin x + \dfrac{19}{4}$

Giải:

a. Ta có :

$$y = 4\sin^2 2x - 4\sqrt{3}\sin 2x - \sin x - (1 - \sin^2 x) + 6 + 2(2\cos^2 3x - 1)$$
$$= \left(4\sin^2 2x - 4\sqrt{3}\sin 2x + 3\right) + \sin^2 x - \sin x + \frac{1}{4} + 4\cos^2 3x - \frac{1}{4}$$
$$= \left(2\sin 2x - \sqrt{3}\right)^2 + \left(\sin x - \frac{1}{2}\right)^2 + 4\cos^2 3x - \frac{1}{4} \geq -\frac{1}{4}$$

Do đó,

$$\min y = -\frac{1}{4} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin 2x = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin x = \dfrac{1}{2} \\ \cos 3x = 0 \end{cases} \Rightarrow x = \frac{\pi}{6}$$

b. Ta có :

$$y = 4\cos^2 x - 4\cos x + 1 - (1 - \sin^2 x) - \sqrt{3}\sin x + \frac{15}{4}$$
$$= (2\cos x - 1)^2 + \left(\sin x - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + 2 \geq 2$$

Do đó,

$$\min y = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = \dfrac{1}{2} \\ \sin x = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Rightarrow x = \frac{\pi}{3}$$

Bài 5: Với α là một góc cố định cho trước. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số :

$$y = \tan^2(x + \alpha) + \tan^2(x - \alpha)$$

Biết rằng hàm số thỏa các điều kiện xác định cho trước.

Giải: Ta có :

$$y = [\tan(x+\alpha) + \tan(x-\alpha)]^2 - 2\tan(x+\alpha)\tan(x-\alpha)$$
$$\geq -2\tan(x+\alpha)\tan(x-\alpha) = -2.\frac{\sin(x+\alpha)\sin(x-\alpha)}{\cos(x+\alpha)\cos(x-\alpha)}$$
$$= 2.\frac{\cos 2x - \cos 2\alpha}{\cos 2x + \cos 2\alpha}$$

Do đó, $\min y$ tồn tại khi và chỉ khi

$$\tan(x+\alpha) = -\tan(x-\alpha) = \tan(\alpha - x) \Leftrightarrow x = k\pi\ (k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow \cos 2x = 1$$

Khi đó,

$$y \geq 2.\frac{1-\cos 2\alpha}{1+\cos 2\alpha} = 2\tan^2\alpha$$

Vậy $\min y = 2\tan^2\alpha \Leftrightarrow x = k\pi\ (k \in \mathbb{Z})$

Bài 6: Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$\mathrm{P} = \cot^4 a + \cot^4 b + 2\tan^2 a\tan^2 b + 2$$

(ĐH Giao Thông Vận Tải 1999)

Giải: Điều kiện:

$$a, b \neq \frac{k\pi}{2}\ (k \in \mathbb{Z})$$

Ta có :

$$\mathrm{P} = (\cot^2 a - \cot^2 b)^2 + 2\cot^2 a\cot^2 b + 2\tan^2 a\tan^2 b + 2$$
$$= (\cot^2 a - \cot^2 b)^2 + 2(\cot a\cot b - \tan a\tan b)^2 + 4\cot a\cot b\tan a\tan b + 2$$
$$= (\cot^2 a - \cot^2 b)^2 + 2(\cot a\cot b - \tan a\tan b)^2 + 6 \geq 6$$

Do đó,

$$\min \mathrm{P} = 6 \Leftrightarrow \begin{cases} \cot^2 a = \cot^2 b \\ \cot a\cot b = \tan a\tan b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cot^2 a = 1 \\ \cot^2 b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow a = b = \frac{\pi}{4} + \frac{l\pi}{2}\ (l \in \mathbb{Z})$$

Bài 7: Cho $\sin x + \sin y + \sin z = 0$. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$\mathrm{T} = \sin^2 x + \sin^4 y + \sin^6 z$$

Giải: Ta có :

$$\begin{cases} \sin^2 x \geq 0 \\ \sin^4 y \geq 0 \\ \sin^6 z \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \mathrm{T} \geq 0$$

Do đó, $\min \mathrm{T} = 0$ khi và chỉ khi $\sin x = \sin y = \sin z = 0$. Ta chọn

$$x = y = z = 0$$

Hơn nữa, ta thấy luôn luôn tồn tại 2 số giả sử là $\sin x$, $\sin y$ cùng dấu và

$$\begin{cases}\sin^4 y \le \sin^2 y\\ \sin^6 z \le |\sin z|\end{cases}$$

$$\Longrightarrow \mathrm{T} \le (\sin x + \sin y)^2 - 2\sin x \sin y + |\sin z| \le \sin^2 z + |\sin z| \le 2|\sin z| \le 2$$

Do đó, $\max \mathrm{T} = 2$ khi và chỉ khi $\sin x \sin y = 0$ và $|\sin z| = 1$. Khi đó, ta chọn

$$\begin{cases} x = 0\\ y = \dfrac{\pi}{2}\\ z = -\dfrac{\pi}{2}\end{cases}$$

- **BÀI TẬP TỰ LUYỆN**

8.1.1. Tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của hàm số

a. $y = 3\sin x - 4\cos x + 2$

b. $y = 12\cos^2 x - 8\sin 2x + 9$

c. $y = \dfrac{\sin x + 2\cos x + 3}{2 + \cos x}$

d. $y = \dfrac{\cos x - \sin x + 1}{\sin x + 2\cos x - 4}$

e. $y = \dfrac{2\sin x\cos x + \cos 2x + 1}{2\cos^2 x + \sin 2x - 4}$

f. $y = 4\sin^2 x + \sqrt{2}\sin\left(2x + \dfrac{\pi}{4}\right)$

g. $y = \dfrac{\cos 3x + a\sin 3x + 1}{\cos 3x + 2}$, a là góc cố định cho trước

h. $y = \sin^6 x + \cos^6 x + a\sin x\cos x$

8.1.2. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số

$$y = \left(\sin^2 x + \frac{1}{\sin^2 x}\right)^2 + \left(\cos^2 x + \frac{1}{\cos^2 x}\right)^2$$

$$y_1 = \left(\sin^3 x + \frac{1}{\sin^3 x}\right)^2 + \left(\cos^3 x + \frac{1}{\cos^3 x}\right)^2$$

Biết rằng $x \in \left(0; \dfrac{\pi}{2}\right)$

8.1.3. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$\mathrm{A} = \sin x + \sin y + \cos(x + y)$$

$$\mathrm{B} = \cos x + \cos y - \cos(x + y)$$

- **GỢI Ý GIẢI BÀI TẬP TỰ LUYỆN**

8.1.1.

a. $$\begin{cases} \max y = 7 \Leftrightarrow x = 2\arctan 3 + 2k\pi\ (k \in \mathbb{Z}) \\ \min y = -3 \Leftrightarrow x = -2\arctan\dfrac{1}{3} + 2k\pi\ (k \in \mathbb{Z}) \end{cases}$$

b. $$\begin{cases} \max y = 25 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2\arctan\left(2-\sqrt{5}\right) + k2\pi \\ x = 2\arctan\left(2+\sqrt{5}\right) + k2\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z}) \\ \min y = 5 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2\arctan\dfrac{1-\sqrt{5}}{2} + k2\pi \\ x = 2\arctan\dfrac{\sqrt{5}-1}{2} + k2\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z}) \end{cases}$$

c. $$\begin{cases} \max y = 2 \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi\ (k \in \mathbb{Z}) \\ \min y = \dfrac{2}{3} \Leftrightarrow x = -2\arctan 3 + 2k\pi\ (k \in \mathbb{Z}) \end{cases}$$

d. $$\begin{cases} \max y = \dfrac{1}{11} \Leftrightarrow x = 2\arctan 2 + 2k\pi\ (k \in \mathbb{Z}) \\ \min y = -1 \Leftrightarrow x = 2k\pi\ (k \in \mathbb{Z}) \end{cases}$$

e. $$\begin{cases} \max y = \dfrac{-5+4\sqrt{2}}{7} \Leftrightarrow x = -\arctan\left(1+\sqrt{2}\right) + k\pi\ (k \in \mathbb{Z}) \\ \min y = \dfrac{-5-4\sqrt{2}}{7} \Leftrightarrow x = -\arctan\left(1-\sqrt{2}\right) + k\pi\ (k \in \mathbb{Z}) \end{cases}$$

f. $$\begin{cases} \max y = 2+\sqrt{2} \Leftrightarrow x = \arctan\left(1+\sqrt{2}\right) + k\pi\ (k \in \mathbb{Z}) \\ \min y = 2-\sqrt{2} \Leftrightarrow x = -\arctan\left(1-\sqrt{2}\right) + k\pi (k \in \mathbb{Z}) \end{cases}$$

g. $$\begin{cases} \max y = \dfrac{1+\sqrt{1+3a^2}}{3} \\ \min y = \dfrac{1-\sqrt{1+3a^2}}{3} \end{cases}$$

h. $$\left[\begin{array}{l} a \in [-3;3]\begin{cases} \max y = \dfrac{a^2}{12}+1 \\ \min y = \dfrac{1}{4}+\dfrac{a}{2};\, a \in [-3;0] \\ \min y = \dfrac{1}{4}-\dfrac{a}{2};\, a \in [0;3] \end{cases} \\ a \in (-\infty;-3)\begin{cases} \max y = \dfrac{1}{4}-\dfrac{a}{2} \\ \min y = \dfrac{1}{4}+\dfrac{a}{2} \end{cases} \\ a \in (3;\infty)\begin{cases} \max y = \dfrac{1}{4}-\dfrac{a}{2} \\ \min y = \dfrac{1}{4}+\dfrac{a}{2} \end{cases} \end{array}\right.$$

8.1.2. Ta biến đổi hàm số đã cho thành

$$y = \left(1-\frac{1}{2}\sin^2 2x\right)\left(1+\frac{16}{\sin^4 2x}\right)+4 \ge \frac{25}{2}$$
$$y_1 = \left(1-\frac{3}{4}\sin^2 2x\right)\left(1+\frac{64}{\sin^6 2x}\right)+4 \ge \frac{81}{4}$$

8.1.3. Ta biến đổi biểu thức đã cho thành

$$\mathrm{A} = 1+\frac{1}{2}\cos^2\frac{x-y}{2} \le \frac{3}{2}$$

Để ý rằng, nếu ta đặt

$$\begin{cases} u = x+\dfrac{\pi}{2} \\ v = y+\dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

Ta sẽ đưa biểu thức B về dạng biểu thức A.

2. PHƯƠNG PHÁP SỬ DỤNG BẤT ĐẲNG THỨC CƠ BẢN

- Ở phần này, ngoài việc sử dụng các phương pháp đã được đề cập ở chương 3, chúng ta cần phải xác định rõ điều kiện xác định của hàm số hay biểu thức trước khi sử dụng các bất đẳng thức cơ bản.
- Phương pháp này được coi là một phương pháp khó vì đòi hỏi tính sáng tạo và kỹ thuật cao trong việc sử dụng thành thạo bất đẳng thức và trong việc vừa tìm giá trị lớn nhất vừa tìm giá trị nhỏ nhất nên đa phần các bài toán ở dạng này chỉ yêu cầu tìm giá trị lớn nhất hoặc giá trị nhỏ nhất của hàm số hay biểu thức.

Bài 1: Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số

$$y_1 = \frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\cos x}$$

$$y_2 = \frac{1}{2 - \cos x} + \frac{1}{1 + \cos x}$$

$$y_3 = 2 + \tan^2 x + \cot^2 x + \frac{1}{\sin^4 x + \cos^4 x}$$

Biết rằng $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$

Giải:

Vì $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ nên $\begin{cases} \sin x > 0 \\ \cos x > 0 \end{cases}$

Theo bất đẳng thức Cauchy, ta có :

$$y_1 = \frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\cos x} \geq \frac{2}{\sqrt{\sin x \cos x}} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\sin 2x}} \geq 2\sqrt{2}$$

Do đó,

$$\min y_1 = 2\sqrt{2} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = \cos x \\ \sin 2x = 1 \end{cases} \Rightarrow x = \frac{\pi}{4}$$

Hơn nữa, theo bất đẳng thức Cauchy, ta có :

$$\begin{cases} y_2 = \dfrac{1}{2 - \cos x} + \dfrac{1}{1 + \cos x} \geq \dfrac{2}{\sqrt{(2 - \cos x)(1 + \cos x)}} \\ \sqrt{(2 - \cos x)(1 + \cos x)} \leq \dfrac{2 - \cos x + 1 + \cos x}{2} = \dfrac{3}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow y_2 \geq \frac{2}{\sqrt{(2 - \cos x)(1 + \cos x)}} \geq \frac{4}{3}$$

Do đó,

$$\min y_2 = \frac{4}{3} \Leftrightarrow \cos x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{3}$$

Ta biến đổi hàm số y_3 thành

$$\begin{aligned} y_3 &= \frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{\sin^2 x} + \frac{1}{\sin^4 x + \cos^4 x} = \frac{1}{\sin^2 x \cos^2 x} + \frac{1}{\sin^4 x + \cos^4 x} \\ &= \frac{2}{\sin^2 2x} + \left(\frac{1}{\sin^4 x + \cos^4 x} + \frac{1}{2\sin^2 x \cos^2 x}\right) \\ &\geq 2 + \left(\frac{1}{\sin^4 x + \cos^4 x} + \frac{1}{2\sin^2 x \cos^2 x}\right) \end{aligned}$$

Theo bất đẳng thức Cauchy, ta có :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sin^4 x + \cos^4 x} + \frac{1}{2\sin^2 x \cos^2 x} &\geq \frac{2}{\sqrt{(\sin^4 x + \cos^4 x)(2\sin^2 x \cos^2 x)}} \\ &\geq \frac{4}{\sin^4 x + \cos^4 x + 2\sin^2 x \cos^2 x} = \frac{4}{(\sin^2 x + \cos^2 x)^2} = 4 \end{aligned}$$

$$\Longrightarrow y_3 \geq 6$$

Do đó,

$$\min y_3 = 6 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin^2 2x = 1 \\ \sin^4 x + \cos^4 x = 2\sin^2 x \cos^2 x \end{cases} \Longrightarrow x = \frac{\pi}{4}$$

<u>Bài 2:</u> Cho x, y nhọn. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$\mathrm{A} = \tan^2 x + \tan^2 y + \cot^2(x+y) + 4$$

<u>Giải:</u>

Do x, y nhọn nên $\sin x$, $\sin y$, $\cos x$, $\cos y$ dương.

Ta có :

$$\frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y} = \frac{1}{\cot(x+y)}$$

$$\Leftrightarrow \tan x \cot(x+y) + \tan y \cot(x+y) = 1 - \tan x \tan y$$

$$\Leftrightarrow \tan x \tan y + \tan y \cot(x+y) + \tan x \cot(x+y) = 1 \ (*)$$

Hơn nữa, theo bất đẳng thức Cauchy, ta có :

$$\begin{cases} \tan^2 x + \tan^2 y \geq 2\tan x \tan y \\ \tan^2 y + \cot^2(x+y) \geq 2\tan y\,|\cot(x+y)| \geq 2\tan y \cot(x+y) \\ \cot^2(x+y) + \tan^2 x \geq 2|\cot(x+y)|\tan x \geq 2\cot(x+y)\tan x \end{cases}$$

$$\begin{aligned} &\Longrightarrow 2[\tan^2 x + \tan^2 y + \cot^2(x+y)] \\ &\qquad \geq 2\,\underbrace{[\tan x \tan y + \tan y \cot(x+y) + \cot(x+y)\tan x]}_{=1 \text{ theo } (*)} \end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \tan^2 x + \tan^2 y + \cot^2(x+y) \geq 1$$

$$\Longrightarrow \mathrm{A} \geq 5$$

Do đó,

$$\min \mathrm{A} = 5 \Leftrightarrow \tan x = \tan y = \cot(x+y) \Longrightarrow x = y = \frac{\pi}{6}$$

Bài 3: Cho a, b, c là các số thực thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 = 3$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$\mathrm{B} = a + b\sqrt{\sin x} + c\sqrt{\cos x}\ , x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$$

Giải:

Theo bất đẳng thức Bunyakovsky, ta có :

$$\mathrm{B} = a + b\sqrt{\sin x} + c\sqrt{\cos x} \le \sqrt{(a^2+b^2+c^2)(1+\sin x+\cos x)}$$

$$= \sqrt{3\left[1+\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right]} \le \sqrt{3\left(1+\sqrt{2}\right)}$$

Do đó,

$$\max \mathrm{B} = \sqrt{3\left(1+\sqrt{2}\right)} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \dfrac{b}{\sqrt{\sin x}} = \dfrac{c}{\sqrt{\cos x}} \\ \sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{\pi}{4} \\ a = \dfrac{\sqrt{3}.\sqrt[4]{2}}{2+\sqrt{2}} \\ b = c = \dfrac{\sqrt{3}}{2+\sqrt{2}} \end{cases}$$

Bài 4: Cho m, n là hai số tự nhiên lớn hơn 1. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số

$$y = \cos^m x \sin^n x\ , x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$$

(ĐH Bách Khoa Hà Nội 1998)

Giải:

Vì $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ nên $y \ge 0$.

Theo bất đẳng thức Cauchy, ta có :

$$y^2 = m^m.n^n.\underbrace{\left(\frac{\cos^2 x}{m}\right)\left(\frac{\cos^2 x}{m}\right)\dots\left(\frac{\cos^2 x}{m}\right)}_{m \text{ số hạng}}.\underbrace{\left(\frac{\sin^2 x}{n}\right)\left(\frac{\sin^2 x}{n}\right)\dots\left(\frac{\sin^2 x}{n}\right)}_{n \text{ số hạng}}$$

$$\le \frac{m^m.n^n}{(m+n)^{m+n}}\left(\underbrace{\frac{\cos^2 x}{m}+\frac{\cos^2 x}{m}+\ \dots\ +\frac{\cos^2 x}{m}}_{m \text{ số hạng}}+\underbrace{\frac{\sin^2 x}{n}+\frac{\sin^2 x}{n}+\ \dots\ +\frac{\sin^2 x}{n}}_{n \text{ số hạng}}\right)^{m+n}$$

$$= \frac{m^m.n^n}{(m+n)^{m+n}}\left(m.\frac{\cos^2 x}{m} + n.\frac{\sin^2 x}{n}\right)^{m+n} = \frac{m^m.n^n}{(m+n)^{m+n}}$$

$$\Rightarrow y \le \sqrt{\frac{m^m.n^n}{(m+n)^{m+n}}}$$

Do đó,

$$\max y = \sqrt{\frac{m^m.n^n}{(m+n)^{m+n}}} \Leftrightarrow \frac{\cos^2 x}{m} = \frac{\sin^2 x}{n} \Leftrightarrow \tan x = \sqrt{\frac{n}{m}} \Leftrightarrow x = \arctan\sqrt{\frac{n}{m}}$$

Bài 5: Cho a, b, c là ba số thực riêng biệt sao cho hàm số sau có nghĩa

$$y = \sqrt{a\sin^2 x + \frac{b}{2}\sin 2x + c\cos^2 x} + \sqrt{a\cos^2 x + \frac{b}{2}\sin 2x + c\sin^2 x}$$

Tìm giá trị lớn nhất của hàm số.

Giải:

Theo bất đẳng thức Bunyakovsky, ta có :

$$y \le \sqrt{2[a(\sin^2 x + \cos^2 x) + b\sin 2x + c(\cos^2 x + \sin^2 x)]}$$

Hơn nữa, do $b\sin 2x \le |b|.|\sin 2x| \le |b|$. Ta được

$$\sqrt{2[a(\sin^2 x + \cos^2 x) + b\sin 2x + c(\cos^2 x + \sin^2 x)]} = \sqrt{2(a + c + b\sin 2x)}$$

$$\le \sqrt{2(a + c + |b|)}$$

$$\Rightarrow y \le \sqrt{2(a + c + |b|)}$$

Do đó, $\max y = \sqrt{2(a + c + |b|)}$ khi và chỉ khi

$$a\sin^2 x + \frac{b}{2}\sin 2x + c\cos^2 x = a\cos^2 x + \frac{b}{2}\sin 2x + c\sin^2 x$$

$$\Leftrightarrow \cos 2x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}\ (k \in \mathbb{Z})$$

Bài 6: Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số

$$y = 4x + \frac{\pi^2}{x} + \sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x}\,; x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right]$$

Giải:

Vì $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right]$ nên $0 < \sin x \le 1 \Rightarrow \sqrt{\sin x} \ge \sqrt{\sin^4 x} = \sin^2 x$

Tương tự, ta có : $\sqrt{\cos x} \geq \cos^2 x$
Ta suy ra
$$\sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x} \geq \sin^2 x + \cos^2 x = 1$$
Mặt khác, theo bất đẳng thức Cauchy, ta có :
$$4x + \frac{\pi^2}{x} \geq 2\sqrt{4x.\frac{\pi^2}{x}} = 4\pi$$
Suy ra
$$y \geq 4\pi + 1$$
Do đó,
$$\min y = 4\pi + 1 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = \cos x \\ 4x = \dfrac{\pi^2}{x} \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2}$$

Bài 7: Cho các số thực α_i $(i = \overline{1; 2012})$ thỏa mãn điều kiện
$$\alpha_i \in \left[\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{2}\right]$$
Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức
$$\mathrm{C} = \left(\sum_{i=1}^{2012} \sin \alpha_i\right)\left(\sum_{i=1}^{2012} \frac{1}{\sin \alpha_i}\right)$$

Giải:
Ta có :
$$\alpha_i \in \left[\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow \sin \alpha_i \in \left[\frac{1}{2}; 1\right]$$
$$\Rightarrow \left(\sin \alpha_i - \frac{1}{2}\right)(\sin \alpha_i - 1) \leq 0$$
$$\Leftrightarrow \sin^2 \alpha_i + \frac{1}{2} \leq \frac{3}{2} \sin \alpha_i$$
$$\Leftrightarrow \sin \alpha_i + \frac{1}{2 \sin \alpha_i} \leq \frac{3}{2}$$

Ta được kết quả sau :

$$\begin{cases} \sin\alpha_1 + \dfrac{1}{2\sin\alpha_1} \le \dfrac{3}{2} \\ \sin\alpha_2 + \dfrac{1}{2\sin\alpha_2} \le \dfrac{3}{2} \\ \dots \\ \sin\alpha_{2012} + \dfrac{1}{2\sin\alpha_{2012}} \le \dfrac{3}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{2012} \sin\alpha_i + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2012} \frac{1}{\sin\alpha_i} \le \frac{2012.3}{2} = 3018$$

Mặt khác, theo bất đẳng thức Cauchy, ta có :

$$\sum_{i=1}^{2012} \sin\alpha_i + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2012} \frac{1}{\sin\alpha_i} \ge 2\sqrt{\sum_{i=1}^{2012} \sin\alpha_i \cdot \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2012} \frac{1}{\sin\alpha_i}}$$

$$\Rightarrow 3018 \ge 2\sqrt{\sum_{i=1}^{2012} \sin\alpha_i \cdot \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2012} \frac{1}{\sin\alpha_i}}$$

$$\Leftrightarrow \left(\sum_{i=1}^{2012} \sin\alpha_i\right)\left(\sum_{i=1}^{2012} \frac{1}{\sin\alpha_i}\right) \le 2.1509^2$$

Do đó,

$$\max \mathrm{C} = 2.1509^2 \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} \sin\alpha_i = \dfrac{1}{2} \\ \sin\alpha_i = 1 \end{array}\right. \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{2012} \sin\alpha_i = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2012} \frac{1}{\sin\alpha_i} \end{cases}$$

Từ đó, ta chọn

$$\begin{cases} \sin\alpha_1 = \dfrac{1}{2\sin\alpha_{2012}} \\ \sin\alpha_{i-1} = \dfrac{1}{2\sin\alpha_i} \end{cases} (i = \overline{1;2012})$$

Bài 8: Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số

$$y = \sin^5 x + \sqrt{3}\cos x$$

Giải:

Ta có :

$$\sin^5 x \leq \sin^4 x$$

$$\Rightarrow y = \sin^5 x + \sqrt{3}\cos x \leq \sin^4 x + \sqrt{3}\cos x$$

Theo bất đẳng thức Cauchy, ta có :

$$(1-\cos x)(1+\cos x)(1+\cos x) = \frac{1}{2}(2-2\cos x)(1+\cos x)(1+\cos x)$$

$$\leq \frac{1}{2}\left(\frac{2-2\cos x+1+\cos x+1+\cos x}{3}\right)^3 = \frac{32}{27} < \sqrt{3}$$

$$\Rightarrow \sqrt{3}-(1-\cos x)(1+\cos x)(1+\cos x) > 0$$

$$\Rightarrow (1-\cos x)\left[\sqrt{3}-(1-\cos x)(1+\cos x)^2\right] \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{3}(1-\cos x)-\sin^4 x \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \sin^4 x + \sqrt{3}\cos x \leq \sqrt{3}$$

Do đó,

$$\max y = \sqrt{3} \Leftrightarrow \cos x = 1 \Rightarrow x = 0$$

Ta lại có :

$$y = \sin^5 x + \sqrt{3}\cos x \geq -\sin^4 x + \sqrt{3}\cos x$$

Tương tự trên, theo bất đẳng thức Cauchy, ta có :

$$(1+\cos x)(1-\cos x)(1-\cos x) = \frac{1}{2}(2+2\cos x)(1-\cos x)(1-\cos x) \leq \frac{32}{27} < \sqrt{3}$$

$$\Rightarrow \sqrt{3}-(1+\cos x)(1-\cos x)(1-\cos x) > 0$$

$$\Rightarrow (1+\cos x)\left[\sqrt{3}-(1+\cos x)(1-\cos x)^2\right] \geq 0$$

$$\Leftrightarrow -\sin^4 x + \sqrt{3}\cos x \geq -\sqrt{3}$$

Do đó,

$$\min y = -\sqrt{3} \Leftrightarrow \cos x = -1 \Rightarrow x = \pi$$

- **BÀI TẬP TỰ LUYỆN**

8.1.4. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số

$$y = \cot x\,(\cos x + \sin x) + \sin^2 x + 1, x \in (0, \pi)$$

8.1.5. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số

$$y = \cos 2x + \frac{1}{2\cos^2 x + 2}$$

8.1.6. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số

$$y = 4x + \frac{9\pi^2}{x} + \sin x\,, x > 0$$

8.1.7. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số

$$y = \frac{8}{3\sin x - \sin 3x} + 3\sin^2 x\,, x \in (0;\pi)$$

8.1.8. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số

$$y = \frac{\sin^2 x}{\cos x\,(\sin x - \cos x)}, x \in \left(\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}\right)$$

8.1.9. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số

$$y = \left(a + \frac{b}{\sin x}\right)\left(b + \frac{a}{\cos x}\right), x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right), a \geq 0, b \geq 0$$

8.1.10. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số

$$y = \frac{3\sin^2 x\,(1 - 4\sin^2 x)}{\cos^4 x}, x \in \left(0;\frac{\pi}{6}\right)$$

8.1.11. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số

$$y = \sin x + \sqrt{2 - \sin^2 x} + \sin x\sqrt{2 - \sin^2 x}$$

8.1.12. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số

$$y = (\cos x + a\sin x)(\cos x + b\sin x)$$

8.1.13. Cho n góc $x_1, x_2, \dots, x_n$ $(n \in \mathbb{N}, n \geq 1)$ thỏa mãn

$$\begin{cases} \tan x_1 \tan x_2 \dots \tan x_n = 1 \\ x_1, x_2, \dots, x_n \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi\ (k \in \mathbb{Z}) \end{cases}$$

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$\mathrm{A} = \sin x_1 \sin x_2 \dots \sin x_n$$

8.1.14. Cho $a, b, c > 0$ sao cho $a\sin x + b\cos y = c$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$\mathrm{Q} = \frac{\cos^2 x}{a} + \frac{\sin^2 y}{b}$$

8.1.15. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$\mathrm{H} = \frac{a\sin^4 x + b\cos^4 y}{c\sin^2 x + d\cos^2 y} + \frac{a\cos^4 x + b\sin^4 y}{c\cos^2 x + d\sin^2 y}$$

Với $a, b, c, d > 0$.

