PHẦN CHUNG:

Câu I:

1. $y = f(x) = -x^3 - 3x^2 + 4$

a. TXĐ: $D = \mathbb{R}$

b. Sự biến thiên

*) Giới hạn và tiệm cận

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty}\left(-x^3 - 3x^2 + 4\right) = \mp\infty$$

$\Rightarrow$ Đồ thị hàm số không có tiệm cận.

*) Chiều biến thiên

$$y' = f'(x) = -3x^2 - 6x; \quad y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = -2 \end{array}\right.$$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		2		0		$+\infty$
$f'(x)$		-	$\mid$	+	$\mid$	-	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	4	$\searrow$	$-\infty$

-Hàm số đồng biến trên $\left(-2;0\right)$

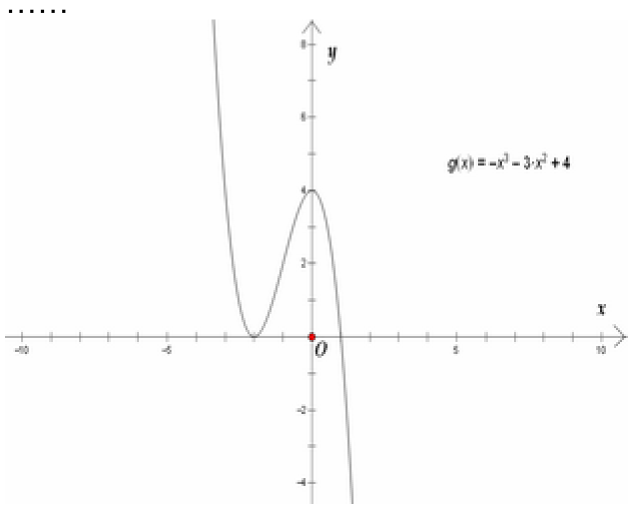
-Hàm số nghịch biến trên $\left(-\infty;-2\right)\cup\left(0;+\infty\right)$

-Hàm số đạt Cực đại tại $x = 0 \Leftrightarrow y_{CĐ} = 4$

-Hàm số đạt Cực tiểu tại $x = -2 \Leftrightarrow y_{CT} = 0$

c. Đồ thị

……



2.Gọi A,B lần lượt là điểm CĐ và CT của ĐTHS.

$\Rightarrow A(0;4), B(-2;0)$

PT đường thẳng qua 2 điểm cực trị :

(AB): $y = 2x + 4$

$\Leftrightarrow$ (AB): $2x - y + 4 = 0$

Ta có $(C): (x-m)^2 + (y-m-1)^2 = 5$

Tâm $I(m; m+1)$ và $R = \sqrt{5}$

Theo bài: (C) tiếp xúc với AB

$$\Rightarrow d(I; AB) = R \Leftrightarrow \frac{|2m-(m+1)+4|}{\sqrt{2^2+1^2}} = \sqrt{5}$$

$$\Leftrightarrow |m+3| = 5 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m+3=5 \\ m+3=-5 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=2 \\ m=-8 \end{array}\right.$$

Vậy $\boxed{m = 2 \text{ và } m = -8}$ là giá trị cần tìm □

<u>Câu II:</u>

1.

$$2\cos^2\left(\frac{\pi}{2}\cos^2 x\right) = 1 + \cos(\pi \sin 2x)$$

$$\Leftrightarrow 1 + \cos(\pi \cos^2 x) = 1 + \cos(\pi \sin 2x)$$

$$\Leftrightarrow \cos(\pi \cos^2 x) = \cos(\pi \sin 2x)$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \pi \cos^2 x = \pi \sin 2x + k2\pi \\ \pi \cos^2 x = -\pi \sin 2x + k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos^2 x = \sin 2x + 2k \\ \cos^2 x = -\sin 2x + 2k \end{array}\right.$$

Do $\cos^2 x, \sin 2x \in [-1,1], k \in \mathbb{Z}$ nên $k = 0$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \cos^2 x = \sin 2x \\ \cos^2 x = -\sin 2x \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x = 2\sin x \cos x \\ \cos x = -2\sin x \cos x \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x = 0 \\ \tan x = \dfrac{-1}{2} \\ \tan x = \dfrac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{2} + k'\pi \\ x = \arctan\dfrac{-1}{2} + k'\pi \\ x = \arctan\dfrac{1}{2} + k'\pi \end{array}\right. \ (k' \in \mathbb{Z})$$

Thử lại thấy thỏa mãn.

Vậy phương trình đã cho có 3 họ nghiệm là:

$$\boxed{x = \frac{\pi}{2} + k'\pi ; x = \arctan\frac{-1}{2} + k'\pi ; x = \arctan\frac{1}{2} + k'\pi \quad \text{với } k' \in \mathbb{Z}}$$ □

2.

$$\sqrt{2x+4}-2\sqrt{2-x}=\frac{12x-8}{\sqrt{9x^2+16}}\ (*)$$

ĐK: $x\in\left[-2,2\right]$

$$(*)