- **GỢI Ý GIẢI BÀI TẬP TỰ LUYỆN**

8.1.4. Ta áp dụng

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\sin^2 x} + \sin^2 x \geq 2 \\ x \in (0, \pi) \Longrightarrow \dfrac{\cos^2 x}{\sin x} \geq 0 \end{cases}$$

Suy ra

$$\min y = 2 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} (k \in \mathbb{Z})$$

8.1.5. Theo bất đẳng thức Cauchy, ta có :

$$2(1 + \cos^2 x) + \frac{1}{2(1 + \cos^2 x)} \geq 2$$

Suy ra

$$\min y = -1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{-\arccos(-2) + 2k\pi}{2} \\ x = \dfrac{\arccos(-2) + 2k\pi}{2} \end{array}\right. \quad (k \in \mathbb{Z})$$

8.1.6. Theo bất đẳng thức Cauchy, ta có :

$$4x + \frac{9\pi^2}{x} \geq 12\pi$$

Suy ra

$$\min y = 12\pi - 1 \Leftrightarrow x = \frac{3\pi}{2}$$

8.1.7. Ta biến đổi

$$y = \frac{1}{\sin^3 x} + \frac{1}{\sin^3 x} + \sin^2 x + \sin^2 x + \sin^2 x$$

Ta áp dụng

$$\begin{cases} x \in (0; \pi) \Longrightarrow \sin x \in (0; 1] \\ y \geq 5\sqrt[5]{\dfrac{1}{\sin^6 x} . \sin^2 x . \sin^2 x . \sin^2 x} = 5 \end{cases}$$

Suy ra

$$\min y = 5 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2}$$

8.1.8. Ta biến đổi

$$y = \frac{\tan^2 x}{\tan x - 1} = \tan x + 1 + \frac{1}{\tan x - 1}$$

Theo bất đẳng thức Cauchy, ta có :

$$\tan x - 1 + \frac{1}{\tan x - 1} \geq 2$$

Suy ra

$$\min y = 4 \Leftrightarrow x = 2 \arctan \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$$

8.1.9. Ta biến đổi

$$y = ab + \frac{a^2}{\cos x} + \frac{b^2}{\sin x} + \frac{2ab}{\sin 2x}$$

Theo bất đẳng thức Cauchy, ta có :

$$\frac{a^2}{\cos x} + \frac{b^2}{\sin x} \geq \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\sin 2x}}$$

$$\Rightarrow y \geq ab\left(3 + 2\sqrt{2}\right) = ab\left(\sqrt{2} + 1\right)^2$$

Suy ra

$$\min y = ab\left(\sqrt{2} + 1\right)^2 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4}$$

8.1.10. Ta áp dụng

$$\begin{cases} x \in \left(0; \dfrac{\pi}{6}\right) \Rightarrow 1 - 4\sin^2 x = (1 - 2\sin x)(1 + 2\sin x) > 0 \\ 3\sin^2 x\,(1 - 4\sin^2 x) \leq \left(\dfrac{3\sin^2 x + 1 - 4\sin^2 x}{2}\right)^2 = \dfrac{\cos^4 x}{4} \end{cases}$$

Suy ra

$$\max y = \frac{1}{4} \Leftrightarrow x = \frac{\arccos \frac{5}{7}}{2}$$

8.1.11. Theo bất đẳng thức Bunyakovsky, ta có :

$$\sin x + \sqrt{2 - \sin^2 x} \leq \sqrt{2(\sin^2 x + 2 - \sin^2 x)} = 2$$

Theo bất đẳng thức Cauchy, ta có :

$$\sin x\sqrt{2 - \sin^2 x} \leq |\sin x|\sqrt{2 - \sin^2 x} \leq \frac{1}{2}(\sin^2 x + 2 - \sin^2 x) = 1$$

Suy ra

$$\max y = 3 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2}$$

8.1.12. Ta biến đổi

$$y = \left(\frac{1-ab}{2}\right)\cos 2x + \left(\frac{a+b}{2}\right)\sin 2x + \frac{ab+1}{2}$$

Theo bất đẳng thức Bunyakovsky, ta có :

$$\left(\frac{1-ab}{2}\right)\cos 2x + \left(\frac{a+b}{2}\right)\sin 2x \leq \sqrt{\left(\frac{1-ab}{2}\right)^2 + \left(\frac{a+b}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{(a^2+1)(b^2+1)}{2}}$$

Theo bất đẳng thức Cauchy, ta có :

$$\sqrt{(a^2+1)(b^2+1)} \leq \frac{a^2+1+b^2+1}{2} = \frac{a^2+b^2+2}{2}$$

$$\Rightarrow \max y = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 + 1$$

8.1.13. Ta biến đổi

$$\tan x_1 \tan x_2 \ldots \tan x_n = 1$$

$$\Leftrightarrow \sin x_1 \sin x_2 \ldots \sin x_n = \cos x_1 \cos x_2 \ldots \cos x_n$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow \mathrm{A}^2 &= (\sin x_1 \cos x_1)(\sin x_2 \cos x_2) \ldots (\sin x_n \cos x_n)\\ &\leq (|\sin x_1|.|\cos x_1|)(|\sin x_2|.|\cos x_2|) \ldots (|\sin x_n|.|\cos x_n|)\\ &\leq \frac{\sin^2 x_1 + \cos^2 x_1}{2}.\frac{\sin^2 x_2 + \cos^2 x_2}{2} \ldots \frac{\sin^2 x_n + \cos^2 x_n}{2} = \frac{1}{2^n}\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \mathrm{A} \leq |\mathrm{A}| \leq \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}}$$

$$\Rightarrow \max \mathrm{A} = \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}}$$

8.1.14. Ta biến đổi

$$\mathrm{Q} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \left(\frac{\sin^2 x}{a} + \frac{\cos^2 y}{b}\right)$$

Theo bất đẳng thức Bunyakovsky, ta có :

$$c = a\sqrt{a}.\frac{\sin x}{\sqrt{a}} + b\sqrt{b}.\frac{\cos y}{\sqrt{b}} \leq \sqrt{(a^3+b^3)\left(\frac{\sin^2 x}{a} + \frac{\cos^2 y}{b}\right)}$$

Suy ra

$$\frac{\sin^2 x}{a} + \frac{\cos^2 y}{b} \geq \frac{c^2}{a^3+b^3}$$

Khi đó,

$$\mathrm{Q} \leq \frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{c^2}{a^3 + b^3}$$

Do đó,

$$\max \mathrm{Q} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{c^2}{a^3 + b^3}$$

8.1.15. Ta biến đổi

$$\mathrm{H} = a\left(\frac{\sin^4 x}{c\sin^2 x + d\cos^2 y} + \frac{\cos^4 x}{a\cos^2 x + d\sin^2 y}\right)$$
$$+ b\left(\frac{\cos^4 y}{c\sin^2 x + d\cos^2 y} + \frac{\sin^4 y}{a\cos^2 x + d\sin^2 y}\right)$$

Ta có :

$$\frac{\sin^4 x}{c\sin^2 x + d\cos^2 y} + \frac{\cos^4 x}{c\cos^2 x + d\sin^2 y} \leq \frac{\sin^4 x}{c\sin^2 x} + \frac{\cos^4 x}{c\cos^2 x} = \frac{1}{c}$$
$$\frac{\cos^4 y}{c\sin^2 x + d\cos^2 y} + \frac{\sin^4 y}{c\cos^2 x + d\sin^2 y} \leq \frac{\cos^4 y}{d\cos^2 y} + \frac{\sin^4 y}{d\sin^2 y} = \frac{1}{d}$$
$$\Longrightarrow \mathrm{H} \leq \frac{a}{c} + \frac{b}{d}$$

Do đó,

$$\max \mathrm{H} = \frac{a}{c} + \frac{b}{d}$$

Hơn nữa, vì $c + d = c(\sin^2 x + \cos^2 x) + d(\sin^2 y + \cos^2 y)$ nên theo bất đẳng thức Bunyakovsky, ta có :

$$(c + d)\left(\frac{\sin^4 x}{c\sin^2 x + d\cos^2 y} + \frac{\cos^4 x}{c\cos^2 x + d\sin^2 y}\right)$$
$$= (c\sin^2 x + d\cos^2 y + c\cos^2 x + d\sin^2 y)\left(\frac{\sin^4 x}{c\sin^2 x + d\cos^2 y}\right.$$
$$\left. + \frac{\cos^4 x}{c\cos^2 x + d\sin^2 y}\right) \geq (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 = 1$$

Tương tự vậy, ta có

$$(c + d)\left(\frac{\cos^4 y}{c\sin^2 x + d\cos^2 y} + \frac{\sin^4 y}{c\cos^2 x + d\sin^2 y}\right)$$
$$= (c\sin^2 x + d\cos^2 y + c\cos^2 x + d\sin^2 y)\left(\frac{\cos^4 y}{c\sin^2 x + d\cos^2 y}\right.$$
$$\left. + \frac{\sin^4 y}{c\cos^2 x + d\sin^2 y}\right) \geq 1$$

Do đó,

$$H \geq \frac{a}{c+d} + \frac{b}{c+d} = \frac{a+b}{c+d}$$

Vậy

$$\min H = \frac{a+b}{c+d}$$

3. PHƯƠNG PHÁP ĐẠO HÀM HÀM SỐ

- Phương pháp này dùng để khảo sát một hàm số lượng giác trên một đoạn, ta cũng có thể tìm được giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn đó.
- Để việc khảo sát hàm số được đơn giản hơn, ta nên lưu ý việc đổi biến số bằng cách đặt ẩn phụ, nhưng phải biết được giới hạn của ẩn số mới. Lưu ý rằng khi đặt ẩn phụ, ta nên tìm miền giá trị của ẩn phụ trong khoảng xác định ẩn phụ cho trước.
- Tuy việc sử dụng phương pháp này dành cho đối tượng là học sinh lớp 12 và các học sinh chuyên, nhưng chúng tôi vẫn khuyến khích các bạn lớp 10, 11 không chuyên tham khảo thêm nhằm mở rộng kiến thức.
- Các bước giải chung cho loại toán khảo sát hàm số $y = f(x)$
    - Tìm miền xác định D của hàm số.
    - Tính đạo hàm $y' = f'(x)$.
    - Giải phương trình $y' = 0$, tìm nghiệm $x \in D$.
    - Lập bảng biến thiên, dựa vào bảng biến thiên ta tìm $\max y$; $\min y$.
- Ở đây, chúng tôi có dùng chữ viết tắt MXĐ, nghĩa là miền xác định.

Bài 1: Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số

$$y = 2\sin x + \cos 2x - 3, x \in (0;\pi)$$

Giải: MXĐ: $D = (0;\pi)$

Ta có :

$$y' = f'(x) = 2\cos x - 2\sin 2x = 2\cos x\,(1 - 2\sin x)$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x = 0 \\ \sin x = \dfrac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{2} \\ x = \dfrac{\pi}{6} \\ x = \dfrac{5\pi}{6} \end{array}\right. \left(\text{vì } x \in (0;\pi)\right)$$

x	0		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{5\pi}{6}$		π
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	-2	$\nearrow$	$-\frac{3}{2}$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$-\frac{3}{2}$	$\searrow$	-2

Dựa vào bảng biến thiên, ta có :

$$\max f(x) = -\frac{3}{2} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2}$$

$$\min f(x) = -2 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} \vee x = \frac{5\pi}{6}$$

Bài 2: Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số

$$y = \frac{\sin^4 x + \cos^4 x}{\sin^6 x + \cos^6 x}$$

Giải: MXĐ: $D = \mathbb{R}$

Ta có :

$$y = \frac{1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x}{1 - \frac{3}{4}\sin^2 2x} = \frac{4 - 2\sin^2 2x}{4 - 3\sin^2 2x}$$

Đặt $t = \sin^2 2x$, $t \in [0; 1]$. Khi đó, ta xét hàm số

$$y = g(t) = \frac{4 - 2t}{4 - 3t}; t \in [0; 1]$$

$$y' = g'(t) = \frac{4}{(4 - 3t)^2} > 0$$

Do đó, hàm số đồng biến trên $[0; 1]$.

Suy ra,

$$\max f(x) = g(1) = 2 \Leftrightarrow t = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2}$$

$$\min f(x) = g(0) = 1 \Leftrightarrow t = 0 \Rightarrow x = 0$$

Bài 3: Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số

$$y = \sqrt{3}\sin x + \cos x - x, x \in (0; \pi)$$

Giải: MXĐ: $D = (0; \pi)$

Ta có :

$$y' = f'(x) = \sqrt{3}\cos x - \sin x - 1$$
$$y' = f'(x) = 0 \Leftrightarrow \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6}\ \left(\text{vì } x \in (0;\pi)\right)$$

x	0		$\frac{\pi}{6}$		π
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	1	$\nearrow$	$\sqrt{3} - \frac{\pi}{6}$	$\searrow$	$-1-\pi$

Dựa vào bảng biến thiên, ta có :

$$\max f(x) = \sqrt{3} - \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6}$$
$$\min f(x) \text{ không tồn tại.}$$

<u>Bài 4:</u> Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số

$$y = (1 + \cos x)\sin x$$

<u>Giải:</u>

Vì hàm số tuần hoàn có chu kì là 2π nên ta chỉ cần khảo sát trên đoạn $[0; 2\pi]$.

MXĐ: $D = [0; 2\pi]$

$$y' = f'(x) = \cos x + \cos 2x$$
$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \cos 2x = \cos(\pi - x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{3} \\ x = \frac{5\pi}{3} \end{array}\right.$$

x	0		$\frac{\pi}{3}$		π		$\frac{5\pi}{3}$		2π
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{3\sqrt{3}}{4}$	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\frac{3\sqrt{3}}{4}$	$\nearrow$	0

Dựa vào bảng biến thiên, ta có :

$$\max f(x) = \frac{3\sqrt{3}}{4} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3}$$
$$\min f(x) = -\frac{3\sqrt{3}}{4} \Leftrightarrow x = \frac{5\pi}{3}$$

<u>Bài 5:</u> Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số

$$y = \sin x + 3\sin 2x \,,\, x \in [-\pi; 0]$$

<u>Giải:</u> MXĐ: $D = [-\pi; 0]$

Ta có :

$$y' = f'(x) = \cos x + 6\cos 2x = 12\cos^2 x + \cos x - 6$$
$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x = -\dfrac{3}{4} \\ \cos x = \dfrac{2}{3} \end{array}\right.$$

x	$-\pi$			$-\frac{\pi}{2}$			0
$\cos x$	-1		$-\frac{3}{4}$	0	$\frac{2}{3}$		1
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	0		$\frac{7\sqrt{7}}{8}$		$-\frac{5\sqrt{5}}{3}$		0

Khi $\begin{cases} \cos x = -\dfrac{3}{4} \Rightarrow \sin x = -\dfrac{\sqrt{7}}{4} \Rightarrow f(x) = \dfrac{7\sqrt{7}}{8} \\ \cos x = \dfrac{2}{3} \Rightarrow \sin x = -\dfrac{\sqrt{5}}{3} \Rightarrow f(x) = -\dfrac{5\sqrt{5}}{3} \end{cases}$

Dựa vào bảng biến thiên, ta có :

$$\max f(x) = \frac{7\sqrt{7}}{8} \Leftrightarrow \cos x = -\frac{3}{4}$$
$$\min f(x) = -\frac{5\sqrt{5}}{3} \Leftrightarrow \cos x = \frac{2}{3}$$

Bài 6: Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số

$$y = \frac{x}{2} + \sin^2 x\,, x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$$

(ĐH Kinh Tế Quốc Dân 2000)

Giải:

MXĐ: $D = \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$. Ta có

$$y' = f'(x) = \frac{1}{2} + \sin 2x$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \sin 2x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{12} \\ x = -\frac{5\pi}{12} \end{array}\right. \left(\text{vì } x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]\right)$$

x	$-\frac{\pi}{2}$		$-\frac{5\pi}{12}$		$\frac{5\pi}{3}$		$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$1 - \frac{\pi}{4}$	$\nearrow$	$\left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\right)^2 - \frac{5\pi}{24}$	$\searrow$	$\left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right)^2 - \frac{\pi}{24}$	$\nearrow$	$1 + \frac{\pi}{4}$

Dựa vào bảng biến thiên, ta có :

$$\max f(x) = 1 + \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{12}$$

$$\min f(x) = \left(\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}\right)^2 - \frac{\pi}{24} \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{12}$$

Bài 7: Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số

$$y = \frac{3 + 2\sin x}{\sqrt{1 + \cos x} + \sqrt{1 - \cos x}}\ , x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

Giải: Ta có :

$$y = f(x) = \frac{3 + 2\sin x}{\sqrt{2}\left|\cos\frac{x}{2}\right| + \sqrt{2}\left|\sin\frac{x}{2}\right|}$$

Với $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, ta có các trường hợp

a. Nếu $\frac{x}{2} \in \left[-\frac{\pi}{4}; 0\right]$ thì

$$f(x) = \frac{3 + 2\sin x}{\sqrt{2}\left(\cos\frac{x}{2} - \sin\frac{x}{2}\right)}$$

Đặt $u = \cos\frac{x}{2} - \sin\frac{x}{2} = \sqrt{2}\cos\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \Longrightarrow u^2 = 1 - \sin x$

Vì $\begin{cases} \frac{x}{2} \in \left[-\frac{\pi}{4}; 0\right] \\ \text{Hàm số } \cos t \text{ nghịch biến trên } \left[0; \frac{\pi}{4}\right] \end{cases} \Longrightarrow u \in \left[1; \sqrt{2}\right]$

Khi đó, ta xét hàm số

$$g(u) = \frac{3 + 2(1 - u^2)}{\sqrt{2}u} = \frac{5}{\sqrt{2}u} - \sqrt{2}u$$

$$g'(u) = -\frac{5}{\sqrt{2}u^2} - \sqrt{2} < 0$$

Do đó, hàm số nghịch biến trên $\left[1; \sqrt{2}\right]$

Suy ra

$$\max_{x \in \left[-\frac{\pi}{2}; 0\right]} f(x) = g(1) = \frac{3\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow u = 1 \Leftrightarrow x = 0$$

$$\min_{x \in \left[-\frac{\pi}{2}; 0\right]} f(x) = g\left(\sqrt{2}\right) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow u = \sqrt{2} \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2}$$

b. Nếu $\frac{x}{2} \in \left[0; \frac{\pi}{4}\right]$ thì

$$f(x) = \frac{3 + 2\sin x}{\sqrt{2}\left(\cos\frac{x}{2} + \sin\frac{x}{2}\right)}$$

Đặt $v = \cos\frac{x}{2} + \sin\frac{x}{2} = \sqrt{2}\sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \Longrightarrow v^2 = 1 + \sin x$

Vì $\begin{cases} \dfrac{x}{2} \in \left[0; \dfrac{\pi}{4}\right] \\ \text{Hàm số } \sin t \text{ đồng biến trên } \left[\dfrac{\pi}{4}; \dfrac{\pi}{2}\right] \end{cases} \Longrightarrow v \in \left[1; \sqrt{2}\right]$

Khi đó, ta xét hàm số

$$h(v) = \frac{3 + 2(v^2 - 1)}{\sqrt{2}v} = \frac{1}{\sqrt{2}v} + \sqrt{2}v$$

$$h'(v) = \frac{2v^2 - 1}{\sqrt{2}v^2} > 0$$

Do đó, hàm số đồng biến trên $\left[1; \sqrt{2}\right]$

Suy ra

$$\max_{x \in \left[0; \frac{\pi}{4}\right]} f(x) = h\left(\sqrt{2}\right) = \frac{5}{2} \Leftrightarrow v = \sqrt{2} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2}$$

$$\min_{x \in \left[0; \frac{\pi}{4}\right]} f(x) = h(1) = \frac{3\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow v = 1 \Leftrightarrow x = 0$$

Như vậy, từ các giá trị, ta được :

$$\max f(x) = \frac{5}{2} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2}$$

$$\min f(x) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2}$$

Bài 8: Cho 3 số thức a, b, c thỏa mãn

$$a^2 + b^2 + c^2 = 4$$

Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số

$$y = a + b\sqrt{2}\sin x + c\sin 2x \,, x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$$

Giải: Theo bất đẳng thức Bunyakovsky, ta có :

$$|y| = \left|a + b\sqrt{2}\sin x + c\sin 2x\right| \le \sqrt{(a^2 + b^2 + c^2)(1 + 2\sin^2 x + \sin^2 2x)}$$

$$= 2\sqrt{1 + 2\sin^2 x + \sin^2 2x} = 2\sqrt{3 - \cos 2x - \cos^2 2x}$$

Đặt $t = \cos 2x$, với $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ nên $t \in [-1; 1]$. Ta xét hàm số

$$g(t) = 3 - t - t^2$$

$$g'(t) = -1 - 2t$$

$$g'(t) = 0 \Leftrightarrow t = -\frac{1}{2}$$

t	-1		$-\frac{1}{2}$		1
$g'(t)$		$+$	0	$-$	
$g(t)$	3	$\nearrow$	$\frac{13}{4}$	$\searrow$	1

Dựa vào bảng biến thiên, ta được

$$g(t) \le \frac{13}{4} \Rightarrow |y| = |f(x)| \le \sqrt{13}$$

Do đó,

$$\max f(x) = \sqrt{13} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos 2x = -\dfrac{1}{2} \\ a = \dfrac{b}{\sqrt{2}\sin x} = \dfrac{c}{\sin 2x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{\pi}{3} \\ a = \dfrac{4}{\sqrt{13}} \\ b = \dfrac{2\sqrt{6}}{\sqrt{13}} \\ c = \dfrac{2\sqrt{3}}{\sqrt{13}} \end{cases}$$

$$\min f(x) = -\sqrt{13} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{\pi}{3} \\ a = -\dfrac{4}{\sqrt{13}} \\ b = -\dfrac{2\sqrt{6}}{\sqrt{13}} \\ c = -\dfrac{2\sqrt{3}}{\sqrt{13}} \end{cases}$$

<u>Bài 9:</u> Với $n \in \mathbb{N}, n \ge 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số

$$y = f(x) = \sin^n x + \cos^n x\,, x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$$

Giải:

MXĐ: $D = \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$

Ta có :

$$f'(x) = n\cos x\sin^{n-1}x - n\sin x\cos^{n-1}x = \frac{n}{2}\sin 2x\,(\sin^{n-2}x - \cos^{n-2}x)$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \sin x = \cos x \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4}$$

x	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	1	$\searrow$	$2^{1-\frac{n}{2}}$	$\nearrow$	1

Dựa vào bảng biến thiên, ta được

$$\max f(x) = 1 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = \frac{\pi}{2}$$

$$\min f(x) = 2^{1-\frac{n}{2}} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4}$$

Bài 10: Tìm giá trị lớn nhất của hàm số

$$y = f(x) = \sin x + \sin 2x + \sin 3x$$

Giải: Ta có :

$$f(x) = 2(\cos x\sin x + \sin 2x\cos x)$$

Theo bất đẳng thức Bunyakovsky, ta được

$$f(x) \le 2\sqrt{(\cos^2 x + \sin^2 2x)(\sin^2 x + \cos^2 x)} = 2\sqrt{\cos^2 x + \sin^2 2x}$$

$$= 2\sqrt{-\cos^2 2x + \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{3}{2}}$$

Đặt $t = \cos 2x$, $t \in [-1; 1]$. Ta xét hàm số

$$g(t) = -t^2 + \frac{1}{2}t + \frac{3}{2}$$

$$g'(t) = -2t + \frac{1}{2}$$

$$g'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{4}$$

t	-1		$\frac{1}{4}$		1
$g'(t)$		$+$	0	$-$	
$g(t)$	0	$\nearrow$	$\frac{25}{16}$	$\searrow$	1

Dựa vào bảng biến thiên, ta được

$$g(t) \le \frac{25}{16} \Rightarrow f(x) \le \frac{5}{2}$$

Do đó,

$$\max f(x) = \frac{5}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{\cos x}{\sin x} = \dfrac{\sin 2x}{\cos x} \\ \cos 2x = \dfrac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = 1 - \cos 2x \\ \cos 2x = \dfrac{1}{4} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = \dfrac{3}{4} \\ 2\cos^2 x - 1 = \dfrac{1}{4} \end{cases} \text{(vô nghiệm)}$$

Vậy hàm số đã cho không tồn tại giá trị lớn nhất.

<u>Bài 11:</u> Cho ba số x, y, z thay đổi trên $[0; 1]$ và thỏa mãn điều kiện

$$x + y + z = \frac{3}{2}$$

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$\mathrm{A} = \cos(x^2 + y^2 + z^2)$$

(ĐH Xây Dựng 2000)

<u>Giải:</u> Vì $x, y, z \in [0; 1]$ nên $0 < x^2 + y^2 + z^2 \le x + y + z$

Mà

$$\begin{cases} x + y + z = \dfrac{3}{2} < \dfrac{\pi}{2} \\ \text{Hàm số } \cos t \text{ nghịch biến trên } \left(0; \dfrac{\pi}{2}\right) \end{cases}$$

Do đó,

$$\mathrm{A} = \cos(x^2 + y^2 + z^2) \ge \cos(x + y + z) = \cos\frac{3}{2}$$

Tuy nhiên, dấu " = " không thể xảy ra nên đây chưa phải là giá trị nhỏ nhất của hàm số.

Để ý rằng $x, y, z \in [0; 1]$ và $x + y + z = \frac{3}{2}$ nên có ít nhất một số trong $\left[\frac{1}{2}; 1\right]$

Ta giả sử rằng $z \in \left[\frac{1}{2}; 1\right]$. Khi đó

$$x + y = \frac{3}{2} - z$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 = \frac{9}{4} - 3z + 2z^2 - 2xy \le \frac{9}{4} - 3z + 2z^2$$

Ta xét hàm số

$$f(z) = 2z^2 - 3z + \frac{9}{4}, z \in \left[\frac{1}{2}; 1\right]$$

$$f'(z) = 4z - 3$$

$$f'(z) = 0 \Leftrightarrow z = \frac{3}{4}$$

z	$\frac{1}{2}$		$\frac{3}{4}$		1
$f'(z)$		$-$	0	$+$	
$f(z)$	$\frac{5}{4}$	$\searrow$	$\frac{9}{8}$	$\nearrow$	$\frac{5}{4}$

Dựa vào bảng biến thiên, ta được

$$f(z) \le \frac{5}{4} \Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 \le \frac{5}{4}$$

Ở đây, dấu " = " xảy ra khi và chỉ khi

$$z = \frac{1}{2} \vee z = 1$$

Do đó,

$$\min \mathrm{A} = \cos\frac{5}{4} \Leftrightarrow \begin{cases} z = \frac{1}{2} \vee z = 1 \\ xy = 0 \\ x + y + z = \frac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow (x; y; z) = \left(0; 1; \frac{1}{2}\right)$$

- **BÀI TẬP TỰ LUYỆN**

8.1.15. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của các hàm số sau

a. $y = \sin^6 x \cos^4 x$

b. $y = \cos\dfrac{2x}{1+x^2} + \cos\dfrac{4x}{1+x^2} + 1$

c. $y = \dfrac{3}{\cos^4 x} - 2\tan^4 x\,, x \in \left[0; \dfrac{\pi}{3}\right]$

d. $y = x + \sqrt{2}\cos x\,, x \in \left[0; \dfrac{\pi}{2}\right]$

e. $y = \dfrac{\dfrac{3}{\sin^2 x} + 3\tan^2 x - 1}{\tan x + \cot x}$

f. $y = \dfrac{2\cos^2 x + |\cos x| + 1}{|\cos x| + 1}$

g. $y = 1 + \cos x + \dfrac{1}{2}\cos 2x + \dfrac{1}{3}\cos 3x$

h. $y = \dfrac{3\cos^4 x + 4\sin^2 x}{3\sin^4 x + 2\cos^2 x}$

i. $y = 2(1 + \sin 2x \cos 4x) - \dfrac{1}{2}(\cos 4x - \cos 8x)$

8.1.16. Chứng minh rằng tổng các giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số

$$y = f(x) = \frac{\cot^3 x}{\cot 3x}, x \in \left(0; \frac{\pi}{3}\right) \setminus \left\{\frac{\pi}{6}\right\}$$

Là một số hữu tỉ.

(Đề nghị Olympic 30-4, 2006)

- **GỢI Ý GIẢI BÀI TẬP TỰ LUYỆN**

8.1.15.

a. Ta biến đổi

$$y = f(x) = \sin^6 x\,(1 - \sin^2 x)^2$$

Đặt $t = \sin^2 x\,, t \in [0; 1]$. Ta xét hàm số

$$g(t) = t^3(1-t)^2$$

Ta được,

$$\max f(x) = \frac{108}{3125}$$
$$\min f(x) = 0$$

b. Để ý rằng

Với $t = \dfrac{2x}{1+x^2} \Longrightarrow |t| \le 1$. Khi đó ta xét hàm số

$$g(t) = \cos t + \cos 2t + 1 = 2\cos^2 t + \cos t$$

Ta được,

$$\max f(x) = 3$$
$$\min f(x) = 2\cos^2 1 + \cos 1$$

c. Ta biến đổi

$$y = f(x) = \frac{3}{\cos^4 x} - 2\left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right)^2$$

Đặt $t = \dfrac{1}{\cos^2 x} \Longrightarrow t \in [1; 4]$. Khi đó ta xét hàm số

$$g(t) = t^2 + 4t - 2$$

Ta được,

$$\max f(x) = 30$$
$$\min f(x) = 3$$

d. Kết quả

$$\max f(x) = \frac{\pi}{4} + 1$$
$$\min f(x) = \sqrt{2}$$

e. Ta biến đổi

$$y = f(x) = \frac{3(\tan^2 x + \cot^2 x) + 2}{\tan x + \cot x}$$

Đặt $t = \tan x + \cot x$

$$\Longrightarrow \begin{cases} |t| \geq |\tan x| + \dfrac{1}{|\tan x|} \geq 2 \\ t^2 - 2 = \tan^2 x + \cot^2 x \end{cases}$$

Ta xét hàm số

$$g(t) = \frac{3(t^2 - 2) + 2}{t}$$

Hàm số trên không tồn tại giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất trên $(-\infty; -2] \cup [2; +\infty)$

f. Kết quả

$$\max f(x) = 2$$
$$\min f(x) = 1$$

g. Ta biến đổi

$$y = f(x) = \frac{4}{3}\cos^3 x + \cos^2 x + \frac{1}{2}$$

Đặt $t = \cos x$, $t \in [-1; 1]$. Ta xét hàm số

$$g(t) = \frac{4}{3}t^3 + t^2 + \frac{1}{2}$$

Ta được

$$\max f(x) = \frac{17}{6}$$
$$\min f(x) = \frac{1}{6}$$

h. Ta biến đổi

$$y = f(x) = \frac{3\sin^4 x - 2\sin^2 x + 3}{3\sin^4 x - 2\sin^2 x + 2}$$

Đặt $t = \sin^2 x, t \in [0; 1]$. Ta xét hàm số

$$g(t) = \frac{3t^2 - 2t + 3}{3t^2 - 2t + 2}$$

Ta được,

$$\max f(x) = \frac{8}{5}$$
$$\min f(x) = \frac{4}{3}$$

i. Ta biến đổi

$$y = f(x) = 4\sin^4 2x - 4\sin^3 2x - 3\sin^2 2x + 2\sin 2x + 2$$

Đặt $t = \sin 2x, t \in [-1; 1]$. Ta xét hàm số

$$g(t) = 4t^4 - 4t^3 - 3t^2 + 2t + 2$$

Ta được,

$$\max f(x) = 5$$
$$\min f(x) = 1$$

8.1.16. Ta biến đổi

$$y = f(x) = \frac{3 - \tan^2 x}{(1 - 3\tan^2 x)\tan^2 x}$$

Đặt $t = \tan^2 x, t \in (0; 3), t \neq \frac{1}{3}$. Ta xét hàm số

$$g(t) = \frac{3 - t}{(1 - 3t)t}$$

Ta được,

$$\begin{cases} \max f(x) = 17 + 12\sqrt{2} \\ \min f(x) = 17 - 12\sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow \max f(x) + \min f(x) = 34$$

II. TÌM GIÁ TRỊ LỚN NHẤT, GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT HÀM LƯỢNG GIÁC CHỨA THAM SỐ

- Dạng bài tập này đa phần xoay quanh vấn đề biện luận theo tham số tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số, là dạng bài tập ít khi xuất hiện trong các bài thi, nếu có sẽ nằm trong câu nhỏ của bài toán tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất ứng với tham số cho trước. Dạng bài này thuộc dạng bài khó, dùng để phân loại thí sinh trong các cuộc thi.
- Phương pháp giải dạng bài này tương tự như dạng trên mà chúng tôi đã đề cập đến, tuy nhiên cái khó của dạng bài này là việc khoanh vùng cho tham số để biện luận.

<u>Bài 1:</u> Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số theo tham số m

$$y = \sin^6 x + \cos^6 x + m \sin x \cos x$$

<u>Giải:</u> Ta có :

$$y = f(x) = 1 - \frac{3}{4}\sin^2 2x + \frac{m}{2}\sin 2x$$

Đặt $t = \sin 2x$, $|t| \leq 1$. Ta xét hàm số

$$g(t) = 1 - \frac{3}{4}t^2 + \frac{m}{2}t$$

$$g'(t) = -\frac{3}{2}t + \frac{m}{2}$$

$$g'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{m}{3}$$

Ta có các trường hợp sau :

- $m < -3$. Khi đó hàm số $g(t)$ nghịch biến trên $[-1; 1]$

$$\max f(x) = g(-1) = \frac{1}{4} - \frac{m}{2} \Leftrightarrow \sin 2x = -1 \Longrightarrow x = -\frac{\pi}{4}$$

$$\min f(x) = g(1) = \frac{1}{4} + \frac{m}{2} \Leftrightarrow \sin 2x = 1 \Longrightarrow x = \frac{\pi}{4}$$

- $m \in [-3; 3]$

t	-1		$\frac{m}{3}$		1
$g'(t)$		$+$	0	$-$	
$g(t)$	$g(-1)$	$\nearrow$	$g\left(\frac{m}{3}\right)$	$\searrow$	$g(1)$

Dựa vào bảng biến thiên, ta được

$$\max f(x) = g\left(\frac{m}{3}\right) = 1 + \frac{m^2}{12}$$

Nếu $m \in [0; 3]$ thì

$$\min f(x) = g(-1) = \frac{1}{4} - \frac{m}{2}$$

Nếu $m \in [-3; 0]$ thì

$$\min f(x) = g(1) = \frac{1}{4} + \frac{m}{2}$$

- $m > 3$. Khi đó hàm số $g(t)$ đồng biến trên $[-1; 1]$

$$\max f(x) = g(1) = \frac{1}{4} + \frac{m}{2}$$

$$\min f(x) = g(-1) = \frac{1}{4} - \frac{m}{2}$$

Bài 2: Cho hàm số $y = f(x) = \cos^2 2x + 2(\sin x + \cos x)^3 - 3\sin 2x + m$

Tìm m để $f(x) \leq 6$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Giải: Ta có :

$$y = f(x) = 1 - \sin^2 2x + 2(\sin x + \cos x)^3 - 3\sin 2x + m$$

Đặt $t = \sin x + \cos x\,, t \in \left[-\sqrt{2}; \sqrt{2}\right]$ và $\sin 2x = t^2 - 1$. Ta đưa về hàm số

$$g(t) = 1 - (t^2 - 1)^2 + 2t^3 - 3(t^2 - 1) + m$$

Như vậy, ta đưa bài toán về tìm m để $g(t) \leq 6$ với mọi $t \in \left[-\sqrt{2}; \sqrt{2}\right]$. Hay

$$-t^4 + 2t^3 - t^2 - 3 \leq -m, \forall t \in \left[-\sqrt{2}; \sqrt{2}\right]$$

Ta xét hàm số

$$h(t) = -t^4 + 2t^3 - t^2 - 3, t \in \left[-\sqrt{2}; \sqrt{2}\right]$$

$$h'(t) = -4t^3 + 6t^2 - 2t$$

$$h'(t) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 0 \\ t = 1 \\ t = \dfrac{1}{2} \end{array}\right.$$

t	$-\sqrt{2}$		0		$\frac{1}{2}$		1		$\sqrt{2}$
$h'(t)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$h(t)$	$-9-4\sqrt{2}$	$\nearrow$	-3	$\searrow$	$-\frac{49}{16}$	$\nearrow$	-3	$\searrow$	$-9+4\sqrt{2}$

Dựa vào bảng biến thiên, ta được

$$\max h(t) \le -m$$

Hay

$$m \le 3$$

<u>Bài 3:</u> Cho $a, b \in \mathbb{R}$. Biện luận theo a, b giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$\mathrm{A} = (\cos x - a)^2 + (\sin x - b)^2$$

<u>Giải:</u> Ta có :

$$\mathrm{A} = 1 + a^2 + b^2 - 2a\cos x - 2b\sin x = 1 + a^2 + b^2 - 2(b\sin x + a\cos x)$$

Theo bất đẳng thức Bunyakovsky, ta có :

$$-\sqrt{a^2+b^2} \le a\cos x + b\sin x \le \sqrt{a^2+b^2}$$

Suy ra

$$1 + a^2 + b^2 - 2\sqrt{a^2+b^2} \le \mathrm{A} \le 1 + a^2 + b^2 + 2\sqrt{a^2+b^2}$$

Ta xét các trường hợp sau

- $a = b = 0$ thì $\mathrm{A} = 1$
- $a = 0, b \ne 0$ thì $\mathrm{A} = 1 + b^2 - 2b\sin x$. Khi đó
  - $b > 0$

$$\max \mathrm{A} = (1+b)^2 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi \ (k \in \mathbb{Z})$$

$$\min \mathrm{A} = (1-b)^2 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \ (k \in \mathbb{Z})$$

  - $b < 0$

$$\max \mathrm{A} = (1-b)^2 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \ (k \in \mathbb{Z})$$

$$\min \mathrm{A} = (1+b)^2 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi \ (k \in \mathbb{Z})$$

- $a \neq 0, b = 0$ thì $\mathrm{A} = 1 + a^2 - 2a\cos x$. Khi đó
    - $a > 0$

$$\max \mathrm{A} = (1+a)^2 \Leftrightarrow x = \pi + k2\pi \ (k \in \mathbb{Z})$$

$$\min \mathrm{A} = (1-a)^2 \Leftrightarrow x = k2\pi \ (k \in \mathbb{Z})$$

    - $a < 0$

$$\max \mathrm{A} = (1-b)^2 \Leftrightarrow x = k2\pi \ (k \in \mathbb{Z})$$

$$\min \mathrm{A} = (1+b)^2 \Leftrightarrow x = \pi + k2\pi \ (k \in \mathbb{Z})$$

- $ab \neq 0$ thì A đạt giá trị lớn nhất, nhỏ nhất khi

$$\frac{a}{\cos x} = \frac{b}{\sin x} \Leftrightarrow \tan x = \frac{b}{a} \Leftrightarrow x = \arctan\frac{b}{a} + k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$$

Ta được,

$$\max \mathrm{A} = 1 + a^2 + b^2 + 2\sqrt{a^2+b^2}$$

$$\min \mathrm{A} = 1 + a^2 + b^2 - 2\sqrt{a^2+b^2}$$

<u>Bài 4:</u> Cho hàm số

$$y = f(x) = \frac{k + \sin x + 2\cos x}{2 - \sin x - \cos x}$$

Xác định k để hàm số có giá trị nhỏ nhất là lớn nhất khi $k \in [-4; -1]$

<u>Giải:</u> Ta có :

$$|\sin x + \cos x| = \sqrt{2}\left|\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\right| \leq \sqrt{2} < 2$$

Do đó : $\sin x + \cos x \neq 2$. Suy ra miền xác định của hàm số $D = \mathbb{R}$.

Mặt khác, ta biến đổi

$$(y+1)\sin x + (y+2)\cos x = 2y - k$$

Phương trình có nghiệm khi và chỉ khi

$$(y+1)^2+(y+2)^2 \geq (2y-k)^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{2k+3-\sqrt{2k^2+12k+19}}{2} \leq y \leq \frac{2k+3+\sqrt{2k^2+12k+19}}{2}$$

Khi đó

$$\begin{cases} \max y = \dfrac{2k+3+\sqrt{2k^2+12k+19}}{2} \\ \min y = \dfrac{2k+3-\sqrt{2k^2+12k+19}}{2} \end{cases}$$

Theo yêu cầu bài toán, ta xét hàm số

$$g(k) = 2k+3-\sqrt{2k^2+12k+19}, k \in [-4;-1]$$

$$g'(k) = 2.\frac{\sqrt{2k^2+12k+19}-k-3}{\sqrt{2k^2+12k+19}}$$

$$g'(k) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{2k^2+12k+19} = k+3 \Leftrightarrow \begin{cases} k^2+6k+10=0 \\ k \geq -3 \end{cases}$$

Như vậy, rõ ràng $g'(k) > 0$ hay hàm số đồng biến trên $[-4;-1]$. Khi đó

$$\max g(k) = g(-1) = -2$$

Vậy giá trị lớn nhất của giá trị nhỏ nhất hàm số y là -1.

<u>Bài 5:</u> Cho hàm số

$$y = f(x) = \frac{2k\cos x + k + 1}{\cos x + \sin x + 2}$$

Tìm k để giá trị lớn nhất của hàm số là nhỏ nhất.

(ĐHQG Tp.HCM 1997)

<u>Giải:</u> Tương tự bài trên, miền xác định của hàm số $D = \mathbb{R}$.

Ta biến đổi

$$y.\sin x + (y-2k)\cos x = k+1-2y$$

Phương trình có nghiệm khi và chỉ khi

$$y^2+(y-2k)^2 \geq (k+1-2y)^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{2-\sqrt{6k^2-4k+2}}{2} \leq y \leq \frac{2+\sqrt{6k^2-4k+2}}{2}$$

Khi đó

$$\begin{cases} \max y = \dfrac{2+\sqrt{6k^2-4k+2}}{2} \\ \min y = \dfrac{2-\sqrt{6k^2-4k+2}}{2} \end{cases}$$

Theo yêu cầu bài toán, ta xét

$$\max y = \frac{2+\sqrt{6k^2-4k+2}}{2} = \frac{2+\sqrt{6\left(k-\frac{1}{3}\right)^2+\frac{4}{3}}}{2} \geq \frac{3+\sqrt{3}}{3}$$

Như vậy, giá trị nhỏ nhất của giá trị lớn nhất hàm số là $\dfrac{3+\sqrt{3}}{3}$ khi và chỉ khi $k=\dfrac{1}{3}$

<u>Bài 6:</u> Cho hàm số

$$y=f(x)=\frac{1+\sin 2x}{1-\sin 2x}-(a+1).\frac{1+\tan x}{1-\tan x}+a$$

Tùy theo a, tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số trong $\left[0;\dfrac{\pi}{4}\right)$

(ĐH Giao Thông Vận Tải 1992)

<u>Giải:</u> Ta đặt $t=\tan x$ thì

$$\sin 2x = \frac{2t}{1+t^2}$$

Với $x \in \left[0;\dfrac{\pi}{4}\right)$ thì $t \in [0;1)$. Khi đó

$$y=g(t)=\frac{t^2+1+2t}{t^2+1-2t}-(a+1).\frac{t+1}{t-1}+a$$

Ta viết lại thành

$$y=g(t)=\left(\frac{t+1}{t-1}\right)^2+(a+1).\frac{t+1}{t-1}+a$$

Đặt $u=\dfrac{t+1}{t-1}$; $t \in [0;1)$

Do $\left(\dfrac{t+1}{t-1}\right)' = -\dfrac{2}{(t-1)^2} < 0 \Longrightarrow u \in (-\infty;-1]$. Ta xét hàm số

$$h(u)=u^2+(a+1)u+a;\ u \in (-\infty;-1]$$

$$h'(u)=2u+a+1$$

$$h'(u)=0 \Leftrightarrow u=-\frac{a+1}{2}$$

Giá trị nhỏ nhất của $f(x)$ là giá trị nhỏ nhất của $h(u)$. Ta có các trường hợp sau :

Nếu $a \leq 1$ thì $-\dfrac{a+1}{2} \geq -1$ nên hàm số nghịch biến trên $(-\infty; -1]$

$$\Longrightarrow \min_{x\in\left[0;\frac{\pi}{4}\right)} f(x) = h(-1) = 0$$

Nếu $a > 1$ thì $-\dfrac{a+1}{2} < -1$

u	$-\infty$		$-\frac{a+1}{2}$		-1
$h'(u)$		$-$	0	$+$	
$h(u)$	$+\infty$	$\searrow$	$-\frac{(a-1)^2}{4}$	$\nearrow$	0

Dựa vào bảng biến thiên, ta được

$$\min_{x\in\left[0;\frac{\pi}{4}\right)} f(x) = h\left(-\frac{a+1}{2}\right) = -\frac{(a-1)^2}{4}$$

- **BÀI TẬP TỰ LUYỆN**

8.2.1. Cho hàm số

$$y = f(x) = \frac{m\cos x + \sin x - 1}{2 - \sin x}$$

Tìm m để giá trị nhỏ nhất của hàm số lớn hơn -2 với mọi $x \in \mathbb{R}$.

8.2.2. Biện luận theo m, tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số

$$y = f(x) = \sin^4 x + \cos^4 x + m\sin x\cos x$$

8.2.3. Cho hàm số

$$y = f(x) = \sin^4 x + m\cos^2 x - 1$$

Định m để $f(x) \geq 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

8.2.4. Cho hàm số

$$y = f(x) = 2(\sin^4 x + \cos^4 x) + 3m\sin x\cos x - 2m + 1$$

Tìm m để $f(x) > 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

8.2.5. Cho hàm số

$$y = f(x) = \frac{-2\cos x + m\sin x + 2}{\cos x + \sin x - 2}$$

Tìm m để giá trị lớn nhất của hàm số đạt giá trị nhỏ nhất.

- GỢI Ý GIẢI BÀI TẬP TỰ LUYỆN

8.2.1. Giá trị của m cần tìm là $m \in \left(-2\sqrt{2}; 2\sqrt{2}\right)$.

8.2.2. Ta biến đổi

$$y = f(x) = 1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x + \frac{m}{2}\sin 2x$$

Đặt $t = \sin 2x\,; |t| \le 1$. Ta xét hàm số

$$g(t) = 1 - \frac{1}{2}t^2 + \frac{m}{2}t$$

Ta được,

$$\max f(x) = \begin{cases} \dfrac{1 - |m|}{2} & ; |m| > 2 \\ \dfrac{m^2 + 8}{2} & ; |m| \le 2 \end{cases}$$

$$\min f(x) = \frac{1 - |m|}{2}$$

8.2.3. Giá trị của m cần tìm là $m \ge 2$.

8.2.4. Ta biến đổi

$$y = f(x) = -\sin^2 2x + \frac{3}{2}m\sin 2x - 2m + 3$$

Đặt $t = \sin 2x\,; |t| \le 1$. Ta xét hàm số

$$g(t) = -t^2 + \frac{3}{2}mt - 2m + 3 > 0; \forall t \in [-1; 1]$$

$$\Leftrightarrow \frac{m}{2} < \frac{t^2 - 3}{3t - 4}; \forall t \in [-1; 1]$$

Ta xét hàm số

$$h(t) = \frac{t^2 - 3}{3t - 4}$$

Ta tìm được giá trị cần tìm của m

$$m \le \frac{4}{7}$$

8.2.5. Ở bài toán này, ta cần tính giới hạn sau

$$\lim_{m \to \infty}\left(\sqrt{3m^2 + 4m + 4} - m - 2\right) = \lim_{m \to \infty}\frac{3m^2 + 4m + 4 - (m + 2)^2}{\sqrt{3m^2 + 4m + 4} + m + 2}$$

$$= \lim_{m \to \infty}\frac{2m^2}{\sqrt{3m^2 + 4m + 4} + m + 2} = \infty$$

Giá trị m cần tìm là : $m = 0$.

III. TÌM GIÁ TRỊ LỚN NHẤT, GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT HÀM LƯỢNG GIÁC TRONG TAM GIÁC

- Cũng giống như CỰC TRỊ HÀM LƯỢNG GIÁC CHỨA THAM SỐ, dạng toán này thường nằm trong những câu phân loại thí sinh của đề thi. Tuy nhiên, chúng ta ít khi dựa vào những phương pháp giải của CỰC TRỊ HÀM LƯỢNG GIÁC mà ta thường sử dụng các đẳng thức, bất đẳng thức đã được khái quát ở CHƯƠNG 3 để tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của biểu thức đã cho.
- Dạng này cũng được coi là thuộc một dạng nhỏ của CHƯƠNG 3.

Bài 1: Cho tam giác ABC. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$M=\frac{1}{2+\cos 2A}+\frac{1}{2+\cos 2B}+\frac{1}{2-\cos 2C}$$

(ĐH Mỏ-Địa Chất 1999)

Giải: Theo bất đẳng thức Cauchy, ta có :

$$\begin{cases}\dfrac{1}{2+\cos 2A}+\dfrac{1}{2+\cos 2B}+\dfrac{1}{2-\cos 2C}\geq\dfrac{3}{\sqrt[3]{(2+\cos 2A)(2+\cos 2B)(2-\cos 2C)}}\\ \sqrt[3]{(2+\cos 2A)(2+\cos 2B)(2-\cos 2C)}\leq\dfrac{2+\cos 2A+2+\cos 2B+2-\cos 2C}{3}\end{cases}$$

$$\Rightarrow M\geq\frac{9}{6+\cos 2A+\cos 2B-\cos 2C}$$

Mà

$$6+\cos 2A+\cos 2B-\cos 2C=6-2\cos C\cos(A-B)-(2\cos^2 C-1)$$

$$=7+\frac{1}{2}\cos^2(A-B)-2\left[\cos C+\frac{1}{2}\cos(A-B)\right]^2\leq 7+\frac{1}{2}\cos^2(A-B)\leq\frac{15}{2}$$

Do đó,

$$M\geq\frac{6}{5}$$

Vậy

$$\min M=\frac{6}{5}\Leftrightarrow\begin{cases}2+\cos 2A=2+\cos 2B=2-\cos 2C\\ \cos C+\dfrac{1}{2}\cos(A-B)=0\\ \cos^2(A-B)=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}A=B=30^o\\ C=120^o\end{cases}$$

Bài 2: Cho tam giác ABC. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$M=\frac{\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C}{\cos^2 A+\cos^2 B+\cos^2 C}$$

Giải: Ta có :

$$M=\frac{3-(\cos^2 A+\cos^2 B+\cos^2 C)}{\cos^2 A+\cos^2 B+\cos^2 C}=\frac{3}{\cos^2 A+\cos^2 B+\cos^2 C}-1$$

Mà theo bất đẳng thức cơ bản, ta có :

$$\cos^2 A+\cos^2 B+\cos^2 C\geq\frac{3}{4}$$

Do đó,

$$M\leq 3$$

Vậy

$$\max M=3\Leftrightarrow \text{tam giác ABC đều}$$

Bài 3: Cho tam giác ABC có các góc thỏa mãn $C\leq B\leq A\leq 90^o$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$A=\cos\frac{A-B}{2}\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}$$

(ĐH Kiến Trúc Hà Nội 1999)

Giải: Ta có :

$$A=\frac{1}{2}\cos\frac{A-B}{2}\left(\cos\frac{A-B}{2}-\cos\frac{A+B}{2}\right)=\frac{1}{2}\left(\cos^2\frac{A-B}{2}-\cos\frac{A-B}{2}\cos\frac{A+B}{2}\right)$$
$$=\frac{1}{4}[1+\cos(A-B)-(\cos A+\cos B)]$$

Mặt khác,

$$\sin C\cos(A-B)=\sin(A+B)\cos(A-B)=\frac{1}{2}(\sin 2A+\sin 2B)$$
$$=\sin A\cos A+\sin B\cos B$$
$$\Rightarrow\cos(A-B)=\frac{\sin A}{\sin C}.\cos A+\frac{\sin B}{\sin C}.\cos B$$

Theo giả thiết :

$$C\leq B\leq A\leq 90^o$$
$$\Rightarrow\begin{cases}\sin A\geq\sin B\geq\sin C>0\\ \cos A\geq 0,\cos B\geq 0\end{cases}$$
$$\Rightarrow\frac{\sin A}{\sin C}\geq\frac{\sin B}{\sin C}\geq 1$$

Do đó,

$$\cos(A-B)\geq\cos A+\cos B$$

Suy ra

$$\mathrm{N} \geq \frac{1}{4}$$

Vậy

$$\min \mathrm{N} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{c}\text{Tam giác ABC đều} \\ \text{Tam giác ABC vuông cân tại A}\end{array}\right.$$

<u>Bài 4:</u> Cho tam giác ABC nhọn. Đặt $\mathrm{T} = \min\{\tan \mathrm{A}\,; \tan \mathrm{B}\,; \cot \mathrm{A} + \cot \mathrm{B}\}$. Tìm giá trị lớn nhất của T.

<u>Giải:</u> Ta đặt

$$\begin{cases} a = \tan \mathrm{A} \\ b = \tan \mathrm{B} \end{cases} (a; b > 0)$$

Không mất tính tổng quát; giả sử $a \geq b$. Do đó,

$$\mathrm{T} = \min\left\{b; \frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right\}$$

Nếu

$$\mathrm{T} = \min\left\{b; \frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right\} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \Rightarrow \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \leq b$$

Mà

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \leq \frac{2}{b}$$

- $b \geq \sqrt{2}$ thì

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \leq \frac{2}{b} \leq \sqrt{2}$$

- $b \leq \sqrt{2}$ thì

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \leq b \leq \sqrt{2}$$

Tóm lại,

$$\mathrm{T} = \min\left\{b; \frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right\} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \leq \sqrt{2}$$

Do đó,

$$\max \mathrm{T} = \sqrt{2} \Leftrightarrow a = b = \sqrt{2}$$

Nếu

$$T = \min\left\{b; \frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right\} = b \Rightarrow \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq b$$

Ta có 2 trường hợp

$$\left[\begin{array}{c} \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \leq \sqrt{2} \Rightarrow b \leq \sqrt{2} \\ \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq \sqrt{2} \Rightarrow \frac{2}{b} \geq \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq \sqrt{2} \Rightarrow b \leq \sqrt{2} \end{array}\right.$$

Tóm lại,

$$\max T = \sqrt{2} \Leftrightarrow a = b = \sqrt{2}$$

Bài 5: Cho tam giác ABC nhọn. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$K = \frac{\tan^5 A + \tan^5 B + \tan^5 C}{\tan A + \tan B + \tan C}$$

Giải: Ở bài này, ta sử dụng đẳng thức và bất đẳng thức cơ bản

$$\begin{cases} \tan A + \tan B + \tan C = \tan A \tan B \tan C \\ \tan A + \tan B + \tan C \geq 3\sqrt{3} \end{cases}$$

Do tam giác ABC nhọn nên $\tan A, \tan B, \tan C > 0$. Theo bất đẳng thức Cauchy, ta có :

$$\tan^5 A + \tan^5 B + \tan^5 C \geq 3\sqrt[3]{(\tan A \tan B \tan C)^5}$$

Mặt khác

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{(\tan A \tan B \tan C)^5} &= \tan A \tan B \tan C \sqrt[3]{(\tan A \tan B \tan C)^2} \\ &\geq (\tan A + \tan B + \tan C)\sqrt[3]{\left(3\sqrt{3}\right)^2} = 3(\tan A + \tan B + \tan C) \end{aligned}$$

Do đó,

$$\frac{\tan^5 A + \tan^5 B + \tan^5 C}{\tan A + \tan B + \tan C} \geq 9$$

Vậy

$$\min K = 9 \Leftrightarrow \text{Tam giác ABC đều}$$

Bài 6: Cho tam giác ABC nhọn. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$T = \tan^4 A + \tan^4 B + \tan^4 C$$

Giải: Ở bài này, ta sử dụng đẳng thức và bất đẳng thức cơ bản

$$\begin{cases} \tan A + \tan B + \tan C = \tan A \tan B \tan C \\ \tan A + \tan B + \tan C \geq 3\sqrt{3} \end{cases}$$

Theo bất đẳng thức Cauchy, ta có :

$$\tan A \tan B \tan C = \tan A + \tan B + \tan C \geq 3\sqrt[3]{\tan A \tan B \tan C}$$

$$\Longrightarrow \tan A \tan B \tan C \geq 3\sqrt{3}$$

Lại theo bất đẳng thức Cauchy, ta có :

$$T = \tan^4 A + \tan^4 B + \tan^4 C \geq 3\sqrt[3]{(\tan A \tan B \tan C)^4} \geq 3\sqrt[3]{\left(3\sqrt{3}\right)^4} = 27$$

Do đó,

$$\min T = 27 \Leftrightarrow \text{Tam giác ABC đều}$$

Bài 7: Cho tam giác ABC thỏa mãn hệ thực

$$\cot\frac{A}{2} + 2\cot\frac{B}{2} - 23\cot\frac{C}{2} = 0$$

Tìm giá trị nhỏ nhất của $\cos C$.

(Đề nghị Olympic 30-4, 2006)

Giải: Từ giả thiết ta biến đổi

$$11\left(\cot\frac{B}{2} + \cot\frac{C}{2}\right) + 12\left(\cot\frac{C}{2} + \cot\frac{A}{2}\right) = 13\left(\cot\frac{A}{2} + \cot\frac{B}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow 11.\frac{\sin\left(\frac{B}{2} + \frac{C}{2}\right)}{\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}} + 12.\frac{\sin\left(\frac{C}{2} + \frac{A}{2}\right)}{\sin\frac{C}{2}\sin\frac{A}{2}} = 13.\frac{\sin\left(\frac{A}{2} + \frac{B}{2}\right)}{\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}}$$

$$\Leftrightarrow 11\cos\frac{A}{2}\sin\frac{A}{2} + 12\cos\frac{B}{2}\sin\frac{B}{2} = 13\cos\frac{C}{2}\sin\frac{C}{2}$$

$$\Leftrightarrow 11\sin A + 12\sin B = 13\sin C$$

Theo định lý hàm số sin, ta được

$$11a + 12b = 13c$$

$$\Leftrightarrow (11a + 12b)^2 = 169c^2$$

Theo định lý hàm số cos, ta được

$$121a^2 + 144b^2 + 2.132ab = 169(a^2 + b^2 - 2ab\cos C)$$

$$\Leftrightarrow 2ab(132 + 169\cos C) = 48a^2 + 25b^2$$

Theo bất đẳng thức Cauchy, ta có :

$$48a^2 + 25b^2 \geq 40\sqrt{3}ab$$

Do đó,

$$\cos C \geq \frac{20\sqrt{3} - 132}{169}$$

Vậy

$$\min\cos C = \frac{20\sqrt{3} - 132}{169} \Leftrightarrow 4\sqrt{3}a = 5b$$

<u>Bài 8:</u> Cho tam giác ABC, tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = \frac{\sqrt{3}\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}}{4\sqrt{1 + \frac{5}{\sin\frac{C}{2}}} - 1}$$

(Đề nghị Olympic 30-4, 2007)

<u>Giải:</u> Theo bất đẳng thức Bunyakovsky, ta có :

$$\frac{1}{\sqrt{3}}.1+\sqrt{5}.\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{\sin\frac{C}{2}}}\le\frac{4}{\sqrt{3}}\sqrt{1+\frac{5}{\sin\frac{C}{2}}}$$

$$\Rightarrow\frac{5}{\sqrt{\sin\frac{C}{2}}}\le\frac{1}{\sqrt{3}}\left(4.\sqrt{1+\frac{5}{\sin\frac{C}{2}}}-1\right)\Rightarrow\frac{\sqrt{3}}{4\sqrt{1+\frac{5}{\sin\frac{C}{2}}}-1}\le\frac{\sqrt{\sin\frac{C}{2}}}{5}$$

$$\Rightarrow P\le\frac{1}{5}\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sqrt{\sin\frac{C}{2}}=\frac{1}{10}\left(\cos\frac{A-B}{2}-\sin\frac{C}{2}\right)\sqrt{\sin\frac{C}{2}}\le\frac{1}{10}\left(1-\sin\frac{C}{2}\right)\sqrt{\sin\frac{C}{2}}$$

$$\Rightarrow 100P^2\le\left(1-\sin\frac{C}{2}\right)^2\sin\frac{C}{2}\le\frac{\left(1-\sin\frac{C}{2}+1-\sin\frac{C}{2}+2\sin\frac{C}{2}\right)^3}{54}=\frac{4}{27}$$

(Theo bất đẳng thức Cauchy)

Do đó,

$$P\le\frac{\sqrt{3}}{45}$$

Vậy

$$\max P=\frac{\sqrt{3}}{45}\Leftrightarrow\begin{cases}A=B\\ \sin\frac{C}{2}=\frac{1}{2}\end{cases}$$

- **BÀI TẬP TỰ LUYỆN**

8.3.1. Cho tam giác ABC nhọn, tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$\mathrm{A}=\frac{\sqrt{\tan^8 \mathrm{A}+\tan^8 \mathrm{B}+\tan^8 \mathrm{C}}}{\tan \mathrm{A} \tan \mathrm{B} \tan \mathrm{C}}$$

8.3.2. Cho tam giác ABC, tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$\mathrm{B}=\frac{2p-a}{2p+a}+\frac{2p-b}{2p+b}+\frac{2p-c}{2p+c}$$

8.3.3. Cho tam giác ABC, tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$\mathrm{C}=\sqrt{1+\tan\frac{\mathrm{A}}{2}\tan\frac{\mathrm{B}}{2}}+\sqrt{1+\tan\frac{\mathrm{B}}{2}\tan\frac{\mathrm{C}}{2}}+\sqrt{1+\tan\frac{\mathrm{C}}{2}\tan\frac{\mathrm{A}}{2}}$$

8.3.4. Cho tam giác ABC, tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$\mathrm{D}=\sin^2 \mathrm{A}+\sin^2 \mathrm{B}-\sin^2 \mathrm{C}$$

8.3.5. Cho tam giác ABC có diện tích S, các cạnh $a=\mathrm{BC}, b=\mathrm{CA}, c=\mathrm{AB}$ và tam giác $\mathrm{A_1B_1C_1}$ có diện tích S_1, các cạnh $a_1=\mathrm{B_1C_1}, b_1=\mathrm{C_1A_1}, c_1=\mathrm{A_1B_1}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$\mathrm{E}=\frac{a^2(b_1^2+c_1^2-a_1^2)+b^2(c_1^2+a_1^2-b_1^2)+c^2(a_1^2+b_1^2-c_1^2)}{SS_1}$$

8.3.6. Cho tam giác ABC có các góc thỏa mãn điều kiện $\max\{\mathrm{A},\mathrm{B},\mathrm{C}\}\geq 90^{\mathrm{o}}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$\mathrm{F}=\frac{\cos\frac{\mathrm{A}-\mathrm{B}}{2}\cos\frac{\mathrm{B}-\mathrm{C}}{2}\cos\frac{\mathrm{C}-\mathrm{A}}{2}}{\sin\frac{\mathrm{A}}{2}\sin\frac{\mathrm{B}}{2}\sin\frac{\mathrm{C}}{2}}$$

8.3.7. Cho tam giác ABC. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$\mathrm{G}=\frac{a}{p-a}+\frac{b}{p-b}+\frac{c}{p-c}$$

8.3.8. Cho tam giác ABC. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$\mathrm{H}=\frac{\cos^{2002}\mathrm{A}+\cos^{2002}\mathrm{B}+\cos^{2002}\mathrm{C}}{\cos^{2000}\mathrm{A}+\cos^{2000}\mathrm{B}+\cos^{2000}\mathrm{C}}$$

8.3.9. Cho tam giác ABC thỏa điều kiện $\mathrm{A}>B>C$. Tìm giá trị nhỏ nhất của

$$f(x)=\sqrt{\frac{x-\sin\mathrm{A}}{x-\sin\mathrm{C}}}+\sqrt{\frac{x-\sin\mathrm{B}}{x-\sin\mathrm{C}}}-1$$

Từ đó suy ra phương trình sau chỉ có duy nhất một nghiệm

$$\sqrt{x-\sin\mathrm{A}}+\sqrt{x-\sin\mathrm{B}}=\sqrt{x-\sin\mathrm{C}}$$

- **GỢI Ý GIẢI BÀI TẬP TỰ LUYỆN**

8.3.1. $\min \mathrm{A} = 3$

8.3.2. Ta biến đổi

$$\mathrm{B} = \frac{b+c}{(a+b)+(a+c)} + \frac{a+c}{(a+b)+(b+c)} + \frac{a+b}{(a+c)+(b+c)}$$

Ta được,

$$\min \mathrm{B} = \frac{3}{2}$$

8.3.3. $\max \mathrm{C} = 2\sqrt{3}$

8.3.4. Ta biến đổi

$$\mathrm{D} = \left[\cos \mathrm{C} + \frac{1}{2}\cos(\mathrm{A}-\mathrm{B})\right]^2 - \frac{1}{4}\cos^2(\mathrm{A}-\mathrm{B}) \geq -\frac{1}{4}$$

Ta được,

$$\min \mathrm{D} = -\frac{1}{4}$$

8.3.5. Theo định lý hàm số cos, ta có :

$$\begin{cases} a^2(b_1^2+c_1^2-a_1^2) = (b^2+c^2-2bc\cos \mathrm{A})2b_1c_1\cos \mathrm{A}_1 \\ b^2(c_1^2+a_1^2-b_1^2) = b^2(2c_1^2-2b_1c_1\cos \mathrm{A}_1) \\ c^2(a_1^2+b_1^2-c_1^2) = c^2(2b_1^2-2b_1c_1\cos \mathrm{A}_1) \end{cases}$$

$$\Longrightarrow a^2(b_1^2+c_1^2-a_1^2) + b^2(c_1^2+a_1^2-b_1^2) + c^2(a_1^2+b_1^2-c_1^2)$$
$$= 2(b^2c_1^2+c^2b_1^2) - 4bcb_1c_1\cos \mathrm{A}\cos \mathrm{A}_1$$

Mặt khác, theo bất đẳng thức Cauchy, ta có :

$$\begin{aligned} &2(b^2c_1^2+c^2b_1^2) - 4bcb_1c_1\cos \mathrm{A}\cos \mathrm{A}_1 \\ &\geq 4bcb_1c_1 - 4[bcb_1c_1(\cos(\mathrm{A}-\mathrm{A}_1) - \sin \mathrm{A}\sin \mathrm{A}_1)] \\ &= 4bcb_1c_1[1-\cos(\mathrm{A}-\mathrm{A}_1)] + 16SS_1 \geq 16SS_1 \end{aligned}$$

Do đó,

$$\min \mathrm{E} = 16 \Leftrightarrow \text{Tam giác ABC và } \mathrm{A}_1\mathrm{B}_1\mathrm{C}_1 \text{ đồng dạng}$$

8.3.6. Ta biến đổi

$$\mathrm{F} = \frac{(\sin \mathrm{A} + \sin \mathrm{B})(\sin \mathrm{B} + \sin \mathrm{C})(\sin \mathrm{C} + \sin \mathrm{A})}{\sin \mathrm{A}\sin \mathrm{B}\sin \mathrm{C}}$$

Theo định lý hàm số sin, ta có :

$$\mathrm{F} = \frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{abc}$$

Không mất tính tổng quát, giả sử $c = \max\{a,b,c\}$

Theo định lý hàm số cos và bất đẳng thức Cauchy, ta có :

$$c^2 = a^2+b^2-2ab\cos \mathrm{C} \geq a^2+b^2 \geq 2ab$$
$$\Longrightarrow \sqrt{ab} \leq \frac{c}{\sqrt{2}}$$

Mặt khác,

$$\mathrm{F} = 2 + \left(\frac{b}{a} + \frac{a}{b}\right) + \left(\frac{a+b}{c} + \frac{c}{a} + \frac{c}{b}\right) \geq 2 + 2\sqrt{\frac{a}{b}.\frac{b}{a}} + 3\sqrt[3]{\frac{a+b}{c}.\frac{c}{a}.\frac{c}{b}} \geq 4 + 3\sqrt[3]{\frac{2c\sqrt{ab}}{ab}}$$
$$\geq 4 + 3\sqrt{2}$$

Do đó,

$$\min \mathrm{F} = 4 + 3\sqrt{2} \Leftrightarrow \text{Tam giác ABC vuông cân}$$

8.3.7. Theo bất đẳng thức Cauchy, ta có :

$$\frac{a}{p-a} + \frac{b}{p-b} \geq 2\sqrt{\frac{ab}{(p-a)(p-b)}}$$

Mà

$$\sqrt{(p-a)(p-b)} \leq \frac{2p-(a+b)}{2} = \frac{c}{2}$$
$$\Rightarrow \frac{a}{p-a} + \frac{b}{p-b} \geq \frac{4\sqrt{ab}}{c}$$

Tương tự, ta được

$$\begin{cases} \dfrac{b}{p-b} + \dfrac{c}{p-c} \geq \dfrac{4\sqrt{bc}}{a} \\ \dfrac{c}{p-c} + \dfrac{a}{p-a} \geq \dfrac{4\sqrt{ca}}{b} \end{cases}$$
$$\Rightarrow \mathrm{G} \geq 2\left(\frac{\sqrt{ab}}{c} + \frac{\sqrt{bc}}{a} + \frac{\sqrt{ca}}{b}\right) \geq 6$$

Do đó,

$$\min \mathrm{G} = 6$$

8.3.8. Ta chứng minh bất đẳng thức sau :

Cho n, k là các số nguyên dương và các số thực $a_1, a_2, \dots, a_k$ thỏa mãn

$$a_1 + a_2 + \ \dots + a_k \geq k$$

Thì

$$a_1^{n+1} + a_2^{n+1} + \ \dots + a_k^{n+1} \geq a_1^n + a_2^n + \ \dots + a_k^n$$

Ta đi từ

$$(a_1^n - 1)(a - 1) \geq 0 \Leftrightarrow a_1^{n+1} - a_1^n \geq a_1 - 1$$

Áp dụng bất đẳng thức trên cho

$$a_1 = (2\cos \mathrm{A})^2, a_2 = (2\cos \mathrm{B})^2, a_3 = (2\cos \mathrm{C})^2, n = 1000$$

$$\Longrightarrow [(2\cos A)^2]^{1000} + [(2\cos B)^2]^{1000} + [(2\cos C)^2]^{1000}$$
$$\leq [(2\cos A)^2]^{1001} + [(2\cos B)^2]^{1001} + [(2\cos C)^2]^{1001}$$
$$\Longrightarrow \frac{\cos^{2002} A + \cos^{2002} B + \cos^{2002} C}{\cos^{2000} A + \cos^{2000} B + \cos^{2000} C} \geq \frac{2^{2000}}{2^{2002}} = \frac{1}{4}$$

Do đó,

$$\min H = \frac{1}{4}$$

8.3.9. Do $A > B > C$ nên $\sin A > \sin B > \sin C$

MXĐ: $D = (-\infty, \sin C) \cup (\sin A\,, +\infty)$

Ta có :

$$f'(x) = \frac{\sin A - \sin C}{2(x - \sin C)^2} . \sqrt{\frac{x - \sin C}{x - \sin A}} + \frac{\sin B - \sin C}{2(x - \sin C)^2} . \sqrt{\frac{x - \sin C}{x - \sin B}} > 0$$

Ta xét bảng biến thiên và dựa vào đó, ta có :

$$\min f(x) = f(\sin A) = \sqrt{\frac{\sin A - \sin B}{\sin A - \sin C}} - 1$$

Ta xét phương trình $\sqrt{x - \sin A} + \sqrt{x - \sin B} = \sqrt{x - \sin C}$ có MXĐ: $[\sin A\,, +\infty)$

$$\sqrt{\frac{x - \sin A}{x - \sin C}} + \sqrt{\frac{x - \sin B}{x - \sin C}} - 1 = 0$$
$$\Leftrightarrow f(x) = 0$$

Với điều kiện $x \geq \sin A$. Cũng từ bảng biến thiên của $f(x)$ ta suy ra phương trình có nghiệm duy nhất.

CHƯƠNG 9
PHƯƠNG PHÁP LƯỢNG GIÁC HÓA ĐỂ GIẢI MỘT SỐ BÀI TOÁN ĐẠI SỐ

I. TÓM TẮT MỘT SỐ KỸ THUẬT THƯỜNG DÙNG

1. Nếu $|x| \le a\ (a \ge 0)$, ta đặt $\left[\begin{array}{l} x = a\sin t, t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \\ x = a\cos t, t \in [0; \pi] \end{array}\right.$

$-$Nếu $0 \le x \le a$, ta đặt $\left[\begin{array}{l} x = a\sin t, t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right] \\ x = a\cos t, t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right] \end{array}\right.$

$-$Nếu $-a \le x \le 0$, ta đặt $\left[\begin{array}{l} x = a\sin t, t \in \left[-\frac{\pi}{2}; 0\right] \\ x = a\cos t, t \in \left[\frac{\pi}{2}; \pi\right] \end{array}\right.$

2. Nếu $|x| \ge a\ (a \ge 0)$, ta đặt $\left[\begin{array}{l} x = \frac{a}{\sin t}, t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \backslash \{0\} \\ x = \frac{a}{\cos t}, t \in [0; \pi] \backslash \left\{\frac{\pi}{2}\right\} \end{array}\right.$

$-$Nếu $x \ge a \ge 0$, ta đặt $\left[\begin{array}{l} x = \frac{a}{\sin t}, t \in (0; \pi) \\ x = \frac{a}{\cos t}, t \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right) \end{array}\right.$

$-$Nếu $x \le -a \le 0$, ta đặt $\left[\begin{array}{l} x = \frac{a}{\sin t}, t \in (-\pi; 0) \\ x = \frac{a}{\cos t}, t \in \left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right) \end{array}\right.$

3. Nếu x không bị ràng buộc $(x \in \mathbb{R})$, ta đặt $\left[\begin{array}{l} x = \tan t, t \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right) \\ x = \cot t, t \in (0; \pi) \end{array}\right.$

$-$Nếu $x \ge 0$, ta đặt $\left[\begin{array}{l} x = \tan t, t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right) \\ x = \cot t, t \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right] \end{array}\right.$

$-$Nếu $x \le 0$, ta đặt $\left[\begin{array}{l} x = \tan t\,, t \in \left(-\dfrac{\pi}{2}; 0\right] \\ x = \cot t\,, t \in \left[\dfrac{\pi}{2}; \pi\right) \end{array}\right.$

4. Nếu $\dfrac{(x-\alpha)^2}{a^2} + \dfrac{(y-\beta)^2}{b^2} = R^2\ (a, b, R > 0)$,

$$\text{ta đặt } \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = \alpha + aR\sin t \\ y = \beta + bR\cos t \end{cases}, t \in [0; 2\pi] \\ \begin{cases} x = \alpha + aR\cos t \\ y = \beta + bR\sin t \end{cases}, t \in [0; 2\pi] \end{array}\right.$$

5. Nếu trong bài có biểu thức $(ax)^2 + b^2\ (a, b > 0)$,

$$\text{ta đặt } \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{b}{a}\tan t\,, t \in \left(-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right) \\ x = \dfrac{b}{a}\cot t\,, t \in (0; \pi) \end{array}\right.$$

6. Nếu trong bài có biểu thức $\left[\begin{array}{l} \sqrt{\dfrac{a+x}{a-x}}, \text{ta đặt } x = a\cos 2t\,, t \in (0; \pi) \\ \sqrt{\dfrac{a-x}{a+x}}, \text{ta đặt } x = a\cos 2t\,, t \in [0; \pi] \backslash \left\{\dfrac{\pi}{2}\right\} \end{array}\right.$

7. Nếu trong bài có biểu thức $\sqrt{(x-a)(b-x)}$,

$$\text{ta đặt } x = a + (b-a)\sin^2 t\,, t \in [0; \pi]$$

8. Nếu trong bài có biểu thức $\left[\begin{array}{l} \dfrac{x+y}{1-xy} \\ \dfrac{x-y}{1+xy} \\ \dfrac{2x}{1+x^2} \\ \dfrac{2x}{1-x^2} \\ \dfrac{1-x^2}{1+x^2} \\ \dfrac{3x-x^3}{1-3x^2} \\ \dots \end{array}\right.$, ta đặt $\begin{cases} x = \tan\alpha \\ y = \tan\beta \end{cases} \left(\alpha, \beta \in \left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)\right)$

II. PHƯƠNG PHÁP LƯỢNG GIÁC HÓA TRONG CHỨNG MINH ĐẲNG THỨC ĐẠI SỐ

- Phương pháp lượng giác hóa với mục đích thay đổi hình thức của bài toán từ việc phải chứng minh đẳng thức đại số thành việc chứng minh đẳng thức lượng giác.
- Trong phần này, các bạn cần xem lại chương 2 để nắm được một số cách biến đổi lượng giác.

Bài 1: Cho $\begin{cases} x,y,z>0 \\ xy+yz+zx=1 \end{cases}$. Chứng minh rằng

$$x\sqrt{\frac{(1+y^2)(1+z^2)}{1+x^2}}+y\sqrt{\frac{(1+z^2)(1+x^2)}{1+y^2}}+z\sqrt{\frac{(1+x^2)(1+y^2)}{1+z^2}}=2$$

Giải: Ta đặt

$$\begin{cases} x=\tan\alpha \\ y=\tan\beta \\ z=\tan\gamma \end{cases}\left(\alpha,\beta,\gamma\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)\right)$$

Do $xy+yz+zx$ nên ta có thể suy ra rằng

$$\alpha+\beta+\gamma=\frac{\pi}{2}$$

Khi đó,

$$x\sqrt{\frac{(1+y^2)(1+z^2)}{1+x^2}}=\tan\alpha\sqrt{\frac{(1+\tan^2\beta)(1+\tan^2\gamma)}{1+\tan^2\alpha}}=\tan\alpha\sqrt{\frac{\frac{1}{\cos^2\beta}\cdot\frac{1}{\cos^2\gamma}}{\frac{1}{\cos^2\alpha}}}$$

$$=\frac{\sin\alpha}{\cos\beta\cos\gamma}=\frac{\cos(\beta+\gamma)}{\cos\beta\cos\gamma}=1-\tan\beta\tan\gamma$$

Tương tự vậy, ta có :

$$\begin{cases} y\sqrt{\dfrac{(1+z^2)(1+x^2)}{1+y^2}}=1-\tan\gamma\tan\alpha \\ z\sqrt{\dfrac{(1+x^2)(1+y^2)}{1+z^2}}=1-\tan\alpha\tan\beta \end{cases}$$

Do đó,

$$x\sqrt{\frac{(1+y^2)(1+z^2)}{1+x^2}}+y\sqrt{\frac{(1+z^2)(1+x^2)}{1+y^2}}+z\sqrt{\frac{(1+x^2)(1+y^2)}{1+z^2}}$$
$$=3-(\tan\alpha\tan\beta+\tan\beta\tan\gamma+\tan\gamma\tan\alpha)=2$$

Bài 2: Cho $\begin{cases} 0<a,b,c<1 \\ a^2+b^2+c^2+2abc=1 \end{cases}$. Chứng minh rằng

$$abc+1=c\sqrt{(1-a^2)(1-b^2)}+a\sqrt{(1-b^2)(1-c^2)}+b\sqrt{(1-c^2)(1-a^2)}$$

Giải: Ta đặt

$$\begin{cases} a=\cos\alpha \\ b=\cos\beta \\ c=\cos\gamma \end{cases}\left(\alpha,\beta,\gamma\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)\right)$$

Khi đó,

$$a^2+b^2+c^2+2abc=1$$
$$\Leftrightarrow \cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma+2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma=1$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}(1+\cos 2\alpha)+\frac{1}{2}(1+\cos\beta)+\cos^2\gamma+[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)]\cos\gamma=1$$
$$\Leftrightarrow \cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)+\cos^2\gamma+\cos(\alpha+\beta)\cos\gamma+\cos(\alpha-\beta)\cos\gamma=0$$
$$\Leftrightarrow [\cos(\alpha+\beta)+\cos\gamma][\cos(\alpha-\beta)+\cos\gamma]=0$$
$$\Leftrightarrow \cos(\alpha+\beta)+\cos\gamma=0$$
$$\Leftrightarrow \alpha+\beta+\gamma=\pi$$

Do đó, đẳng thức cần chứng minh đưa về dạng

$$\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma+1$$
$$=\cos\gamma\sqrt{(1-\cos^2\alpha)(1-\cos^2\beta)}+\cos\alpha\sqrt{(1-\cos^2\beta)(1-\cos^2\gamma)}$$
$$+\cos\beta\sqrt{(1-\cos^2\gamma)(1-\cos^2\alpha)}$$
$$\Leftrightarrow \cos\alpha\cos\beta\cos\gamma+1=\cos\gamma\sin\alpha\sin\beta+\cos\alpha\sin\beta\sin\gamma+\cos\beta\sin\alpha\sin\gamma$$
$$\Leftrightarrow \cos(\alpha+\beta)\cos\gamma-\sin(\alpha+\beta)\sin\gamma+1=0$$
$$\Leftrightarrow \cos(\alpha+\beta+\gamma)+1=0 \text{ (đúng)}$$

Vậy ta có điều phải chứng minh.

Bài 3: Cho các số a,b thỏa mãn $|b|\le|a|$. Chứng minh rằng

$$|a+b|+|a-b|=\left|a+\sqrt{a^2-b^2}\right|+\left|a-\sqrt{a^2-b^2}\right|$$

Giải: Ta xét trường hợp

- Nếu $a = 0$ thì $b = 0$, khi đó đẳng thức cần chứng minh luôn đúng.
- Nếu $a \neq 0$, ta biến đổi đẳng thức cần chứng minh về dạng

$$\left|1 + \frac{b}{a}\right| + \left|1 - \frac{b}{a}\right| = \left|1 + \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}\right| + \left|1 - \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}\right|$$

Khi đó, ta đặt $b = a\cos t\,, t \in [0;\pi]$. Ta được

$$|1 + \cos t| + |1 - \cos t| = |1 + \sin t| + |1 - \sin t|$$

$$\Leftrightarrow 1 + \cos t + 1 - \cos t = 1 + \sin t + 1 - \sin t \text{ (đúng)}$$

Vậy ta có điều phải chứng minh.

Bài 4: Cho $a + b + c - abc = 1 - ab - bc - ca$. Chứng minh rằng

$$\frac{1 - a^2}{a} + \frac{1 - b^2}{b} + \frac{1 - c^2}{c} = \frac{(1 - a^2)(1 - b^2)(1 - c^2)}{4abc}$$

Giải: Ta đặt

$$\begin{cases} a = \tan\alpha \\ b = \tan\beta \\ c = \tan\gamma \end{cases} \left(\alpha, \beta, \gamma \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)\right)$$

Từ giả thiết, ta có :

$$\tan\alpha + \tan\beta + \tan\gamma - \tan\alpha\tan\beta\tan\gamma = 1 - \tan\alpha\tan\beta - \tan\beta\tan\gamma - \tan\gamma\tan\alpha$$

Ta xét trường hợp

- Nếu $1 - \tan\alpha\tan\beta - \tan\beta\tan\gamma - \tan\gamma\tan\alpha = 0$, ta được

$$\begin{cases} \tan\alpha\tan\beta + \tan\beta\tan\gamma + \tan\gamma\tan\alpha = 1 \\ \tan\alpha + \tan\beta + \tan\gamma = \tan\alpha\tan\beta\tan\gamma \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = \dfrac{\pi}{2} + k\pi \\ \alpha + \beta + \gamma = l\pi \end{cases} (k, l \in \mathbb{Z})$$

Điều này mâu thuẫn.

- Nếu $1 - \tan\alpha\tan\beta - \tan\beta\tan\gamma - \tan\gamma\tan\alpha \neq 0$, giả thiết tương đương với

$$\frac{\tan\alpha + \tan\beta + \tan\gamma - \tan\alpha\tan\beta\tan\gamma}{1 - \tan\alpha\tan\beta - \tan\beta\tan\gamma - \tan\gamma\tan\alpha} = 1$$

$$\Leftrightarrow \tan(\alpha + \beta + \gamma) = 1$$

$$\Leftrightarrow \alpha + \beta + \gamma = \frac{\pi}{4} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$$

$$\Leftrightarrow 2\alpha + 2\beta + 2\gamma = \frac{\pi}{2} + l\pi (l \in \mathbb{Z})$$

$$\Leftrightarrow \tan 2\alpha \tan 2\beta + \tan 2\beta \tan 2\gamma + \tan 2\gamma \tan 2\alpha = 1$$

$$\Leftrightarrow \cot 2\alpha + \cot 2\beta + \cot 2\gamma = \cot 2\alpha \cot 2\beta \cot 2\gamma \ \ (*)$$

Mặt khác, ta có :

$$\begin{cases} \cot 2\alpha = \dfrac{\cot\alpha - \tan\alpha}{2} = \dfrac{1-a^2}{2a} \\ \cot 2\beta = \dfrac{1-b^2}{2b} \\ \cos 2\gamma = \dfrac{1-c^2}{2c} \end{cases}$$

Thay vào $(*)$, ta có được đẳng thức cần chứng minh.

<u>Bài 5:</u> Giả sử x_1, x_2, x_3 là nghiệm của phương trình $x^3 + ax^2 + x + b = 0$ $(b \neq 0)$. Chứng minh rằng

$$\left(x_1 - \frac{1}{x_1}\right)\left(x_2 - \frac{1}{x_2}\right) + \left(x_2 - \frac{1}{x_2}\right)\left(x_3 - \frac{1}{x_3}\right) + \left(x_3 - \frac{1}{x_3}\right)\left(x_1 - \frac{1}{x_1}\right) = 4$$

<u>Giải:</u> Từ giả thiết, ta có :

$$\begin{cases} x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = 1 \\ x_1, x_2, x_3 \neq 0 \end{cases}$$

Ta đặt

$$\begin{cases} x_1 = \tan\alpha \\ x_2 = \tan\beta \\ x_3 = \tan\gamma \end{cases} \left(\alpha, \beta, \gamma \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)\right)$$

Do đó,

$$\tan\alpha\tan\beta + \tan\beta\tan\gamma + \tan\gamma\tan\alpha = 1$$
$$\Leftrightarrow \alpha + \beta + \gamma = \frac{\pi}{2} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$$

Mặt khác, điều cần chứng minh tương đương với

$$(\tan\alpha - \cot\alpha)(\tan\beta - \cot\beta) + (\tan\beta - \cot\beta)(\tan\gamma - \cot\gamma)$$
$$+ (\tan\gamma - \cot\gamma)(\tan\alpha - \cot\alpha) = 4$$
$$\Leftrightarrow \cot 2\alpha \cot 2\beta + \cot 2\beta \cot 2\gamma + \cot 2\gamma \cot 2\alpha = 1$$
$$\Leftrightarrow 2\alpha + 2\beta + 2\gamma = \pi + k2\pi \text{ (đúng)}$$

Vậy ta có điều phải chứng minh.

- **BÀI TẬP TỰ LUYỆN**

9.1.1. Cho $\begin{cases} a+b+c=abc \\ ab+bc+ca\neq 1 \end{cases}$. Chứng minh rằng

$$abc=\frac{a(b^2+c^2)+b(c^2+a^2)+c(a^2+b^2)}{ab+bc+ca-1}$$

9.1.2. Cho $ab+bc+ca=1$. Chứng minh rằng

$$4abc=a(1-b^2)(1-c^2)+b(1-c^2)(1-a^2)+c(1-a^2)(1-b^2)$$

9.1.3. Cho $a+b+c=abc$. Chứng minh rằng

$$\frac{3a-a^3}{1-3a^2}+\frac{3b-b^3}{1-3b^2}+\frac{3c-c^3}{1-3c^2}=\frac{3a-a^3}{1-3a^2}.\frac{3b-b^3}{1-3b^2}.\frac{3c-c^3}{1-3c^2}$$

9.1.4. Cho $ab+bc+ca=1$. Chứng minh rằng

$$a+b+c-3abc=a(b^2+c^2)+b(c^2+a^2)+c(a^2+b^2)$$

9.1.5.

Cho $\begin{cases} \dfrac{1+x}{1-x}+\dfrac{1+y}{1-y}+\dfrac{1+z}{1-z}=\dfrac{1+x}{1-x}.\dfrac{1+y}{1-y}.\dfrac{1+z}{1-z} \\ x,y,z\neq 1 \end{cases}$

Chứng minh rằng

$$x+y+z+xy+yz+zx=1+xyz$$

III. PHƯƠNG PHÁP LƯỢNG GIÁC HÓA TRONG CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC

- Ở dạng này, ta cũng sẽ chuyển về dạng bất đẳng thức hàm lượng giác. Tuy nhiên, cần chú ý rằng bất đẳng thức hàm lượng giác này sẽ khác đôi chút so với bất đẳng thức hệ thức lượng trong tam giác đã được đề cập ở chương 3. Nhưng các bạn vẫn phải xem lại các bất đẳng thức Cauchy, Bunyakovsky, Jensen… Ngoài ra, kết hợp các phương pháp tìm cực trị hàm lượng giác đã nêu ở chương 8 để có thể nhanh chóng tiếp cận phương pháp này.

Bài 1: Chứng minh rằng với mọi $x,y,z\in\mathbb{R}$

$$\frac{|x-y|}{\sqrt{2008+2007x^2}.\sqrt{2008+2007y^2}}+\frac{|y-z|}{\sqrt{2008+2007y^2}.\sqrt{2008+2007z^2}}\geq\frac{|x-z|}{\sqrt{2008+2007z^2}.\sqrt{2008+2007x^2}}$$

<u>Giải:</u> Ta đặt

$$\begin{cases} x = \sqrt{\dfrac{2008}{2007}} \tan\alpha \\ y = \sqrt{\dfrac{2008}{2007}} \tan\beta \\ z = \sqrt{\dfrac{2008}{2007}} \tan\gamma \end{cases} \left(\alpha, \beta, \gamma \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)\right)$$

Ta có

$$\frac{|x-y|}{\sqrt{2008+2007x^2}.\sqrt{2008+2007y^2}} = \frac{1}{\sqrt{2007}} \cos\alpha\cos\beta\,|\tan\alpha - \tan\beta|$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2007}}|\sin(\alpha-\beta)|$$

Tương tự, ta có :

$$\begin{cases} \dfrac{|y-z|}{\sqrt{2008+2007y^2}.\sqrt{2008+2007z^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2007}}|\sin(\beta-\gamma)| \\ \dfrac{|x-z|}{\sqrt{2008+2007z^2}.\sqrt{2008+2007x^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2007}}|\sin(\gamma-\alpha)| \end{cases}$$

Như vậy, bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$|\sin(\alpha-\beta)| + |\sin(\beta-\gamma)| \geq |\sin(\gamma-\alpha)|$$

Mặt khác,

$$\begin{aligned} |\sin(\gamma-\alpha)| &= |\sin(\alpha-\beta+\beta-\gamma)| \\ &= |\sin(\alpha-\beta)\cos(\beta-\gamma) + \sin(\beta-\gamma)\cos(\alpha-\beta)| \\ &\leq |\sin(\alpha-\beta)\cos(\beta-\gamma)| + |\sin(\beta-\gamma)\cos(\alpha-\beta)| \\ &\leq |\sin(\alpha-\beta)| + |\sin(\beta-\gamma)| \end{aligned}$$

Do đó, ta có điều phải chứng minh.

<u>Bài 2:</u> Chứng minh rằng

$$\left|4\left[a^3 - \sqrt{(1-a^2)^3}\right] - 3\left(a - \sqrt{1-a^2}\right)\right| \leq \sqrt{2}$$

<u>Giải:</u> Điều kiện : $|a| \leq 1$. Ta đặt

$$a = \cos t\,, t \in [0; \pi]$$

Khi đó, bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\left|4\left[\cos^3 t - \sqrt{(1-\cos^2 t)^3}\right] - 3\left(\cos t - \sqrt{1-\cos^2 t}\right)\right| \leq \sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow |4(\cos^3 t - \sin^3 t) - 3(\cos t - \sin t)| \leq \sqrt{2}$$
$$\Leftrightarrow |\cos 3t + \sin 3t| \leq \sqrt{2}$$
$$\Leftrightarrow \left|\cos\left(3t - \frac{\pi}{4}\right)\right| \leq 1 \text{ (đúng)}$$

Vậy ta có điều phải chứng minh.

<u>Bài 3:</u> Cho $\begin{cases} a, b \geq 0 \\ a + b = 1 \end{cases}$. Chứng minh rằng

$$\frac{2}{3} \leq \frac{a}{1+b} + \frac{b}{1+a} \leq 1$$

Khi nào dấu đẳng thức xảy ra?

(ĐH Tổng Hợp Tp.HCM 1996)

<u>Giải:</u> Từ giả thiết, ta đặt

$$\begin{cases} a = \cos^2 t \\ b = \sin^2 t \end{cases} \left(t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]\right)$$

Khi đó,

$$\frac{a}{1+b} + \frac{b}{1+a} = \frac{\cos^2 t}{1 + \sin^2 t} + \frac{\sin^2 t}{1 + \cos^2 t} = \frac{\cos^4 t + \sin^4 t + \sin^2 t + \cos^2 t}{1 + \sin^2 t + \cos^2 t + \sin^2 t \cos^2 t}$$
$$= \frac{2 - \frac{1}{2}\sin^2 2t}{2 + \frac{1}{4}\sin^2 2t} \leq 1$$

Dấu " = " xảy ra khi và chỉ khi $\sin 2t = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a = 0 \\ b = 1 \end{cases} \\ \begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \end{cases} \end{array}\right.$

Mặt khác,

$$\frac{a}{1+b} + \frac{b}{1+a} - \frac{2}{3} = \frac{2 - \frac{1}{2}\sin^2 2t}{2 + \frac{1}{4}\sin^2 2t} - \frac{2}{3} = \frac{2 - 2\sin^2 2t}{3\left(2 + \frac{1}{4}\sin^2 2t\right)} \geq 0$$

Do đó, ta có điều phải chứng minh

Dấu " = " xảy ra khi và chỉ khi

$$\sin 2t = 1 \Leftrightarrow a = b = \frac{1}{2}$$

Bài 4: Cho $|a| \geq 1$. Chứng minh rằng

$$-4 \leq \frac{5 - 12\sqrt{a^2 - 1}}{a^2} \leq 9$$

Giải: Ta đặt

$$|a| = \frac{1}{\cos t}, t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right)$$

Khi đó, bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$-4 \leq \frac{5 - 12\sqrt{\frac{1}{\cos^2 t} - 1}}{\frac{1}{\cos^2 t}} \leq 9$$

$$\Leftrightarrow -\frac{4}{\cos^2 t} \leq 5 - 12\sqrt{\frac{1}{\cos^2 t} - 1} \leq \frac{9}{\cos^2 t}$$

$$\Leftrightarrow -4(\tan^2 t + 1) \leq 5 - 12\tan t \leq 9(\tan^2 t + 1)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4\tan^2 t - 12\tan t + 9 \geq 0 \\ 9\tan^2 t + 12\tan t + 4 \geq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (2\tan t - 3)^2 \geq 0 \\ (3\tan t + 2)^2 \geq 0 \end{cases} \text{ (đúng)}$$

Vậy ta có điều phải chứng minh.

Bài 5: Chứng minh rằng với mọi $x, y \in \mathbb{R}$

$$x^2 + (x - y)^2 \geq 4(x^2 + y^2)\sin^2\frac{\pi}{10}$$

Giải: Ta có

$$\sin^2\frac{\pi}{10} = \frac{3 - \sqrt{5}}{8}$$

Do đó, ta cần chứng minh

$$x^2 + (x - y)^2 \geq \frac{3 - \sqrt{5}}{2}(x^2 + y^2)$$

Ta xét trường hợp

- Nếu $x^2 + y^2 = 0$ thì bất đẳng thức hiển nhiên đúng.
- Nếu $x^2 + y^2 > 0$ thì ta đặt

$$\begin{cases} x = \sqrt{x^2 + y^2}\cos t \\ y = \sqrt{x^2 + y^2}\sin t \end{cases} \quad (t \in [0; 2\pi])$$

Khi đó, bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\cos^2 t + (\cos t - \sin t)^2 \geq \frac{3-\sqrt{5}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \cos 2t - 2\sin 2t \geq -\sqrt{5}$$

Bất đẳng thức trên hiển nhiên đúng theo bất đẳng thức Bunyakovsky

$$|\cos 2t - 2\sin 2t| \leq \sqrt{1^2 + (-2)^2} = \sqrt{5}$$

Vậy ta có điều phải chứng minh.

<u>Bài 6:</u> Chứng minh rằng với mọi $a, b \in \mathbb{R}$

a. $-\frac{1}{2} \leq \frac{(a+b)(1-ab)}{(1+a^2)(1+b^2)} \leq \frac{1}{2}$

b. $-\frac{1}{4} \leq \frac{(a^2-b^2)(1-a^2b^2)}{(1+a^2)^2(1+b^2)^2} \leq \frac{1}{4}$

<u>Giải:</u>

a. Ta đặt

$$\begin{cases} a = \tan\alpha \\ b = \tan\beta \end{cases} \left(\alpha, \beta \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)\right)$$

Khi đó,

$$\begin{aligned}\frac{(a+b)(1-ab)}{(1+a^2)(1+b^2)} &= (\tan\alpha + \tan\beta)(1 - \tan\alpha\tan\beta)\cos^2\alpha\cos^2\beta \\ &= \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}(\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta)\cos\alpha\cos\beta \\ &= \sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha+\beta) = \frac{1}{2}\sin 2(\alpha+\beta) \in \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]\end{aligned}$$

b. Tương tự vậy, ta có :

$$\begin{aligned}\frac{(a^2-b^2)(1-a^2b^2)}{(1+a^2)^2(1+b^2)^2} &= (\tan^2\alpha - \tan^2\beta)(1 - \tan^2\alpha\tan^2\beta)\cos^4\alpha\cos^4\beta \\ &= \sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta) \\ &= \frac{1}{4}\sin 2(\alpha+\beta)\sin 2(\alpha-\beta) \in \left[-\frac{1}{4}; \frac{1}{4}\right]\end{aligned}$$

Bài 7: Cho các số dương a, b, c thỏa mãn điều kiện

$$\frac{1}{(a+1)^2}+\frac{1}{(b+1)^2}+\frac{1}{(c+1)^2}+\frac{2}{(a+1)(b+1)(c+1)}=1$$

Chứng minh rằng : $abc \geq 1$

Giải: Từ điều kiện của bài toán, ta suy ra

$$\frac{1}{a+1};\frac{1}{b+1};\frac{1}{c+1}\in(0;1)$$

Do đó, ta có thể chọn 3 góc nhọn $\mathrm{A, B, C}$ sao cho

$$\begin{cases}\cos \mathrm{A}=\dfrac{1}{a+1}\\ \cos \mathrm{B}=\dfrac{1}{b+1}\\ \cos \mathrm{C}=\dfrac{1}{c+1}\end{cases}$$

Thay vào giả thiết, ta được

$$\cos^2 \mathrm{A}+\cos^2 \mathrm{B}+\cos^2 \mathrm{C}+2\cos \mathrm{A}\cos \mathrm{B}\cos \mathrm{C}=1$$

Như ta đã chứng minh ở bài 2, phần II. Ta có

$$\mathrm{A}+\mathrm{B}+\mathrm{C}=\pi$$

Như vậy, $\mathrm{A, B, C}$ là 3 góc của tam giác ABC nhọn. Ta biến đổi

$$\begin{cases}a=\dfrac{1-\cos \mathrm{A}}{\cos \mathrm{A}}\\ b=\dfrac{1-\cos \mathrm{B}}{\cos \mathrm{B}}\\ c=\dfrac{1-\cos \mathrm{C}}{\cos \mathrm{C}}\end{cases}$$

Ta đưa bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$(1-\cos \mathrm{A})(1-\cos \mathrm{B})(1-\cos \mathrm{C})\geq \cos \mathrm{A}\cos \mathrm{B}\cos \mathrm{C}$$

$$\Leftrightarrow \frac{(1-\cos \mathrm{A})}{\sin \mathrm{A}}.\frac{(1-\cos \mathrm{B})}{\sin \mathrm{B}}.\frac{(1-\cos \mathrm{C})}{\sin \mathrm{C}}\geq \cot \mathrm{A}\cot \mathrm{B}\cot \mathrm{C}$$

$$\Leftrightarrow \tan\frac{\mathrm{A}}{2}\tan\frac{\mathrm{B}}{2}\tan\frac{\mathrm{C}}{2}\geq \cot \mathrm{A}\cot \mathrm{B}\cot \mathrm{C}$$

$$\Leftrightarrow \tan \mathrm{A}\tan \mathrm{B}\tan \mathrm{C}\geq \cot\frac{\mathrm{A}}{2}\cot\frac{\mathrm{B}}{2}\cot\frac{\mathrm{C}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \tan \mathrm{A}+\tan \mathrm{B}+\tan \mathrm{C}\geq \cot\frac{\mathrm{A}}{2}+\cot\frac{\mathrm{B}}{2}+\cot\frac{\mathrm{C}}{2}\ \text{(đúng)}$$

Vậy ta có điều phải chứng minh.

Bài 8: Cho x, y thỏa mãn $3x + 4y = 7$. Chứng minh rằng

$$x^2 + y^2 \geq \frac{49}{25}$$

Giải: Ta có

$$7 = 3x + 4y = 5\sqrt{x^2 + y^2}\left(\frac{3}{5}.\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{4}{5}.\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right)$$

Ta thấy

$$\begin{cases} \left(\frac{3}{5}\right)^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^2 = 1 \\ \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right)^2 + \left(\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right)^2 = 1 \end{cases}$$

Do đó, ta đặt

$$\begin{cases} \sin\alpha = \frac{3}{5} \\ \cos\alpha = \frac{4}{5} \end{cases} \left(\alpha \in (0; 2\pi)\right)$$

Và

$$\begin{cases} \sin\beta = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ \cos\beta = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \end{cases} \left(\beta \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]\right)$$

Khi đó,

$$7 = 5\sqrt{x^2 + y^2}\left(\frac{3}{5}.\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{4}{5}.\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right) = 5\sqrt{x^2 + y^2}.\sin(\alpha + \beta) \leq 5\sqrt{x^2 + y^2}$$

Suy ra

$$\sqrt{x^2 + y^2} \geq \frac{7}{5}$$

Hay

$$x^2 + y^2 \geq \frac{49}{25}$$

Vậy ta có điều phải chứng minh.

Bài 9: Cho $a, b \geq 1$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{1+a^2}+\frac{1}{1+b^2} \geq \frac{2}{1+ab}$$

Giải: Ta đặt

$$\begin{cases} a = \tan\alpha \\ b = \tan\beta \end{cases} \left(\alpha, \beta \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)\right)$$

Ta có :

$$ab \geq 1$$
$$\Leftrightarrow \tan\alpha\tan\beta \geq 1$$
$$\Leftrightarrow \cos(\alpha+\beta) \leq 0$$

Khi đó, bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta \geq \frac{2}{1+\tan\alpha\tan\beta}$$
$$\Leftrightarrow \cos^2\alpha + \cos^2\beta \geq \frac{2\cos\alpha\cos\beta}{\cos(\alpha-\beta)}$$
$$\Leftrightarrow \cos(\alpha-\beta)\,[1+\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)] \geq \cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)$$
$$\Leftrightarrow [\cos^2(\alpha-\beta)-1]\cos(\alpha+\beta) \geq 0$$
$$\Leftrightarrow \cos(\alpha+\beta)\sin^2(\alpha-\beta) \leq 0 \text{ (đúng)}$$

Dấu " = " xảy ra khi và chỉ khi

$$\left[\begin{array}{l} \cos(\alpha+\beta)=0 \\ \sin(\alpha-\beta)=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} ab=1 \\ a=b \end{array}\right.$$

Vậy ta có điều phải chứng minh.

Bài 10: Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh rằng

$$(a^2+2)(b^2+2)(c^2+2) \geq 9(ab+bc+ca)$$

(Đề nghị Olympic 30-4, 2010)

Giải: Ta đặt

$$\begin{cases} a = \sqrt{2}\tan x \\ b = \sqrt{2}\tan y \\ c = \sqrt{2}\tan z \end{cases} \left(x, y, z \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)\right)$$

Khi đó, bất đẳng thức cần chứng minh trở thành

$$\cos x\cos y\cos z\,(\cos x\sin y\sin z+\sin x\cos y\sin z+\sin x\sin y\cos z) \leq \frac{4}{9}$$

Ta lại có :

$$\cos(x+y+z) = \cos x\cos y\cos z - \cos x\sin y\sin z - \sin x\cos y\sin z - \sin x\sin y\cos z$$

Do đó, bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\cos x\cos y\cos z\,[\cos x\cos y\cos z - \cos(x+y+z)] \le \frac{4}{9}$$

Theo bất đẳng thức Cauchy và bất đẳng thức Jensen, ta có :

$$\cos x\cos y\cos z \le \left(\frac{\cos x+\cos y+\cos z}{3}\right)^3 \le \cos^3\left(\frac{x+y+z}{3}\right)$$

Khi đó, ta đặt

$$t = \frac{x+y+z}{3}$$

Ta cần chứng minh

$$\cos^3 t\,(\cos^3 t - \cos 3t) \le \frac{4}{9}$$

$$\Leftrightarrow \cos^4 t\,(1-\cos^2 t) \le \frac{4}{27}$$

Thật vậy, theo bất đẳng thức Cauchy, ta có :

$$\cos^4 t\,(1-\cos^2 t) = 4\frac{\cos^2 t}{2}.\frac{\cos^2 t}{2}.(1-\cos^2 t)$$

$$\le 4\left(\frac{\frac{\cos^2 t}{2}+\frac{\cos^2 t}{2}+1-\cos^2 t}{3}\right)^3 = \frac{4}{27}$$

Dấu " = " xảy ra khi và chỉ khi

$$\tan x = \tan y = \tan z = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow a=b=c=1$$

Vậy ta có điều phải chứng minh.

Bài 11: Chứng minh rằng, từ 4 số cho trước ta luôn tìm được 2 số a, b trong 4 số đó sao cho

$$0 \le \frac{b-a}{1+ba} \le 1$$

Giải: Ta có thể giả sử 4 số cho trước là $a \le b \le c \le d$. Khi đó tồn tại x, y, z, t thỏa mãn

$$\begin{cases} -\dfrac{\pi}{2} < x \le y \le z \le t < \dfrac{\pi}{2} \\ a=\tan x\,;\, b=\tan y\,;\, c=\tan z\,;\, d=\tan t \end{cases}$$

Các điểm y, z, t chia $\left[x;\dfrac{\pi}{2}\right]$ thành 4 đoạn bằng nhau

Do đó, trong 4 đoạn này phải có ít nhất một đoạn có độ dài không quá $\frac{\pi}{4}$.

Vì $\tan(x+\pi)=\tan x$ và vai trò 4 đoạn này như nhau, nên ta có thể chọn

$$0 \le y - x \le \frac{\pi}{4}$$
$$\Rightarrow 0 \le \tan(y-x) \le 1$$
$$\Rightarrow 0 \le \frac{\tan y - \tan x}{1+\tan y \tan x} \le 1$$
$$\Rightarrow 0 \le \frac{b-a}{1+ba} \le 1$$

Vậy ta có điều phải chứng minh.

<u>Bài 12:</u> Cho x, y thỏa mãn

$$14xy + 23x^2 - 25x^2 - 24 = 0$$

Chứng minh rằng : $x^2 + y^2 \ge 1$

<u>Giải:</u> Ta đặt

$$\begin{cases} x = a\sin t \\ y = a\cos t \end{cases} (t \in [0; 2\pi])$$

Khi đó, ta cần chứng minh : $a^2 \ge 1$

Và giả thiết tương đương với

$$14a^2 \sin t \cos t + 23a^2 \sin^2 t - 25a^2 \cos^2 t - 24 = 0$$
$$\Leftrightarrow a^2(7\sin 2t - 24\cos 2t - 1) = 24$$

Ta thấy :

$$7\sin 2t - 24\cos 2t - 1 \le \sqrt{[7^2 + (-24)^2](\sin^2 2t + \cos^2 2t)} - 1 = 24$$

Do đó,

$$24a^2 \ge a^2(7\sin 2t - 24\cos 2t - 1) = 24$$

Suy ra

$$a^2 \ge 1$$

Vậy ta có điều phải chứng minh.

<u>Bài 13:</u> Cho $\begin{cases} x, y, z > 0 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$. Chứng minh rằng

$$\frac{x}{x+yz} + \frac{y}{y+zx} + \frac{z}{z+xy} \le \frac{9}{4}$$

Giải: Ta đặt

$$\begin{cases} \sqrt{\dfrac{yz}{x}} = \tan\dfrac{\alpha}{2} \\ \sqrt{\dfrac{zx}{y}} = \tan\dfrac{\beta}{2} \\ \sqrt{\dfrac{xy}{z}} = \tan\dfrac{\gamma}{2} \end{cases} \left(\alpha, \beta, \gamma \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)\right)$$

Do

$$\sqrt{\frac{yz}{x}}.\sqrt{\frac{zx}{y}} + \sqrt{\frac{zx}{y}}.\sqrt{\frac{xy}{z}} + \sqrt{\frac{xy}{z}}.\sqrt{\frac{yz}{x}} = 1$$

Nên

$$\tan\frac{\alpha}{2}\tan\frac{\beta}{2} + \tan\frac{\beta}{2}\tan\frac{\gamma}{2} + \tan\frac{\gamma}{2}\tan\frac{\alpha}{2} = 1$$

Do đó, α, β, γ là 3 góc của một tam giác nhọn.
Ta đưa bất đẳng thức cần chứng minh thành

$$\frac{1}{1+\tan^2\frac{\alpha}{2}} + \frac{1}{1+\tan^2\frac{\beta}{2}} + \frac{1}{1+\tan^2\frac{\gamma}{2}} \le \frac{9}{4}$$

$$\Leftrightarrow \cos^2\frac{\alpha}{2} + \cos^2\frac{\beta}{2} + \cos^2\frac{\gamma}{2} \le \frac{9}{4}$$

Đây là bất đẳng thức cơ bản trong tam giác.
Vậy ta có điều phải chứng minh.

Bài 14: Cho $a, b, c > 0$ thỏa mãn $ab + bc + ca = 1$. Chứng minh rằng

$$\frac{a}{1+a^2} + \frac{b}{1+b^2} + \frac{3c}{\sqrt{1+c^2}} \le \sqrt{10}$$

Giải: Tương tự ở các câu trên, với $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}$ là 3 góc của tam giác ABC, ta đặt

$$\begin{cases} a = \tan\dfrac{\mathrm{A}}{2} \\ b = \tan\dfrac{\mathrm{B}}{2} \\ c = \tan\dfrac{\mathrm{C}}{2} \end{cases}$$

Khi đó, bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\frac{\tan\frac{A}{2}}{1+\tan^2\frac{A}{2}}+\frac{\tan\frac{B}{2}}{1+\tan^2\frac{B}{2}}+\frac{3\tan\frac{C}{2}}{\sqrt{1+\tan^2\frac{C}{2}}}\le\sqrt{10}$$

$$\Leftrightarrow \sin A+\sin B+6\sin\frac{C}{2}\le 2\sqrt{10}$$

Ta có :

$$\begin{cases}\sin A+\sin B\le 2\cos\frac{C}{2}\\ 3\sin\frac{C}{2}+\cos\frac{C}{2}\le\sqrt{(3^2+1^2)\left(\sin^2\frac{C}{2}+\cos^2\frac{C}{2}\right)}=\sqrt{10}\end{cases}$$

Do đó, ta được

$$\sin A+\sin B+6\sin\frac{C}{2}\le 2\sqrt{10}$$

Dấu " = " xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases}A=B\\ \tan\frac{C}{2}=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=b\\ c=3\end{cases}$$

Thay vào hệ thức $ab+bc+ca=1$, ta được

$$\begin{cases}a=b=\sqrt{10}-3\\ c=3\end{cases}$$

Vậy ta có điều phải chứng minh.

Bài 15: Cho $a,b,c>0$ thỏa mãn $abc+a+c=b$. Chứng minh rằng

$$\frac{2}{1+a^2}-\frac{2}{1+b^2}+\frac{3}{1+c^2}\le\frac{10}{3}$$

Giải: Ta biến đổi giả thiết trở thành

$$ac+\frac{a}{b}+\frac{c}{b}=1$$

Khi đó, với A, B, C là 3 góc của tam giácABC ta đặt

$$\begin{cases}a=\tan\frac{A}{2}\\ \frac{1}{b}=\tan\frac{B}{2}\\ c=\tan\frac{C}{2}\end{cases}$$

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\frac{2}{1+\tan^2\frac{A}{2}}-\frac{2}{1+\frac{1}{\tan^2\frac{B}{2}}}+\frac{3}{1+\tan^2\frac{C}{2}}\le\frac{10}{3}$$

$$\Leftrightarrow (\cos A+1)-(1-\cos B)+3\left(1-\sin^2\frac{C}{2}\right)\le\frac{10}{3}$$

$$\Leftrightarrow 2\sin\frac{C}{2}\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)-3\sin^2\frac{C}{2}\le\frac{1}{3}$$

Ta có :

$$2\sin\frac{C}{2}\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)-3\sin^2\frac{C}{2}\le 2\sin\frac{C}{2}-3\sin^2\frac{C}{2}$$

Do đó, ta cần chứng minh

$$2\sin\frac{C}{2}-3\sin^2\frac{C}{2}\le\frac{1}{3}$$

Thật vậy, điều đó tương đương với

$$-3\left(\sin\frac{C}{2}-\frac{1}{3}\right)^2\le 0$$

Như vậy,

$$2\sin\frac{C}{2}\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)-3\sin^2\frac{C}{2}\le 2\sin\frac{C}{2}-3\sin^2\frac{C}{2}\le\frac{1}{3}$$

Dấu " = " xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases}\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)=1\\ \sin\frac{C}{2}=\frac{1}{3}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}A=B\\ \sin\frac{C}{2}=\frac{1}{3}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}ab=1\\ c=\frac{1}{2\sqrt{2}}\end{cases}$$

Thay vào hệ thức đã cho, ta được

$$\begin{cases}a=\frac{\sqrt{2}}{2}\\ b=\sqrt{2}\\ c=\frac{1}{2\sqrt{2}}\end{cases}$$

Vậy ta có điều phải chứng minh.

Bài 16: Cho $a,b,c\ge 0$ thỏa mãn $a^2+b^2+c^2+abc=4$. Chứng minh rằng

$$a+b+c\ge abc+2$$

Giải: Từ giả thiết, ta suy ra $a, b, c \in [0; 2]$. Do đó, tồn tại các góc nhọn $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}$ sao cho

$$\begin{cases} a = 2\cos \mathrm{A} \\ b = 2\cos \mathrm{B} \\ c = 2\cos \mathrm{C} \end{cases}$$

Suy ra, giả thiết tương đương với

$$\cos^2 \mathrm{A} + \cos^2 \mathrm{B} + \cos^2 \mathrm{C} + 2\cos \mathrm{A}\cos \mathrm{B}\cos \mathrm{C} = 1$$

Như vậy, $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}$ là 3 góc của tam giác nhọn ABC.

Ta đưa bất đẳng thức cần chứng minh thành

$$\cos \mathrm{A} + \cos \mathrm{B} + \cos \mathrm{C} \geq 4\cos \mathrm{A}\cos \mathrm{B}\cos \mathrm{C} + 1$$

Theo đẳng thức cơ bản, ta có :

$$\cos \mathrm{A} + \cos \mathrm{B} + \cos \mathrm{C} = 4\sin\frac{\mathrm{A}}{2}\sin\frac{\mathrm{B}}{2}\sin\frac{\mathrm{C}}{2} + 1$$

Do đó, bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\sin\frac{\mathrm{A}}{2}\sin\frac{\mathrm{B}}{2}\sin\frac{\mathrm{C}}{2} \geq \cos \mathrm{A}\cos \mathrm{B}\cos \mathrm{C}$$

Theo bất đẳng thức Cauchy, ta có :

$$\cos \mathrm{A}\cos \mathrm{B} \leq \left(\frac{\cos \mathrm{A} + \cos \mathrm{B}}{2}\right)^2 = \sin^2\frac{\mathrm{C}}{2}\cos^2\left(\frac{\mathrm{A} - \mathrm{B}}{2}\right) \leq \sin^2\frac{\mathrm{C}}{2}$$

Tương tự, ta được

$$\begin{cases} \cos \mathrm{B}\cos \mathrm{C} \leq \sin^2\dfrac{\mathrm{A}}{2} \\ \cos \mathrm{C}\cos \mathrm{A} \leq \sin^2\dfrac{\mathrm{B}}{2} \end{cases}$$

Nhân theo từng vế, ta có được

$$\sin\frac{\mathrm{A}}{2}\sin\frac{\mathrm{B}}{2}\sin\frac{\mathrm{C}}{2} \geq \cos \mathrm{A}\cos \mathrm{B}\cos \mathrm{C}$$

Dấu " = " xảy ra khi và chỉ khi tam giác ABC đều.

Vậy ta có điều phải chứng minh.

Bài 17: Chứng minh rằng với mọi số thực dương x, y, z thỏa mãn

$$x(x + y + z) = 3yz$$

Thì

$$(x + y)^3 + (x + z)^3 + 3(x + y)(y + z)(z + x) \leq 5(y + z)^3$$

(Tuyển sinh khối A 2009)

Giải: Với a, b, c là các số dương. Ta đặt

$$\begin{cases} a = x + y \\ b = y + z \\ c = z + x \end{cases}$$

Khi đó,

$$\begin{cases} x = \dfrac{b + c - a}{2} \\ y = \dfrac{c + a - b}{2} \\ z = \dfrac{a + b - c}{2} \end{cases}$$

Ta đưa bài toán về 3 số dương a, b, c thỏa mãn

$$a^2 = b^2 + c^2 - bc$$

Do đó, ta có thể coi a, b, c là 3 cạnh của tam giác ABC với góc $\mathrm{A} = 60^{\mathrm{o}}$.
Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$b^3 + c^3 + 3abc \leq 5a^3$$
$$\Leftrightarrow (b + c)(b^2 - bc + c^2) + 3abc \leq 5a^3$$
$$\Leftrightarrow a^2(b + c) + 3abc \leq 5a^3$$
$$\Leftrightarrow a(b + c) + 3bc \leq 5a^2$$

Theo định lý hàm số sin, ta có

$$\Leftrightarrow \sin \mathrm{A} (\sin \mathrm{B} + \sin \mathrm{C}) + 3 \sin \mathrm{B} \sin \mathrm{C} \leq 5 \sin^2 \mathrm{A}$$
$$\Leftrightarrow 2\sqrt{3}(\sin \mathrm{B} + \sin \mathrm{C}) + 12 \sin \mathrm{B} \sin \mathrm{C} \leq 15$$

Mặt khác, ta có :

$$\begin{cases} \sin \mathrm{B} + \sin \mathrm{C} \leq 2 \cos \dfrac{\mathrm{A}}{2} = \sqrt{3} \\ \sin \mathrm{B} \sin \mathrm{C} \leq \dfrac{(\sin \mathrm{B} + \sin \mathrm{C})^2}{4} \leq \dfrac{3}{4} \end{cases}$$

Do đó, ta được

$$2\sqrt{3}(\sin \mathrm{B} + \sin \mathrm{C}) + 12 \sin \mathrm{B} \sin \mathrm{C} \leq 15$$

Dấu " = " xảy ra khi và chỉ khi tam giác ABC đều, khi đó $x = y = z$.
Vậy ta có điều phải chứng minh.

Bài 18: Cho $a, b, c \in (0; 1)$ thỏa mãn $ab + bc + ca = 1$. Chứng minh rằng

$$\frac{a}{1 - a^2} + \frac{b}{1 - b^2} + \frac{c}{1 - c^2} \geq \frac{3}{4}\left(\frac{1 - a^2}{a} + \frac{1 - b^2}{b} + \frac{1 - c^2}{c}\right)$$

Giải: Tương tự những bài trước, ta đặt

$$\begin{cases} a = \tan\dfrac{A}{2} \\ b = \tan\dfrac{B}{2} \\ c = \tan\dfrac{C}{2} \end{cases}$$

Tuy nhiên, do $a, b, c \in (0;1)$ nên A, B, C là 3 góc của tam giác nhọn ABC.
Ta đưa bất đẳng thức cần chứng minh trở thành

$$\tan A + \tan B + \tan C \geq 3\left(\frac{1}{\tan A} + \frac{1}{\tan B} + \frac{1}{\tan C}\right)$$

Ta xét hàm số

$$f(x) = \tan x - \frac{3}{\tan x}, x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$$

$$f'(x) = \tan^2 x + 1 + 3.\frac{\tan^2 x + 1}{\tan^2 x} > 0$$

Do đó, hàm số $f(x)$ đồng biến. Theo bất đẳng thức Jensen, ta được

$$f(A) + f(B) + f(C) \geq 3f\left(\frac{A+B+C}{3}\right) = 3f(60^o) = 0$$

Suy ra

$$\tan A + \tan B + \tan C \geq 3\left(\frac{1}{\tan A} + \frac{1}{\tan B} + \frac{1}{\tan C}\right)$$

Dấu " = " xảy ra khi và chỉ khi tam giác ABC đều, khi đó $a = b = c$.
Vậy ta có điều phải chứng minh.

Bài 19: Cho $x, y, z > 0$. Chứng minh rằng

$$\sqrt{\frac{y+z}{x}} + \sqrt{\frac{z+x}{y}} + \sqrt{\frac{x+y}{z}} \geq \sqrt{\frac{16(x+y+z)^3}{3(x+y)(y+z)(z+x)}}$$

Giải: Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$(y+z)\sqrt{\frac{(x+y)(z+x)}{x(x+y+z)}} + (z+x)\sqrt{\frac{(x+y)(y+z)}{y(x+y+z)}} + (x+y)\sqrt{\frac{(y+z)(z+x)}{z(x+y+z)}}$$
$$\geq \frac{4}{\sqrt{3}}(x+y+z)$$

Ta đặt

$$\begin{cases} a = y + z \\ b = z + x \\ c = x + y \\ s = x + y + z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = s - a \\ y = s - b \\ z = s - c \\ s = x + y + z \end{cases}$$

Mặt khác, ta thấy rằng

$$\sqrt{\frac{(x+y)(z+x)}{x(x+y+z)}} = \sqrt{\frac{bc}{s(s-a)}}; \sqrt{\frac{(x+y)(y+z)}{y(x+y+z)}} = \sqrt{\frac{ca}{s(s-b)}};$$

$$\sqrt{\frac{(y+z)(z+x)}{z(x+y+z)}} = \sqrt{\frac{ab}{s(s-c)}}$$

Đều ≥ 1 và ta để ý rằng trong tam giác ABC

$$\frac{bc}{p(p-a)} = \frac{1}{\cos^2 \frac{A}{2}}$$

nên ta được

$$\begin{cases} \sqrt{\dfrac{bc}{s(s-a)}} = \dfrac{1}{\cos \frac{A}{2}} \\ \sqrt{\dfrac{ca}{s(s-b)}} = \dfrac{1}{\cos \frac{B}{2}} \\ \sqrt{\dfrac{ab}{s(s-c)}} = \dfrac{1}{\cos \frac{C}{2}} \end{cases}$$

Với A, B, C là 3 góc; a, b, c là 3 cạnh; s là nửa chu vi của tam giác ABC.
Ta đưa bài toán trở thành

$$\frac{a}{\cos \frac{A}{2}} + \frac{b}{\cos \frac{B}{2}} + \frac{c}{\cos \frac{C}{2}} \geq \frac{4s}{\sqrt{3}}$$

Theo định lý hàm số sin, bất đẳng thức trên tương đương với

$$\sin \frac{A}{2} + \sin \frac{B}{2} + \sin \frac{C}{2} \geq \frac{\sin A + \sin B + \sin C}{\sqrt{3}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\sin \frac{A}{2} + \sin \frac{B}{2} + \sin \frac{C}{2}\right) \geq \sin \frac{A}{2} \cos \frac{A}{2} + \sin \frac{B}{2} \cos \frac{B}{2} + \sin \frac{C}{2} \cos \frac{C}{2}$$

Theo bất đẳng thức cơ bản, ta có :

$$\cos \frac{A}{2} + \cos \frac{B}{2} + \cos \frac{C}{2} \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

Áp dụng bất đẳng thức Chebyshev cho hàm số $\sin\frac{x}{2}$ đồng biến trên $[0;\pi]$ và hàm số $\cos\frac{x}{2}$ nghịch biến $trên$ $[0;\pi]$. Ta được

$$\frac{1}{3}\left(\sin\frac{A}{2}+\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{C}{2}\right)\left(\cos\frac{A}{2}+\cos\frac{B}{2}+\cos\frac{C}{2}\right)\geq\sum\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}$$

Do đó, ta có :

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\sin\frac{A}{2}+\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{C}{2}\right)\geq\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}+\sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2}+\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}$$

Dấu " = " xảy ra khi và chỉ khi tam giác ABC đều, khi đó $x=y=z$.
Vậy ta có điều phải chứng minh.

Bài 20: Cho $a,b,c>0$ thỏa mãn $a+b+c=1$. Chứng minh rằng

$$a^2+b^2+c^2+2\sqrt{3abc}\leq 1$$

(Poland 1999)

Giải: Với A, B, C là 3 góc của tam giác ABC, ta đặt

$$\begin{cases} a=\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2} \\ b=\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2} \\ c=\tan\frac{C}{2}\tan\frac{A}{2} \end{cases}$$

Khi đó, bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\tan^2\frac{A}{2}\tan^2\frac{B}{2}+\tan^2\frac{B}{2}\tan^2\frac{C}{2}+\tan^2\frac{C}{2}\tan^2\frac{A}{2}+2\sqrt{3}\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}\leq 1$$

$$\Leftrightarrow\left(\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}+\tan\frac{C}{2}\tan\frac{A}{2}\right)^2+2\sqrt{3}\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}$$

$$\leq 1+2\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}\left(\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{C}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{C}{2}\geq\sqrt{3}$$

Đây chính là bất đẳng thức cơ bản, dấu " = " xảy ra khi và chỉ khi tam giác ABC đều, khi đó $a=b=c$.
Vậy ta có điều phải chứng minh.

Bài 21: Cho $a, b, c > 0$ thỏa mãn hệ thức

$$a + b + c + 1 = 4abc$$

Chứng minh rằng

$$\frac{1}{\sqrt{ab}} + \frac{1}{\sqrt{bc}} + \frac{1}{\sqrt{ca}} \leq 3$$

Giải: Giả thiết tương đương với

$$\frac{1}{4bc} + \frac{1}{4ca} + \frac{1}{4ab} + \frac{1}{4abc} = 1$$

Với $x, y, z > 0$. Ta đặt

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{2\sqrt{bc}} \\ y = \dfrac{1}{2\sqrt{ca}} \\ z = \dfrac{1}{2\sqrt{ab}} \end{cases}$$

Ta đưa giả thiết trở thành

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2xyz = 1$$

Như vậy, với $\mathrm{A, B, C}$ là 3 góc của tam giác nhọn ABC. Ta có

$$\begin{cases} x = \cos \mathrm{A} \\ y = \cos \mathrm{B} \\ z = \cos \mathrm{C} \end{cases}$$

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\cos \mathrm{A} + \cos \mathrm{B} + \cos \mathrm{C} \leq \frac{3}{2}$$

Đây là bất đẳng thức cơ bản, do đó dấu " = " xảy ra khi và chỉ khi tam giác ABC đều, khi đó $a = b = c$.

Vậy ta có điều phải chứng minh.

Bài 22: Cho $x, y, z > 1$ thỏa mãn hệ thức

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 2$$

Chứng minh rằng : $\sqrt{x-1} + \sqrt{y-1} + \sqrt{z-1} \leq \sqrt{x+y+z}$

(Iran 1997)

Giải: Với $a, b, c > 0$. Ta đặt

$$\begin{cases} x = a + 1 \\ y = b + 1 \\ z = c + 1 \end{cases}$$

Khi đó, giả thiết tương đương với

$$ab + bc + ca + 2abc = 1$$

Và bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} \le \sqrt{a + b + c + 3}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ca} \le \frac{3}{2}$$

Với $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}$ là 3 góc bất kỳ thuộc $(0; \pi)$. Ta đặt

$$\begin{cases} ab = \sin^2 \frac{\mathrm{A}}{2} \\ bc = \sin^2 \frac{\mathrm{B}}{2} \\ ca = \sin^2 \frac{\mathrm{C}}{2} \end{cases}$$

Đưa giả thiết trở thành

$$\sin^2 \frac{\mathrm{A}}{2} + \sin^2 \frac{\mathrm{B}}{2} + \sin^2 \frac{\mathrm{C}}{2} + 2 \sin \frac{\mathrm{A}}{2} \sin \frac{\mathrm{B}}{2} \sin \frac{\mathrm{C}}{2} = 1$$

$$\Leftrightarrow 1 - \cos \frac{\mathrm{A} + \mathrm{B}}{2} \cos \frac{\mathrm{A} - \mathrm{B}}{2} + \sin^2 \frac{\mathrm{C}}{2} - \left(\cos \frac{\mathrm{A} + \mathrm{B}}{2} - \cos \frac{\mathrm{A} - \mathrm{B}}{2}\right) \sin \frac{\mathrm{C}}{2} = 1$$

$$\Leftrightarrow \cos \frac{\mathrm{A} - \mathrm{B}}{2} \cos \frac{\mathrm{A} + \mathrm{B}}{2} - \sin^2 \frac{\mathrm{C}}{2} + \cos \frac{\mathrm{A} + \mathrm{B}}{2} \sin \frac{\mathrm{C}}{2} - \cos \frac{\mathrm{A} - \mathrm{B}}{2} \sin \frac{\mathrm{C}}{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\cos \frac{\mathrm{A} + \mathrm{B}}{2} - \sin \frac{\mathrm{C}}{2}\right)\left(\cos \frac{\mathrm{A} - \mathrm{B}}{2} + \sin \frac{\mathrm{C}}{2}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos \frac{\mathrm{A} - \mathrm{B}}{2} = \sin \frac{\mathrm{C}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \mathrm{A} + \mathrm{B} + \mathrm{C} = \pi$$

Như vậy, $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}$ là 3 góc của tam giác ABC. Khi đó, bất đẳng thức cần chứng minh trở thành bất đẳng thức cơ bản

$$\sin \frac{\mathrm{A}}{2} + \sin \frac{\mathrm{B}}{2} + \sin \frac{\mathrm{C}}{2} \le \frac{3}{2}$$

Dấu " = " xảy ra khi và chỉ khi tam giác ABC đều, khi đó $x = y = z$.

Vậy ta có điều phải chứng minh.

Bài 23: Cho $x, y, z > 0$. Chứng minh rằng

$$\frac{x}{x+\sqrt{(x+y)(x+z)}}+\frac{y}{y+\sqrt{(y+z)(y+x)}}+\frac{z}{z+\sqrt{(z+x)(z+y)}}\le 1$$

Giải: Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\frac{1}{1+\sqrt{\frac{(x+y)(x+z)}{x^2}}}+\frac{1}{1+\sqrt{\frac{(y+z)(y+x)}{y^2}}}+\frac{1}{1+\sqrt{\frac{(z+x)(z+y)}{z^2}}}\le 1$$

Không mất tính tổng quát, ta giả sử rằng $xy+yz+zx=1$. Khi đó, với A, B, C là 3 góc của tam giác ABC. Ta đặt

$$\begin{cases} x=\tan\frac{A}{2}\\ y=\tan\frac{B}{2}\\ z=\tan\frac{C}{2}\end{cases}$$

Suy ra

$$\frac{(x+y)(x+z)}{x^2}=\frac{\left(\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{B}{2}\right)\left(\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{C}{2}\right)}{\tan^2\frac{A}{2}}=\frac{1}{\sin^2\frac{A}{2}}$$

Như vậy, ta đưa bất đẳng thức cần chứng minh trở thành

$$\frac{\sin\frac{A}{2}}{1+\sin\frac{A}{2}}+\frac{\sin\frac{B}{2}}{1+\sin\frac{B}{2}}+\frac{\sin\frac{C}{2}}{1+\sin\frac{C}{2}}\le 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{1+\sin\frac{A}{2}}+\frac{1}{1+\sin\frac{B}{2}}+\frac{1}{1+\sin\frac{C}{2}}\ge 2$$

Theo bất đẳng thức Bunyakovsky, ta có :

$$\left(\frac{1}{1+\sin\frac{A}{2}}+\frac{1}{1+\sin\frac{B}{2}}+\frac{1}{1+\sin\frac{C}{2}}\right)\left(1+\sin\frac{A}{2}+1+\sin\frac{B}{2}+1+\sin\frac{C}{2}\right)\ge 9$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{1+\sin\frac{A}{2}}+\frac{1}{1+\sin\frac{B}{2}}+\frac{1}{1+\sin\frac{C}{2}}\ge\frac{9}{3+\sin\frac{A}{2}+\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{C}{2}}$$

Theo bất đẳng thức cơ bản, ta có :

$$\sin\frac{A}{2}+\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{C}{2}\le\frac{3}{2}$$

Do đó,

$$\frac{1}{1+\sin\frac{A}{2}}+\frac{1}{1+\sin\frac{B}{2}}+\frac{1}{1+\sin\frac{C}{2}}\ge 2$$

Dấu " = " xảy ra khi và chỉ khi tam giác ABC đều, khi đó $x=y=z$.
Vậy ta có điều phải chứng minh.

<u>Bài 24:</u> Cho $a,b,c>0$ thỏa mãn $a+b+c=1$. Chứng minh rằng

$$\sqrt{\frac{1}{a}-1}.\sqrt{\frac{1}{b}-1}+\sqrt{\frac{1}{b}-1}.\sqrt{\frac{1}{c}-1}+\sqrt{\frac{1}{c}-1}.\sqrt{\frac{1}{a}-1}\ge 6$$

(Ukraine 2005)

<u>Giải:</u> Từ giả thiết, với $\mathrm{A,B,C}$ là 3 góc của tam giác ABC, ta đặt

$$\begin{cases}a=\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}\\ b=\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}\\ c=\tan\frac{C}{2}\tan\frac{A}{2}\end{cases}$$

Khi đó,

$$\sqrt{\frac{1}{a}-1}=\sqrt{\frac{1}{\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}}-1}=\sqrt{\frac{\sin\frac{C}{2}}{\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}}}$$

Tương tự, ta có :

$$\begin{cases}\sqrt{\frac{1}{b}-1}=\sqrt{\frac{\sin\frac{A}{2}}{\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}}\\ \sqrt{\frac{1}{c}-1}=\sqrt{\frac{\sin\frac{B}{2}}{\sin\frac{C}{2}\sin\frac{A}{2}}}\end{cases}$$

Bất đẳng thức cần chứng minh trở thành bất đẳng thức cơ bản

$$\frac{1}{\sin\frac{B}{2}}+\frac{1}{\sin\frac{C}{2}}+\frac{1}{\sin\frac{A}{2}}\ge 6$$

Dấu " = " xảy ra khi và chỉ khi tam giác ABC đều, khi đó $a=b=c$.

Bài 25: Cho $a, b, c \geq 0$ sao cho $a^2 + b^2 + c^2 + abc = 4$. Chứng minh rằng

$$0 \leq ab + bc + ca - abc \leq 2$$

(USAMO, 2001)

Giải: Giả sử $a, b, c > 1$, khi đó $a^2 + b^2 + c^2 + abc > 4$ (vô lý). Do đó, ta chọn $a \leq 1$. Giả thiết tương đương với

$$\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{c}{2}\right)^2 + 2\frac{a}{2}.\frac{b}{2}.\frac{c}{2} = 1$$

Với $\alpha, \beta, \gamma \in [0; \pi]$ sao cho $\alpha + \beta + \gamma = \pi$. Ta đặt

$$\begin{cases} a = 2\sin\dfrac{\alpha}{2} \\ b = 2\sin\dfrac{\beta}{2} \\ c = 2\sin\dfrac{\gamma}{2} \end{cases}$$

Bất đẳng thức cần chứng minh trở thành

$$0 \leq 4\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2} + 4\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2} + 4\sin\frac{\gamma}{2}\sin\frac{\alpha}{2} - 8\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2} \leq 2$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq \sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2} + \sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2} + \sin\frac{\gamma}{2}\sin\frac{\alpha}{2} - 2\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2} \leq \frac{1}{2}$$

Ta thấy

$$\sin\frac{\alpha}{2}\left(\sin\frac{\beta}{2} + \sin\frac{\gamma}{2}\right) + \sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}\left(1 - 2\sin\frac{\alpha}{2}\right) \geq 0$$

Dấu " = " xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases} \sin\dfrac{\alpha}{2} = \sin\dfrac{\beta}{2} = 0 \\ \sin\dfrac{\gamma}{2} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = b = 0 \\ c = 2 \end{cases}$$

Đối với bất đẳng thức thứ hai, ta xét $\alpha, \beta, \gamma \in (0; \pi)$. Ta thấy

$$ab = 4\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2} = 2\sqrt{\sin\alpha\tan\frac{\beta}{2}\sin\beta\tan\frac{\alpha}{2}} \leq \sin\alpha\tan\frac{\beta}{2} + \sin\beta\tan\frac{\alpha}{2}$$

$$= \sin\alpha\cot\frac{\alpha+\gamma}{2} + \sin\beta\cot\frac{\beta+\gamma}{2}$$

Tương tự, ta được

$$\begin{cases} bc = 4\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2} \le \sin\beta\cot\frac{\beta+\alpha}{2} + \sin\gamma\cot\frac{\gamma+\alpha}{2} \\ ca = 4\sin\frac{\gamma}{2}\sin\frac{\alpha}{2} \le \sin\gamma\cot\frac{\gamma+\beta}{2} + \sin\alpha\cot\frac{\alpha+\beta}{2} \end{cases}$$

Suy ra

$$\begin{aligned} &ab + bc + ca \\ &\qquad \le (\sin\alpha + \sin\gamma)\cot\frac{\gamma+\alpha}{2} + (\sin\alpha + \sin\beta)\cot\frac{\beta+\alpha}{2} \\ &\qquad + (\sin\beta + \sin\gamma)\cot\frac{\gamma+\beta}{2} \end{aligned}$$

Ta có thể coi α, β, γ là 3 góc của tam giác nhọn bất kỳ.

$$ab + bc + ca \le 2\cos\frac{\alpha-\gamma}{2}\cos\frac{\gamma+\alpha}{2} + 2\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\beta+\alpha}{2} + 2\cos\frac{\beta-\gamma}{2}\cot\frac{\gamma-\beta}{2}$$

$$\Leftrightarrow ab + bc + ca \le 2(\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma) = 6 - 4\left(\sin^2\frac{\alpha}{2} + \sin^2\frac{\beta}{2} + \sin^2\frac{\gamma}{2}\right)$$

$$= 6 - (a^2 + b^2 + c^2) = 2 - abc$$

Dấu " = " xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$.

- BÀI TẬP TỰ LUYỆN

9.2.1. Cho $|a| \le 1$. Chứng minh rằng với mọi $n \in \mathbb{N}, n \ge 2$

$$(1-a)^n + (1+a)^n \le 2^n$$

9.2.2. Chứng minh rằng

$$\sqrt{a^2 - 1} + \sqrt{3} \le 2|a|$$

9.2.3. Cho $4a^2 + 9b^2 = 25$. Chứng minh rằng

$$|6a + 12b| \le 25$$

9.2.4. Chứng minh rằng

$$\left|a\sqrt{1-b^2} + b\sqrt{1-a^2} + \sqrt{3}\left[ab - \sqrt{(1-a^2)(1-b^2)}\right]\right| \le 2$$

9.2.5. Chứng minh rằng

$$\sqrt{1 + \sqrt{1-x^2}}.\left[\sqrt{(1+x)^3} - \sqrt{(1-x)^3}\right] \le 2\sqrt{2} - \sqrt{2 - 2x^2}$$

9.2.6. Chứng minh rằng với $a \in [0; 2]$

$$\left|\sqrt{2a - a^2} - \sqrt{3}a + \sqrt{3}\right| \le 2$$

9.2.7. Cho a, b, c thỏa mãn $0 < c \le a$ và $c \le b$. Chứng minh rằng

$$\sqrt{(a-c)c} + \sqrt{(b-c)c} \le \sqrt{ab}$$

9.2.8. Chứng minh rằng

$$\left|\sqrt{3}(2a^2 - 1) + 2a\sqrt{1 - a^2}\right| \le 2$$

9.2.9. Cho $|a|, |b| < 1$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{1-a^2}+\frac{1}{1-b^2} \ge \frac{2}{1-ab}$$

9.2.10. Cho a, b, x, y là các số dương sao cho

$$\frac{a}{x}+\frac{b}{y}=1$$

Chứng minh rằng

$$x+y \ge \left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2$$

9.2.11. Cho x, y thỏa mãn $x^2+y^2=1$. Chứng minh rằng

$$\left|\frac{\sqrt{3}x}{2+y}\right| \le 1$$

9.2.12. Cho u, v, x, y thỏa mãn $u^2+v^2=x^2+y^2=1$
Chứng minh rằng

$$|u(x+y)+v(x-y)| \le \sqrt{2}$$

9.2.13. Cho x, y thỏa mãn $x^2+y^2-2x-4y+4=0$. Chứng minh rằng

$$\left|x^2-y^2+2\sqrt{3}xy-2\left(1+2\sqrt{3}\right)x+\left(4-2\sqrt{3}\right)y-3+4\sqrt{3}\right| \le 2$$

9.2.14. Cho x, y thỏa mãn $|3(x^2-y^2)+8xy+14x+2y+8|=5$. Chứng minh rằng

$$x^2+y^2+2(x+y)+1 \ge 0$$

9.2.15. Cho $a_1 < a_2 < \ldots < a_{13}$. Chứng minh rằng tồn tại $k, l \in \{1; 2; \ldots; 13\}$ sao cho

$$0 < \frac{a_k-a_l}{1+a_ka_l} < \sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}}$$

9.2.16. Đặt $x_0=0$ và $x_i>0$ với $i=\overline{1;n}$ sao cho

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$$

Chứng minh rằng

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{\sqrt{1+x_0+\ldots+x_{i-1}}.\sqrt{x_i+\ldots+x_n}} < \frac{\pi}{2}$$

(Đề nghị Olympic 30-4, 2008)

- **GỢI Ý GIẢI BÀI TẬP TỰ LUYỆN**

9.2.16. Ta đặt

$$\begin{cases} x_0 = \sin 0 = \sin a_0 \\ x_0 + x_1 = \sin a_1 \\ x_0 + x_1 + x_2 = \sin a_2 \\ x_0 + x_1 + \cdots + x_i = \sin a_i \\ \ldots \\ x_0 + x_1 + \cdots + x_n = \sin \dfrac{\pi}{2} = \sin a_n \end{cases}$$

Với $0 = a_0 < a_1 < \ \ldots\ < a_n = \dfrac{\pi}{2}$

Bất đẳng thức cần chứng minh trở thành

$$\sum_{i=0}^{n} \frac{\sin a_i - \sin a_{i-1}}{\sqrt{1 + \sin a_{i-1}}.\sqrt{1 - \sin a_{i-1}}} = \sum_{i=0}^{n} \frac{2\cos \frac{a_i + a_{i-1}}{2} \sin \frac{a_i - a_{i-1}}{2}}{\cos a_{i-1}}$$

Với $x \in \left(0; \dfrac{\pi}{2}\right]$ thì

$$\begin{cases} \text{Hàm số } y = \cos x \text{ nghịch biến} \\ \sin x < x \end{cases}$$

Do đó,

$$\sum_{i=0}^{n} \frac{2\cos \frac{a_i + a_{i-1}}{2} \sin \frac{a_i - a_{i-1}}{2}}{\cos a_{i-1}} < \sum_{i=0}^{n} \frac{2\cos a_{i-1} . \frac{a_i - a_{i-1}}{2}}{\cos a_{i-1}} = \sum_{i=0}^{n} (a_i - a_{i-1}) = \frac{\pi}{2}$$

IV. PHƯƠNG PHÁP LƯỢNG GIÁC HÓA TRONG GIẢI PHƯƠNG TRÌNH

- Ở dạng này, ta cũng sẽ chuyển về dạng giải phương trình lượng giác. Các bạn cần ôn lại các phương pháp giải phương trình lượng giác ở chương 5 để có thể nhanh chóng tiếp cận phương pháp này.

Bài 1: Giải phương trình sau

a. $4x^3 - 3x = \sqrt{1 - x^2}$

b. $\sqrt{1 + \sqrt{1 - x^2}} = x\left(1 + 2\sqrt{1 - x^2}\right)$

c. $4x^3 - 3x = \dfrac{1}{2}$

Giải:

a. Điều kiện : $|x| \leq 1$. Ta đặt $x = \cos t\,, t \in [0;\pi]$ $(*)$

Khi đó, phương trình được chuyển về dạng

$$4\cos^3 t - 3\cos t = \sqrt{1-\cos^2 t}$$
$$\Leftrightarrow \cos 3t = \sin t$$
$$\Leftrightarrow \cos 3t = \cos\left(\frac{\pi}{2} - t\right)$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3t = \frac{\pi}{2} - t + k2\pi \\ 3t = t - \frac{\pi}{2} + k2\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2} \\ t = -\frac{\pi}{4} + k\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z}) \overset{(*)}{\Leftrightarrow} \left[\begin{array}{l} t = \frac{\pi}{8} \\ t = \frac{5\pi}{8} \\ t = \frac{3\pi}{4} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \cos\frac{\pi}{8} \\ x = \cos\frac{5\pi}{8} \\ x = \cos\frac{3\pi}{4} \end{array}\right.$$

b. Điều kiện : $|x| \leq 1$

Ta đặt $x = \sin t\,, t \in \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ $(*)$. Khi đó, phương trình tương đương với

$$\sqrt{1+\sqrt{1-\sin^2 t}} = \sin t\left(1 + 2\sqrt{1-\sin^2 t}\right)$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{1+\cos t} = \sin t\,(1 + 2\cos t)$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{2}\cos\frac{t}{2} = \sin t + \sin 2t$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{2}\cos\frac{t}{2}\left(1 - \sqrt{2}\sin\frac{3t}{2}\right) = 0$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos\frac{t}{2} = 0 \\ \sin\frac{3t}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{array}\right. \overset{(*)}{\Leftrightarrow} \left[\begin{array}{l} t = \frac{\pi}{6} \\ t = \frac{\pi}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{1}{2} \\ x = 1 \end{array}\right.$$

c. Ta có :

$$\frac{1}{2} = \cos\frac{\pi}{3} = \cos\left(\frac{\pi}{3} \pm 2\pi\right) = \cos\left(\frac{\pi \pm 6\pi}{3}\right)$$

Nhận xét rằng

$$\cos\frac{\pi}{3} = \cos\left(3.\frac{\pi}{9}\right) = 4\cos^3\frac{\pi}{9} - 3\cos\frac{\pi}{9}$$

Do đó, $x = \cos\frac{\pi}{9}$ là một nghiệm của phương trình

Đánh giá tương tự, ta suy ra

$\cos\frac{5\pi}{9}; \cos\frac{7\pi}{9}$ là 2 nghiệm còn lại của phương trình

Bài 2: Giải phương trình sau

a. $8x(2x^2-1)(8x^4-8x^2+1)=1$

b. $x+\dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}=2\sqrt{2}$

c. $1+\dfrac{2}{3}\sqrt{x-x^2}=\sqrt{x}+\sqrt{1-x}$

Giải:

a. Ta xét các trường hợp

- $x \geq 1$, khi đó $8x(2x^2-1)(8x^4-8x^2+1)>1$. Do đó, phương trình vô nghiệm
- $x \leq -1$, suy ra $8x(2x^2-1)(8x^4-8x^2+1)<0$. Do đó, phương trình vô nghiệm
- $|x|<1$. Đặt $x=\cos t\,, t\in(0;\pi)$ $(*)$. Khi đó, phương trình trở thành

$$8\cos t\,(2\cos^2 t-1)(8\cos^4 t-8\cos^2 t+1)=1$$

$$\Leftrightarrow 8\cos t\cos 2t\cos 4t=1$$

$$\Leftrightarrow 8\sin t\cos t\cos 2t\cos 4t=\sin t$$

$$\Leftrightarrow \sin 8t=\sin t \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 8t=t+k2\pi \\ 8t=\pi-t+k2\pi \end{array}\right.$$

$$\overset{(*)}{\Leftrightarrow} t\in\left\{\frac{2\pi}{7};\frac{4\pi}{7};\frac{6\pi}{7};\frac{\pi}{9};\frac{\pi}{3};\frac{5\pi}{9};\frac{7\pi}{9}\right\}$$

$$\Leftrightarrow x\in\left\{\cos\frac{2\pi}{7};\cos\frac{4\pi}{7};\cos\frac{6\pi}{7};\cos\frac{\pi}{9};\cos\frac{\pi}{3};\cos\frac{5\pi}{9};\cos\frac{7\pi}{9}\right\}$$

b. Điều kiện : $x>1$. Ta đặt

$$x=\frac{1}{\cos t}, t\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)\ (*)$$

Khi đó, phương trình có dạng

$$\frac{1}{\cos t}+\frac{\frac{1}{\cos t}}{\sqrt{\frac{1}{\cos^2 t}-1}}=2\sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow \sin t+\cos t=2\sqrt{2}\sin t\cos t$$

Đặt $\sin t+\cos t=u, u\in\left[1;\sqrt{2}\right]$. Suy ra $2\sin t\cos t=u^2-1$

Khi đó, phương trình trở thành

$$\sqrt{2}u^2 - u - \sqrt{2} = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u = \sqrt{2} \\ u = -\dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{array}\right. \Leftrightarrow \sin t + \cos t = \sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow \sin\left(t + \frac{\pi}{4}\right) = 1 \Leftrightarrow t + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + k2\pi\ (k \in \mathbb{Z}) \overset{(*)}{\Leftrightarrow} t = \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow x = \sqrt{2}$$

c. Điều kiện : $x \in [0; 1]$

Ta đặt $x = \cos^2 t\,, t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ $(*)$. Khi đó phương trình trở thành

$$1 + \frac{2}{3}\sqrt{\cos^2 t - \cos^4 t} = \sqrt{\cos^2 t} + \sqrt{1 - \cos^2 t}$$

$$\Leftrightarrow 3 + 2\sin t \cos t = 3(\cos t + \sin t)$$

Đặt $\sin t + \cos t = u, u \in \left[1; \sqrt{2}\right]$. Suy ra $2\sin t \cos t = u^2 - 1$

Khi đó phương trình có dạng

$$u^2 - 3u + 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u = 1 \\ u = 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \sin t + \cos t = 1$$

$$\Leftrightarrow \sin\left(t + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = k2\pi \\ t = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z}) \overset{(*)}{\Leftrightarrow} \left[\begin{array}{l} t = 0 \\ t = \dfrac{\pi}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 0 \end{array}\right.$$

<u>Bài 3:</u> Giải các phương trình sau

a. $x^3 + \sqrt{(1 - x^2)^3} = x\sqrt{2(1 - x^2)}$

b. $\sqrt{x^2 + 1} + \dfrac{x^2 + 1}{2x} = \dfrac{(x^2 + 1)^2}{2x(1 - x^2)}$

c. $\sqrt{1 + \sqrt{1 - x^2}}\left[\sqrt{(1 - x)^3} - \sqrt{(1 + x)^3}\right] = 2 + \sqrt{1 - x^2}$

<u>Giải:</u>

a. Điều kiện : $|x| \leq 1$

Ta đặt $x = \sin t\,, t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ $(*)$. Khi đó phương trình có dạng

$$\sin^3 t + \sqrt{(1 - \sin^2 t)^3} = \sin t\sqrt{2(1 - \sin^2 t)}$$

$$\Leftrightarrow \sin^3 t + \cos^3 t = \sqrt{2}\sin t \cos t$$

$$\Leftrightarrow (\sin t + \cos t)^3 - 3\sin t \cos t\,(\sin t + \cos t) = \sqrt{2}\sin t \cos t$$

Đặt $\sin t + \cos t = u, u \in \left[-\sqrt{2}; \sqrt{2}\right]$. Suy ra $2\sin t \cos t = u^2 - 1$

Khi đó, phương trình tương đương với

$$u^3 + u^2\sqrt{2} - 3u - \sqrt{2} = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u = \sqrt{2} \\ u = 1 - \sqrt{2} \end{array}\right.$$

- Với $u = \sqrt{2}$

$$\sin t + \cos t = \sqrt{2} \Leftrightarrow \sin\left(t + \frac{\pi}{4}\right) = 1 \overset{(*)}{\Leftrightarrow} t = \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

- Với $u = 1 - \sqrt{2}$

$$\sin t + \cos t = 1 - \sqrt{2} \Leftrightarrow \cos t = 1 - \sqrt{2} - \sin t$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 \le 1 - \sqrt{2} - \sin t \le 1 \\ \left(1 - \sqrt{2} - \sin t\right)^2 + \sin^2 t = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin t \le 1 - \sqrt{2} \\ 2\sin^2 t - 2\left(1 - \sqrt{2}\right)\sin t + 2 - 2\sqrt{2} = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x = \sin t = \frac{1 - \sqrt{2} - \sqrt{2\sqrt{2} - 1}}{2}$$

b. Điều kiện : $x \in \mathbb{R}\backslash\{0; \pm 1\}$

Ta đặt $x = \tan t, t \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)\backslash\left\{0; \pm\frac{\pi}{4}\right\}$ $(*)$. Khi đó phương trình có dạng

$$\sqrt{1 + \tan^2 t} + \frac{\tan^2 t + 1}{2\tan t} = \frac{(\tan^2 t + 1)^2}{2\tan t\,(1 - \tan^2 t)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\cos t} + \frac{1}{2\sin t\cos t} = \frac{1}{2\cos t\,(\cos^2 t - \sin^2 t)\sin t}$$

$$\Leftrightarrow 2\sin t\cos 2t - 2\sin^2 t = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos 2t = \cos\left(\frac{\pi}{2} - t\right) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = \frac{\pi}{6} + \frac{k2\pi}{3} \\ t = -\frac{\pi}{2} + k2\pi \end{array}\right. \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$\overset{(*)}{\Leftrightarrow} t = \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow x = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

c. Điều kiện : $|x| \le 1$. Ta đặt $x = \cos t, t \in [0; \pi]$. Khi đó

$$\sqrt{1 + \sin t}\left[\sqrt{(1 - \cos t)^3} - \sqrt{(1 + \cos t)^3}\right] = 2 + \sin t$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{\left(\sin\frac{t}{2} + \cos\frac{t}{2}\right)^2}\left[\sqrt{\left(2\sin^2\frac{t}{2}\right)^3} - \sqrt{\left(2\cos^2\frac{t}{2}\right)^3}\right] = 2 + \sin t$$

$$\Leftrightarrow \left(\sin\frac{t}{2}+\cos\frac{t}{2}\right)2\sqrt{2}\left(\sin^3\frac{t}{2}-\cos^3\frac{t}{2}\right)=2+\sin t$$
$$\Leftrightarrow 2\sqrt{2}\left(\sin^2\frac{t}{2}-\cos^2\frac{t}{2}\right)\left(1+\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}\right)=2+\sin t$$
$$\Leftrightarrow -\sqrt{2}\cos t\,(2+\sin t)=2+\sin t$$
$$\Leftrightarrow x=\cos t=-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Bài 4: Giải các phương trình sau

a. $x^3+1=3\sqrt[3]{3x-1}$

b. $x^3-3x=\sqrt{x+2}$

(Đề nghị Olympic 30-4, 2006)

c. $\frac{1}{x}+\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=2\sqrt{2}$

(Đề nghị Olympic 30-4, 2007)

Giải:

a. Ta đặt $u=\sqrt[3]{3x-1}\Leftrightarrow u^3+1=3x$. Khi đó, ta có hệ phương trình

$$\begin{cases}x^3+1=3u\\u^3+1=3x\end{cases}\Rightarrow x^3-u^3=3(u-x)$$
$$\Leftrightarrow (x-u)(x^2+u^2+ux+3)=0\Leftrightarrow x=u$$

Như vậy, phương trình đã cho tương đương với

$$x^3-3x+1=0$$

Ta xét hàm số

$$f(x)=x^3-3x+1, x\in\mathbb{R}$$
$$f'(x)=3(x^2-1)$$

Nếu $x>2$ thì hàm số $f(x)$ đồng biến. Do đó,

$$x>2\Rightarrow f(x)>f(2)=3>0$$

Suy ra phương trình vô nghiệm.

Nếu $x<-2$ thì hàm số $f(x)$ đồng biến. Do đó,

$$x<-2\Rightarrow f(x)<f(-2)=-1<0$$

Suy ra phương trình vô nghiệm.

Ta xét phương trình trên $[-2;2]$, đặt $x=2\cos t\,, t\in[0;\pi]$ $(*)$

Khi đó, phương trình tương đương với

$$2(4\cos^3 t-3\cos t)+1=0$$
$$\Leftrightarrow \cos t=-\frac{1}{2}\Leftrightarrow t=\pm\frac{2\pi}{9}+\frac{k2\pi}{3}\ (k\in\mathbb{Z})$$

$$\overset{(*)}{\Leftrightarrow} t \in \left\{\frac{2\pi}{9}; \frac{4\pi}{9}; \frac{8\pi}{9}\right\} \Leftrightarrow x \in \left\{2\cos\frac{2\pi}{9}; 2\cos\frac{4\pi}{9}; 2\cos\frac{8\pi}{9}\right\}$$

b. Điều kiện : $x \geq -2$

- Nếu $x > 2$ thì $x^3 - 3x = 2 + x(x^2 - 4) > x > \sqrt{2x} > \sqrt{x+2}$.
- Nếu $-2 \leq x \leq 2$, ta đặt $x = 2\cos t\,, t \in [0;\pi]$ $(*)$. Khi đó,

$$8\cos^3 t - 6\cos t = \sqrt{2\cos t + 2}$$

$$\Leftrightarrow 2(4\cos^3 t - 3\cos t) = 2\cos^2\frac{t}{2}$$

$$\Leftrightarrow \cos 3t = \cos\frac{t}{2} \Leftrightarrow 3t = \pm\frac{t}{2} + k2\pi \ (k \in \mathbb{Z}) \overset{(*)}{\Leftrightarrow} \left[\begin{aligned} t &= 0 \\ t &= \frac{4\pi}{5} \\ t &= \frac{4\pi}{7} \end{aligned}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{aligned} x &= 2 \\ x &= 2\cos\frac{4\pi}{5} \\ x &= 2\cos\frac{4\pi}{7} \end{aligned}\right.$$

c. Điều kiện : $x \in (-1;1)\backslash\{0\}$.

Ta đặt $x = \cos t\,, t \in (0;\pi)\backslash\left\{\frac{\pi}{2}\right\}$ $(*)$. Khi đó, phương trình có dạng

$$\frac{1}{\cos t} + \frac{1}{\sin t} = 2\sqrt{2} \Leftrightarrow \sin t + \cos t = 2\sqrt{2}\sin t\cos t$$

Đặt $\sin t + \cos t = u, u \in \left[-\sqrt{2};\sqrt{2}\right]$. Suy ra $2\sin t\cos t = u^2 - 1$

Phương trình trở thành

$$\sqrt{2}u^2 - u - \sqrt{2} = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{aligned} u &= \sqrt{2} \\ u &= -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{aligned}\right.$$

Nếu $u = \sqrt{2}$ thì $\sin t + \cos t = \sqrt{2}$

$$\Leftrightarrow \cos\left(t - \frac{\pi}{4}\right) = 1 \Leftrightarrow t = \frac{\pi}{4} + k2\pi \ (k \in \mathbb{Z}) \overset{(*)}{\Leftrightarrow} t = \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Nếu $u = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ thì $\sin t + \cos t = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

$$\Leftrightarrow \cos\left(t - \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{aligned} t &= \frac{11\pi}{12} + k2\pi \\ t &= -\frac{5\pi}{12} + k2\pi \end{aligned}\right. \ (k \in \mathbb{Z}) \overset{(*)}{\Leftrightarrow} t = \frac{11\pi}{12} \Leftrightarrow x = \frac{-1-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$$

- BÀI TẬP TỰ LUYỆN

9.3.1. Giải các phương trình sau

a. $8x^3+24x^2+6x-1=0$

b. $x^4-6x^2+1=0$

c. $\sqrt{\dfrac{1+2x\sqrt{1-x^2}}{2}}=1-2x^2$

d. $\left|2x-\sqrt{1-4x^2}\right|=\sqrt{2}(8x^2-1)$

e. $x+\dfrac{3x}{\sqrt{x^2+3}}=\sqrt{3}$

f. $\dfrac{1}{1-\sqrt{1-x}}+\dfrac{1}{1+\sqrt{1+x}}=\dfrac{4\sqrt{3}}{\sqrt{1-x}}$

g. $6x+8\sqrt{1-x^2}=5\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)$

h. $64x^6-112x^4+56x^2-7=2\sqrt{1-x^2}$

i. $32x(x^2-1)(2x^2-1)+\dfrac{1}{x}=1$

V. PHƯƠNG PHÁP LƯỢNG GIÁC HÓA TRONG GIẢI HỆ PHƯƠNG TRÌNH

- Ở dạng này, ta cũng sẽ chuyển về dạng giải hệ phương trình lượng giác. Các bạn cần ôn lại các phương pháp giải phương trình lượng giác ở chương 6 để có thể nhanh chóng tiếp cận phương pháp này.
- Đây là dạng ít khi xuất hiện trong các đề thi chung, thường xuất hiện trong các đề thi chuyên.

Bài 1: Giải các hệ phương trình sau

a. $\begin{cases} x+\sqrt{1-y^2}=1 \\ y+\sqrt{1-x^2}=1 \end{cases}$

b. $\begin{cases} \dfrac{2y}{1-y^2}=x \\ \dfrac{2x}{1-x^2}=y \end{cases}$

c. $\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ (x-y)(1+4xy)=\sqrt{\dfrac{3}{2}} \end{cases}$

d. $\begin{cases} x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2}=1 \\ (1-x)(1+y)=2 \end{cases}$

Giải:

a. Điều kiện : $|x|,|y| \le 1$. Ta đặt

$$\begin{cases} x = \sin\alpha \\ y = \sin\beta \end{cases} \left(\alpha, \beta \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]\right) \ (*)$$

Hệ phương trình trở thành

$$\begin{cases} \sin\alpha + \cos\beta = 1 \\ \sin\beta + \cos\alpha = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin\alpha + \cos\beta = 1 \\ \sin(\alpha+\beta) = 0 \end{cases} \overset{(*)}{\Leftrightarrow} \begin{cases} \sin\alpha + \cos\beta = 1 \\ \left[\begin{array}{l} \alpha + \beta = 0 \\ \alpha + \beta = \pi \end{array}\right. \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \alpha = -\beta \\ \sin\alpha + \cos(-\alpha) = 1 \end{cases} \\ \alpha = \beta = \dfrac{\pi}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \alpha = \beta = 0 \\ \alpha = \beta = \dfrac{\pi}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = y = 0 \\ x = y = 1 \end{array}\right.$$

b. Điều kiện : $x, y \ne \pm 1$. Ta đặt

$$\begin{cases} x = \tan\alpha \\ y = \tan\beta \end{cases} \left(\alpha; \beta \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right) \setminus \left\{\pm\frac{\pi}{4}\right\}\right) \ (*)$$

Hệ phương trình trở thành

$$\begin{cases} \dfrac{2\tan\beta}{1-\tan^2\beta} = \tan\alpha \\ \dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha} = \tan\beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \tan 2\beta = \tan\alpha \\ \tan 2\alpha = \tan\beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\beta = \alpha + k\pi \\ 2\alpha = \beta + l\pi \end{cases} \ (k; l \in \mathbb{Z})$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \dfrac{k\pi + l2\pi}{3} \\ \beta = \dfrac{l\pi + k2\pi}{3} \end{cases} \overset{(*)}{\Leftrightarrow} \left[\begin{array}{l} x = y = 0 \\ \begin{cases} x = \sqrt{3} \\ y = -\sqrt{3} \end{cases} \\ \begin{cases} x = -\sqrt{3} \\ y = \sqrt{3} \end{cases} \end{array}\right.$$

c. Ta đặt

$$\begin{cases} x = \sin t \\ y = \cos t \end{cases} \ (t \in [0; 2\pi]) \ (*)$$

Hệ phương trình trở thành

$$(\sin t - \cos t)(1 + 4\sin t\cos t) = \sqrt{\frac{3}{2}}$$

$$\Leftrightarrow \cos\left(3t - \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \overset{(*)}{\Leftrightarrow} t \in \left\{\frac{13\pi}{36}; \frac{17\pi}{36}; \frac{37\pi}{36}; \frac{41\pi}{36}; \frac{61\pi}{36}; \frac{65\pi}{36}\right\}$$

$$\Leftrightarrow (x; y) \in \{\left(\sin\frac{13\pi}{36}; \cos\frac{13\pi}{36}\right); \left(\sin\frac{17\pi}{36}; \cos\frac{17\pi}{36}\right); \left(\sin\frac{37\pi}{36}; \cos\frac{37\pi}{36}\right)$$
$$\left(\sin\frac{41\pi}{36}; \cos\frac{41\pi}{36}\right); \left(\sin\frac{61\pi}{36}; \cos\frac{61\pi}{36}\right); \left(\sin\frac{65\pi}{36}; \cos\frac{65\pi}{36}\right)\}$$

d. Điều kiện : $|x|;|y| \le 1$. Ta đặt

$$\begin{cases} x = \cos\alpha \\ y = \cos\beta \end{cases} (\alpha;\beta \in [0;\pi])$$

Hệ phương trình trở thành

$$\begin{cases} \cos\alpha\sin\beta + \cos\beta\sin\alpha = 1 \\ (1-\cos\alpha)(1+\cos\beta) = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin(\alpha+\beta) = 1 \\ (1-\cos\alpha)(1+\cos\beta) = 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha+\beta = \dfrac{\pi}{2} \\ (1-\cos\alpha)\left[1+\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)\right] = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = \dfrac{\pi}{2}-\alpha \\ \sin\alpha - \cos\alpha = 1 + \sin\alpha\cos\alpha \end{cases}$$

Ta đặt $t = \sin\alpha - \cos\alpha$, $|t| \le \sqrt{2}$ và $1 - t^2 = 2\sin\alpha\cos\alpha$. Khi đó

$$\begin{cases} \beta = \dfrac{\pi}{2}-\alpha \\ t^2+2t-3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = \dfrac{\pi}{2}-\alpha \\ t = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = \dfrac{\pi}{2}-\alpha \\ \sin\alpha-\cos\alpha = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = 0 \\ \alpha = \dfrac{\pi}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \end{cases}$$

Bài 2: Với a, b là các hằng số khác 0 cho trước. Giải hệ phương trình

$$x^2 + a^2 = y^2 + b^2 = (x-b)^2 + (y-a)^2$$

Giải: Ta đặt

$$x^2 + a^2 = y^2 + b^2 = (x-b)^2 + (y-a)^2 = R^2\ (R > 0)$$

Khi đó, hệ phương trình tương đương với

$$\begin{cases} x = R\cos\alpha\,; a = R\sin\alpha \\ y = R\cos\beta\,; b = R\sin\beta \\ R^2(\cos\alpha - \sin\beta)^2 + R^2(\cos\beta-\sin\alpha)^2 = R^2 \end{cases} (\alpha;\beta \in [0;2\pi])$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = R\cos\alpha\,; a = R\sin\alpha \\ y = R\cos\beta\,; b = R\sin\beta \\ \sin(\alpha+\beta) = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Ta xét trường hợp :

Nếu $\alpha + \beta = \dfrac{\pi}{6} + k2\pi\ (k \in \mathbb{Z})$ thì

$$\begin{cases} y = R\cos\left(\dfrac{\pi}{6}-\alpha\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}x + \dfrac{a}{2} \\ b = R\sin\left(\dfrac{\pi}{6}-\alpha\right) = \dfrac{x}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2b + a\sqrt{3} \\ y = 2a + b\sqrt{3} \end{cases}$$

Nếu $\alpha + \beta = \dfrac{5\pi}{6} + k2\pi\ (k \in \mathbb{Z})$ thì

$$\begin{cases} y = R\cos\left(\dfrac{5\pi}{6} - \alpha\right) = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}x + \dfrac{a}{2} \\ b = R\sin\left(\dfrac{5\pi}{6} - \alpha\right) = \dfrac{x}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2b - a\sqrt{3} \\ y = 2a - b\sqrt{3} \end{cases}$$

<u>Bài 3:</u> Giải hệ phương trình sau

$$\begin{cases} x = y(4-y) \\ y = z(4-z) \\ z = x(4-x) \end{cases}$$

<u>Giải:</u> Cộng từng vế tương ứng các phương trình đã cho của hệ, ta có

$$3(x+y+z) = x^2 + y^2 + z^2 \Longrightarrow x + y + z \geq 0$$

Nên phải có ít nhất một số không âm, ta có thể giả sử là z. Ta có

$$x(4-x) = z \geq 0 \Longrightarrow 0 \leq x \leq 4$$

Do vậy, ta đặt

$$x = 4\sin^2 t\,, t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]\ (*)$$

Ta suy ra

$$z = 4\sin^2 t\,(4 - 4\sin^2 t) = 4\sin^2 2t$$
$$\Longrightarrow y = 4\sin^2 2t\,(4 - 4\sin^2 2t) = 4\sin^2 4t$$
$$\Longrightarrow x = 4\sin^2 4t\,(4 - 4\sin^2 4t) = 4\sin^2 8t$$

Vậy t là nghiệm của phương trình

$$\sin^2 8t = \sin^2 t \Leftrightarrow \cos 16t = \cos 2t$$
$$\overset{(*)}{\Leftrightarrow} t \in \left\{0; \frac{\pi}{9}; \frac{\pi}{7}; \frac{2\pi}{9}; \frac{2\pi}{7}; \frac{\pi}{3}; \frac{4\pi}{9}; \frac{3\pi}{7}\right\}$$

Vậy với t lấy từ một trong các giá trị trên, hệ phương trình có các nghiệm sau

$$\begin{cases} x = 4\sin^2 t \\ y = 4\sin^2 4t \\ z = 4\sin^2 2t \end{cases}$$

<u>Bài 4:</u> Cho a, b, c là các số dương cho trước. Hãy xác định tất cả các số dương x, y, z sao cho

$$\begin{cases} x + y + z = a + b + c \\ 4xyz - (a^2x + b^2y + c^2z) = abc \end{cases}$$

<u>Giải:</u> Với $4xyz - (a^2x + b^2y + c^2z) = abc$, ta biến đổi

$$4 = \frac{a^2}{yz} + \frac{b^2}{zx} + \frac{c^2}{xy} + \frac{abc}{xyz}$$

Với $x_1, y_1, z_1 > 0$, ta đặt

$$\begin{cases} \dfrac{a}{\sqrt{yz}} = x_1 \\ \dfrac{b}{\sqrt{zx}} = y_1 \\ \dfrac{c}{\sqrt{xy}} = z_1 \end{cases}$$

Do đó,

$$x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 + x_1 y_1 z_1 = 4$$

Với A, B, C là 3 góc của tam giác nhọn ABC, ta lại đặt

$$\begin{cases} x_1 = 2\sin\dfrac{A}{2} \\ y_1 = 2\sin\dfrac{B}{2} \\ z_1 = 2\sin\dfrac{C}{2} \end{cases}$$

Khi đó, từ $x + y + z = a + b + c$, ta suy ra

$$\left(\sqrt{x}\cos\frac{B}{2} - \sqrt{y}\cos\frac{A}{2}\right)^2 + \left(\sqrt{x}\sin\frac{B}{2} + \sqrt{y}\sin\frac{A}{2} - \sqrt{z}\right)^2 = 0$$

Do đó,

$$\sqrt{x}\sin\frac{B}{2} + \sqrt{y}\sin\frac{A}{2} = \sqrt{z}$$

Suy ra

$$z = \frac{a+b}{2}$$

Tương tự, ta có :

$$\begin{cases} x = \dfrac{b+c}{2} \\ y = \dfrac{c+a}{2} \end{cases}$$

Như vậy, nghiệm duy nhất của hệ phương trình là

$$\begin{cases} x = \dfrac{b+c}{2} \\ y = \dfrac{c+a}{2} \\ z = \dfrac{a+b}{2} \end{cases}$$

Bài 5: Giải hệ phương trình sau

$$\begin{cases} x(4-y^2)=8y \\ y(4-z^2)=8z \\ z(4-x^2)=8x \end{cases}$$

Giải: Ta thấy $x,y,z\neq\pm2$. Khi đó

$$\begin{cases} x=\dfrac{8y}{4-y^2} \\ y=\dfrac{8z}{4-z^2} \\ z=\dfrac{8x}{4-x^2} \end{cases}$$

Với $t\in\left(-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right)(*)$ ta đặt $x=2\tan t$

Suy ra

$$\begin{cases} z=2\tan 2t \\ y=2\tan 4t \\ x=2\tan 8t \end{cases}$$

Do đó,

$$\tan 8t=\tan t$$

$$\Leftrightarrow t=\frac{k\pi}{7}\ (k\in\mathbb{Z})\overset{(*)}{\Leftrightarrow} t\in\left\{0;\pm\frac{\pi}{7};\pm\frac{2\pi}{7};\pm\frac{3\pi}{7}\right\}$$

$$\Leftrightarrow x\in\left\{0;2\tan\pm\frac{\pi}{7};2\tan\pm\frac{2\pi}{7};2\tan\pm\frac{3\pi}{7}\right\}$$

Bài 6: Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} xy=1 \\ x(1-y^2)=2y \\ x(1-z^2)=2z \end{cases}$$

Giải: Ta thấy $y,z\neq\pm1$, do đó

$$\begin{cases} xy=1 \\ x=\dfrac{2y}{1-y^2} \\ x=\dfrac{2z}{1-z^2} \end{cases}$$

Khi đó, ta đặt

$$\begin{cases} x = \tan u \\ y = \tan v \\ z = \tan w \end{cases} \left(u, v, w \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)\right) \ (*)$$

Hệ phương trình trở thành

$$\begin{cases} \tan u = \cot v \\ \tan w = \tan 2v \\ \tan u = \tan 2w \end{cases}$$

Khi đó,

$$\begin{cases} w = 2v + k\pi \\ u = 2w + l\pi \end{cases} (k; l \in \mathbb{Z}) \Longrightarrow u = 4v + 2k\pi + l\pi$$

Do đó,

$$\tan(4v + 2k\pi + l\pi) = \cot v$$

$$\Leftrightarrow 5v = \frac{\pi}{2} + m\pi \ (m \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow v = \frac{\pi}{10} + \frac{m\pi}{5} \overset{(*)}{\Leftrightarrow} v = \left\{\pm\frac{\pi}{10}; \pm\frac{3\pi}{10}\right\}$$

Như vậy

$$\left[\begin{array}{l} x = \tan\frac{2\pi}{5}; y = \tan\frac{\pi}{10}; z = \tan\frac{\pi}{5} \\ x = -\tan\frac{2\pi}{5}; y = -\tan\frac{\pi}{10}; z = -\tan\frac{\pi}{5} \\ x = \tan\frac{\pi}{5}; y = \tan\frac{3\pi}{10}; z = \tan\frac{3\pi}{5} \\ x = -\tan\frac{\pi}{5}; y = -\tan\frac{3\pi}{10}; z = -\tan\frac{3\pi}{5} \end{array}\right.$$

<u>Bài 7:</u> Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x - 3z - 3z^2x + z^3 = 0 \\ y - 3x - 3x^2y + x^3 = 0 \\ z - 3y - 3y^2z + y^3 = 0 \end{cases}$$

(Đề nghị Olympic 30-4, 2008)

<u>Giải:</u> Hệ phương trình tương đương với

$$\begin{cases} x(1 - 3z^2) = 3z - z^3 \\ y(1 - 3x^2) = 3x - x^3 \\ z(1 - 3y^2) = 3y - y^3 \end{cases}$$

Ta thấy $x, y, z \neq \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$, do đó

$$\begin{cases} x = \dfrac{3z - z^3}{1 - 3z^2} \\ y = \dfrac{3x - x^3}{1 - 3x^2} \\ z = \dfrac{3y - y^3}{1 - 3y^2} \end{cases}$$

Ta đặt

$$x = \tan t\,, t \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right) \backslash \left\{\pm\frac{\pi}{6}\right\} \ (*)$$

Khi đó,

$$\tan 27t = \tan t \Leftrightarrow t = \frac{k\pi}{26} \ (k \in \mathbb{Z})$$

Như vậy với điều kiện $(*)$ thì nghiệm của hệ là

$$\begin{cases} x = \tan\dfrac{k\pi}{26} \\ y = \tan\dfrac{3k\pi}{26} \\ z = \tan\dfrac{9k\pi}{26} \end{cases} (k = 0; \pm 1; \dots; \pm 12)$$

Nghiệm trên thỏa điều kiện của $y, z \neq \pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

Bài 8: Giải hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} (x^2 + xy)(y + 2z) = \dfrac{1}{8} \\ x^2 + y^2 + 3xy + 4xz + 2yz = -\dfrac{3}{4} \\ x + y + z = 0 \end{cases} (x < 0 < y < z)$$

Giải: Ta có :

$$x^2 + y^2 + 3xy + 4xz + 2yz = x(x + y) + (x + y)(y + 2z) + x(y + 2z)$$

Do đó, ta đặt

$$\begin{cases} u = x \\ v = x + y \\ w = y + 2z \end{cases}$$

Hệ phương trình tương đương với

$$\begin{cases} uvw = \dfrac{1}{8} \\ uv + vw + wu = -\dfrac{3}{4} \\ u + v + w = 0 \end{cases} (u < 0; u < v < w)$$

Theo định lý Viète, ta có u, v, w là nghiệm của phương trình

$$X^2 - \frac{3}{4}X - \frac{1}{8} = 0$$

$$\Leftrightarrow 4X^3 - 3X = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} X = \cos\dfrac{\pi}{9} \\ X = \cos\dfrac{5\pi}{9} \\ X = \cos\dfrac{7\pi}{9} \end{array}\right. \Leftrightarrow \begin{cases} u = \cos\dfrac{7\pi}{9} \\ v = \cos\dfrac{5\pi}{9} \\ w = \cos\dfrac{\pi}{9} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \cos\dfrac{7\pi}{9} \\ y = \cos\dfrac{5\pi}{9} - \cos\dfrac{7\pi}{9} \\ z = \dfrac{1}{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{9} - \cos\dfrac{5\pi}{9} + \cos\dfrac{7\pi}{9}\right) \end{cases}$$

<u>Bài 9:</u> Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} 3\left(x + \dfrac{1}{x}\right) = 4\left(y + \dfrac{1}{y}\right) = 5\left(z + \dfrac{1}{z}\right) \\ xy + yz + zx = 1 \end{cases}$$

<u>Giải:</u> Ta nhận xét rằng nếu (x, y, z)là nghiệm thì $(-x, -y, -z)$ cũng là nghiệm của hệ phương trình và x, y, z phải cùng dấu. Do đó, ta có thể giả sử rằng $x, y, z > 0$.

Cùng với $xy + yz + zx = 1$, ta đặt

$$\begin{cases} x = \tan\dfrac{A}{2} \\ y = \tan\dfrac{B}{2} \\ z = \tan\dfrac{C}{2} \end{cases}$$

Với A, B, C là 3 góc của tam giác ABC.

Ta có :

$$3\left(x + \frac{1}{x}\right) = 4\left(y + \frac{1}{y}\right) = 5\left(z + \frac{1}{z}\right) \Leftrightarrow 3\left(\frac{x^2 + 1}{2x}\right) = 4\left(\frac{y^2 + 1}{2y}\right) = 5\left(\frac{z^2 + 1}{2z}\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{\sin A} = \frac{4}{\sin B} = \frac{5}{\sin C}$$

Theo định lý hàm số sin, ta có thể giả sử rằng độ dài 3 cạnh của tam giác là $a = 3, b = 4, c = 5$. Khi đó tam giác ABC vuông tại C. Ta có :

$$x = \tan\frac{A}{2} = \frac{1 - \cos A}{\sin A} = \frac{1 - \frac{4}{5}}{\frac{3}{5}} = \frac{1}{3}$$

$$y = \tan\frac{B}{2} = \frac{1 - \cos B}{\sin B} = \frac{1 - \frac{3}{5}}{\frac{4}{5}} = \frac{1}{2}$$

$$z = \tan\frac{C}{2} = \tan\frac{\pi}{4} = 1$$

Vậy nghiệm của hệ phương trình là

$$(x, y, z) = \pm\left(\frac{1}{3}; \frac{1}{2}; 1\right)$$

- **BÀI TẬP TỰ LUYỆN**

9.4.1. Giải các hệ phương trình sau

a. $\begin{cases} x^3(1 + 3y) = 8 \\ x(y^3 - 1) = 6 \end{cases}$

b. $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x + \sqrt{3}y \leq -2 \end{cases}$

c. $\begin{cases} x\sqrt{1 - y^2} + y\sqrt{1 - x^2} = 1 \\ x\sqrt{1 - y^2} - y\sqrt{1 - x^2} = \dfrac{1}{2} \end{cases}$

d. $\begin{cases} \dfrac{1 - y^2}{1 + y^2} = x \\ \dfrac{1 - x^2}{1 + x^2} = y \end{cases}$

e. $\begin{cases} x = \dfrac{y^2 - 1}{2y} \\ y = \dfrac{x^2 - 1}{2x} \end{cases}$

VI. PHƯƠNG PHÁP LƯỢNG GIÁC HÓA TRONG TÌM GIÁ TRỊ LỚN NHẤT, GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT

- Ở dạng này, ta cũng sẽ chuyển về dạng tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm lượng giác. Các bạn cần ôn lại các phương pháp tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất ở chương 8 để có thể nhanh chóng tiếp cận phương pháp này.

Bài 1: Cho các số x, y, u, v thỏa mãn hệ thức

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = p^2 \\ u^2 + v^2 = q^2 \\ xu + yv \geq pq \\ p > 0; q > 0 \end{cases}$$

Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của A $= x + v$.

Giải: Ta đặt

$$\begin{cases} x = p\sin\alpha\,; y = p\cos\alpha \\ u = q\sin\beta\,; v = q\cos\beta \end{cases} (\alpha; \beta \in [0; 2\pi])$$

Khi đó,

$$xu + yv = p\sin\alpha\,.\,q\sin\beta + p\cos\alpha\,.\,q\cos\beta = pq\cos(\alpha - \beta) \leq pq$$

Vì $xu + yv \geq pq$ nên $\cos(\alpha - \beta) = 1 \Leftrightarrow \alpha = \beta + k2\pi\ (k \in \mathbb{Z})$

Ta có :

$$x + v = p\sin\alpha + qcos\ \beta = p\sin\alpha + q\cos\alpha$$

Suy ra

$$|x + v| \leq \sqrt{p^2 + q^2}$$

Do đó,

$$\max \mathrm{A} = \sqrt{p^2 + q^2} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{\sin\alpha}{p} = \dfrac{\cos\alpha}{q} \\ p\sin\alpha + q\cos\alpha = \sqrt{p^2 + q^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin\alpha = \dfrac{p}{\sqrt{p^2 + q^2}} \\ \cos\alpha = \dfrac{q}{\sqrt{p^2 + q^2}} \end{cases}$$

$$\min \mathrm{A} = -\sqrt{p^2 + q^2} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{\sin\alpha}{p} = \dfrac{\cos\alpha}{q} \\ p\sin\alpha + q\cos\alpha = -\sqrt{p^2 + q^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin\alpha = -\dfrac{p}{\sqrt{p^2 + q^2}} \\ \cos\alpha = -\dfrac{q}{\sqrt{p^2 + q^2}} \end{cases}$$

Bài 2: Cho x, y thay đổi, thỏa $a^2x^2 + b^2y^2 = c^2\ (a, b, c > 0)$. Tìm giá trị lớn nhất

$$\mathrm{B} = |x - y|$$

Giải: Ta biến đổi

$$\frac{x^2}{\frac{c^2}{a^2}}+\frac{y^2}{\frac{c^2}{b^2}}=1$$

Nên ta đặt

$$\begin{cases} x=\frac{c}{a}\cos t \\ y=\frac{c}{b}\sin t \end{cases} (t\in[0;2\pi])$$

Khi đó,

$$|x-y|=\left|\frac{c}{a}\cos t-\frac{c}{b}\sin t\right|\le\sqrt{\frac{c^2}{a^2}+\frac{c^2}{b^2}}$$

Như vậy,

$$\max \mathrm{B}=\sqrt{\frac{c^2}{a^2}+\frac{c^2}{b^2}}\Leftrightarrow\begin{cases}\left|\frac{c}{a}\cos t-\frac{c}{b}\sin t\right|=\sqrt{\frac{c^2}{a^2}+\frac{c^2}{b^2}} \\ \frac{a}{c}\cos t=-\frac{b}{c}\sin t\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}|\sin t|=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ |\cos t|=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\end{cases}$$

Bài 3: Cho a, b thỏa mãn hệ thức

$$\begin{cases}a^2+b^2=\alpha a+\beta b+c \\ 4c>a^2+b^2\end{cases}$$

Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$\mathrm{C}=ma+nb\ (m,n>0)$$

Giải: Hệ thức đã cho viết lại thành

$$\left(a-\frac{\alpha}{2}\right)^2+\left(b-\frac{\beta}{2}\right)^2=c-\frac{\alpha^2}{4}-\frac{\beta^2}{4}$$

Với $R=\frac{1}{2}\sqrt{4c-(\alpha^2+\beta^2)}$. Ta có

$$\begin{cases}a-\frac{\alpha}{2}=R\cos t \\ b-\frac{\beta}{2}=R\sin t\end{cases} (t\in[0;2\pi])$$

$$\Rightarrow \mathrm{C}=m\left(\frac{\alpha}{2}+R\cos t\right)+n\left(\frac{\beta}{2}+R\sin t\right)$$

$$\Leftrightarrow \mathrm{C}-\frac{m\alpha+n\beta}{2}=R(m\cos t+n\sin t)$$

Do đó,

$$\left|C - \frac{m\alpha + n\beta}{2}\right| \leq R\sqrt{m^2 + n^2}$$

Như vậy,

$$\max C = R\sqrt{m^2 + n^2} + \frac{m\alpha + n\beta}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{\cos t}{m} = \dfrac{\sin t}{n} \\ C = R\sqrt{m^2 + n^2} + \dfrac{m\alpha + n\beta}{2} \end{cases}$$

$$\min C = -R\sqrt{m^2 + n^2} + \frac{ma + nb}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{\cos t}{m} = \dfrac{\sin t}{n} \\ C = -R\sqrt{m^2 + n^2} - \dfrac{m\alpha + n\beta}{2} \end{cases}$$

<u>Bài 4:</u> Cho $x, y > 0$ thỏa mãn

$$\log_{x^2+y^2}(x + y) \geq 1$$

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$D = ax + by \; (a, b > 0)$$

<u>Giải:</u> Ta xét trường hợp

- $x^2 + y^2 > 1$ khi đó, giả thiết tương đương với $x + y \geq x^2 + y^2$

Do đó, ta có hệ sau

$$\begin{cases} x^2 + y^2 > 1 \\ \left(x - \dfrac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \dfrac{1}{2}\right)^2 \leq \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Với $R > 0$, ta đặt

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{2} + R\sin t \\ y = \dfrac{1}{2} + R\cos t \end{cases} \quad (t \in [0; 2\pi])$$

Suy ra

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow R \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\Longrightarrow ax+by=\frac{a+b}{2}+R(a\sin t+b\cos t)\leq\frac{a+b}{2}+R\sqrt{a^2+b^2}\leq\frac{a+b}{2}+\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{\sqrt{2}}$$

Như vậy,

$$\max\mathrm{D}=\frac{a+b}{2}+\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{\sqrt{2}}\Leftrightarrow\begin{cases}R=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\\ \dfrac{\sin t}{a}=\dfrac{\cos t}{b}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}R=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\\ \sin t=\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\\ \cos t=\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\end{cases}$$

- $x^2+y^2<1$, ta được $x,y<1$. Suy ra

$$ax+by<a+b<\frac{a+b}{2}+\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{\sqrt{2}}$$

Tóm lại,

$$\max\mathrm{D}=\frac{a+b}{2}+\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{\sqrt{2}}$$

<u>Bài 5:</u> Cho $x,y>0$ với $x+y\leq 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$\mathrm{E}=\frac{1}{x^2+y^2}+\frac{1}{xy}+4xy$$

(ĐH Ngoại Thương Hà Nội 1995)

<u>Giải:</u> Ta đặt

$$\begin{cases}x=R\cos^2 t\\ y=R\sin^2 t\end{cases}\left(t\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right];R>0\right)\Longrightarrow R\leq 1$$

Khi đó,

$$\mathrm{E}=\frac{1}{x^2+y^2}+\frac{3}{4xy}+4xy+\frac{1}{4xy}\geq\frac{1}{x^2+y^2}+\frac{3}{4xy}+2$$

Hay

$$\mathrm{E}\geq\frac{1}{R^2(\cos^4 t+\sin^4 t)}+\frac{3}{4R^2\sin^2 t\cos^2 t}+2$$

$$\geq \frac{1}{1-\frac{1}{2}\sin^2 2t}+\frac{3}{\sin^2 2t}+2=\frac{6-\sin^2 2t}{(2-\sin^2 2t)\sin^2 2t}+2\geq 8-\sin^2 2t\geq 7$$

Như vậy,

$$\min \mathrm{E}=7 \Leftrightarrow \begin{cases} R=1 \\ \sin 2t=1 \end{cases} \Leftrightarrow x=y=\frac{1}{2}$$

Bài 6: Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$\mathrm{F}=\frac{4xy-4y^2}{x^2+y^2}$$

Giải: Ta xét trường hợp

- $y=0$ thì $\mathrm{F}=0$.
- $y\neq 0$, ta chia tử và mẫu cho y^2. Khi đó

$$\mathrm{F}=\frac{\frac{4x}{y}-4}{\frac{x^2}{y^2}+1}$$

Đặt $\frac{x}{y}=\tan t\,, t\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$ $(*)$. Ta có

$$\mathrm{F}=\frac{4\tan t-4}{\tan^2 t+1}=4\sin t\cos t-4\cos^2 t=2\sqrt{2}\sin\left(2t-\frac{\pi}{4}\right)-2$$

Do đó,

$$\max \mathrm{F}=2\sqrt{2}-2 \Leftrightarrow \sin\left(2t-\frac{\pi}{4}\right)=1 \Leftrightarrow t=\frac{3\pi}{8}+k\pi\ (k\in\mathbb{Z})$$

$$\overset{(*)}{\Leftrightarrow} t=\frac{3\pi}{8} \Leftrightarrow \frac{x}{y}=\tan\frac{3\pi}{8}$$

$$\min \mathrm{F}=-2\sqrt{2}-2 \Leftrightarrow \sin\left(2t-\frac{\pi}{4}\right)=-1 \Leftrightarrow t=-\frac{\pi}{8}+k\pi\ (k\in\mathbb{Z})$$

$$\overset{(*)}{\Leftrightarrow} t=-\frac{\pi}{8} \Leftrightarrow \frac{x}{y}=-\tan\frac{\pi}{8}$$

Bài 7: Cho $x, y, z > 0$ sao cho $x + y + z = 1$. Tìm giá trị lớn nhất của

$$\mathrm{G} = \frac{x}{x + yz} + \frac{y}{y + zx} + \frac{\sqrt{xyz}}{z + xy}$$

(Đề nghị Olympic 30-4, 2006)

Giải: Ta thấy

$$1 = x + y + z = \sqrt{\frac{xy}{z}}.\sqrt{\frac{xz}{y}} + \sqrt{\frac{yz}{x}}.\sqrt{\frac{yx}{z}} + \sqrt{\frac{zx}{y}}.\sqrt{\frac{zy}{x}}$$

Do đó, với $\mathrm{A, B, C}$ là 3 góc của tam giác ABC. Ta đặt

$$\begin{cases} \dfrac{yz}{x} = \tan^2\dfrac{\mathrm{A}}{2} \\ \dfrac{zx}{y} = \tan^2\dfrac{\mathrm{B}}{2} \\ \dfrac{xy}{z} = \tan^2\dfrac{\mathrm{C}}{2} \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \mathrm{G} = \frac{1}{1 + \tan^2\frac{\mathrm{A}}{2}} + \frac{1}{1 + \tan^2\frac{\mathrm{B}}{2}} + \frac{\tan\frac{\mathrm{C}}{2}}{1 + \tan^2\frac{\mathrm{C}}{2}} = \cos^2\frac{\mathrm{A}}{2} + \cos^2\frac{\mathrm{B}}{2} + \frac{1}{2}\sin \mathrm{C}$$

$$= 1 + \frac{1}{2}\left(\cos \mathrm{A} + \cos \mathrm{B} + \sin \mathrm{C} + \sin\frac{\pi}{3}\right) - \frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$\leq 1 - \frac{\sqrt{3}}{4} + \cos\frac{\mathrm{A+B}}{2}\cos\frac{\mathrm{A-B}}{2} + \sin\frac{\mathrm{C} + \frac{\pi}{3}}{2}\cos\frac{\mathrm{C} - \frac{\pi}{3}}{2}$$

$$\leq 1 - \frac{\sqrt{3}}{4} + \cos\frac{\mathrm{A+B}}{2} + \cos\frac{\mathrm{A + B - C} + \frac{\pi}{3}}{4} \leq 1 - \frac{\sqrt{3}}{4} + 2\cos\frac{\pi}{6}$$

$$\leq 1 + \frac{3\sqrt{3}}{4}$$

Như vậy,

$$\max \mathrm{G} = 1 + \frac{3\sqrt{3}}{4} \Leftrightarrow \begin{cases} \mathrm{A = B} = \dfrac{\pi}{6} \\ \mathrm{C} = \dfrac{2\pi}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y = 2\sqrt{3} - 3 \\ z = 7 - 4\sqrt{3} \end{cases}$$

Bài 8: Tìm a, b để hàm số

$$y = \frac{ax+b}{x^2+1}$$

Nhận giá trị lớn nhất bằng 4 và giá trị nhỏ nhất bằng -1.

Giải: Ta đặt

$$x = \tan t\,, t \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$$

Suy ra

$$y = \frac{a\tan t + b}{\tan^2 t + 1} = \frac{1}{2}a\sin 2t + \frac{1}{2}b\cos 2t + \frac{b}{2}$$

Ta có :

$$\left|\frac{1}{2}a\sin 2t + \frac{1}{2}b\cos 2t\right| \le \frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2}$$

Do đó,

$$\begin{cases} \max y = \frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2} + \frac{b}{2} = 4 \\ \min y = -\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2} + \frac{b}{2} = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b + \sqrt{a^2+b^2} = 8 \\ b - \sqrt{a^2+b^2} = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a = 4 \\ b = 3 \end{cases} \\ \begin{cases} a = -4 \\ b = 3 \end{cases} \end{array}\right.$$

- **BÀI TẬP TỰ LUYỆN**

9.5.1. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số với $x \in [-1; 1]$

$$y = (1+x)^{2004} + (1-x)^{2004}$$

9.5.2. Với x, y thay đổi thỏa mãn $\begin{cases} x, y > 0 \\ x + y = 1 \end{cases}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của

$$\mathrm{P} = x^2 + y^2 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2}$$

9.5.3. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số

$$y = \frac{1+x^4}{(1+x^2)^2}$$

9.5.4. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số

$$y = \frac{3+8x^2+12x^4}{(1+2x^2)^2}$$

9.5.5. Cho x, y thỏa mãn hệ thức $4x^2 + 9y^2 = 16$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$\mathrm{H} = 2x + 3\sqrt{3}y + 13$$

9.5.6. Cho $a, b > 0$ và $x, y \geq 0$ thỏa hệ thức $x^2 + y^2 = 1$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$\mathrm{S} = ax + by$$

9.5.7. Cho $x, y \geq 0$ thỏa $x + y = 1$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$\mathrm{T} = x + y - kxy\ (k \neq 0)$$

9.5.8. Cho 4 số a, b, c, d thỏa $a^2 + b^2 + 1 = 2(a + b)$ và $c^2 + d^2 + 36 = 12(c + d)$. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$\mathrm{F} = \sqrt{(a-c)^2 + (b-d)^2}$$

(Đề nghị Olympic 30-4, 2008)

9.5.9. Cho $x, y, z > 0$ thỏa mãn $xz - yz - xy = 1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$\mathrm{Q} = \frac{2x^2}{1 + x^2} - \frac{2y^2}{1 + y^2} + \frac{3z^2}{1 + z^2}$$

9.5.10. Cho $a, b, c > 0$ và $2006ac + ab + bc = 2006$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$\mathrm{K} = \frac{2}{a^2 + 1} - \frac{2b^2}{b^2 + 2006^2} + \frac{3}{c^2 + 1}$$

9.5.11. Cho $a, b, c > 0$ và $a^2 + b^2 + c^2 + 2abc = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$\mathrm{M} = \frac{1}{1 - a^2} + \frac{1}{1 - b^2} + \frac{1}{c^2} - (a^2 + b^2 + c^2)$$

- GỢI Ý GIẢI BÀI TẬP TỰ LUYỆN

9.5.1.

$$\max y = 2^{2004}$$

9.5.2.

$$\min \mathrm{P} = \frac{17}{2}$$

9.5.3.

$$\begin{cases} \max y = 1 \\ \min y = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

9.5.4.

$$\begin{cases} \max y = 3 \\ \min y = \dfrac{5}{2} \end{cases}$$

9.5.5.

$$\begin{cases} \max y = 21 \\ \min y = 5 \end{cases}$$

9.5.6.

$$\begin{cases} \max \mathrm{S} = \sqrt{a^2 + b^2} \\ \left[\begin{array}{l} \min \mathrm{S} = a \\ \min \mathrm{S} = b \end{array}\right. \end{cases}$$

9.5.7.

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} \max \mathrm{T} = 1 - \dfrac{k}{4} \\ \min \mathrm{T} = 1 \\ k < 0 \end{cases} \\ \begin{cases} \max \mathrm{T} = 1 \\ \min \mathrm{T} = 1 - \dfrac{k}{4} \\ k > 0 \end{cases} \end{array}\right.$$

9.5.8.

$$\begin{cases} \max \mathrm{F} = 5\sqrt{2} + 7 \\ \min \mathrm{F} = 5\sqrt{2} - 7 \end{cases}$$

9.5.9.

$$\max \mathrm{Q} = \frac{10}{3}$$

9.5.10.

$$\max \mathrm{K} = \frac{10}{3}$$

9.5.11.

$$\min \mathrm{M} = \frac{13}{4}$$

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] Huỳnh Công Thái, Đậu Thế Cấp, Các chuyên đề - Tìm cực trị và Chứng minh bất đẳng thức chứa hàm lượng giác, NXB Đại học Quốc Gia Tp.HCM, 2007.

[2] Nguyễn Văn Nho, Nguyễn Văn Thổ, Chuyên đề Lượng giác, NXB Tổng hợp Tp.HCM, 2007.

[3] Võ Giang Giai, Tuyển tập 400 bài toán lượng giác, NXB Đại học Sư Phạm, 2007.

[4] Phạm Tấn Phước, Các chuyên đề Lượng giác, NXB Tp.HCM, 1999.

[5] Lê Hồng Đức, Đào Thiện Khải, Lê Bích Ngọc, Phương pháp giải toán Lượng giác – Phương pháp Lượng Giác Hóa, NXB Đại học Sư Phạm, 2006.

[6] Titu Andreescu, Zuming Feng, 103 Trigonometry Problems : From the Training of the USA IMO team, Birkhauser, 2004.

[7] Tuyển tập đề thi Olympic 30 tháng 4, Lần XII – 2006, Toán học, NXBGD, 2006.
Tuyển tập đề thi Olympic 30 tháng 4, Lần XIII – 2007, Toán học, NXBGD, 2007.
Tuyển tập đề thi Olympic 30 tháng 4, Lần XIV – 2008, Toán học, NXBGD, 2008.
Tuyển tập đề thi Olympic 30 tháng 4, Lần XV – 2009, Toán học, NXBGD, 2009.
Tuyển tập đề thi Olympic 30 tháng 4, Lần XVI – 2010, Toán học, NXBGD, 2010.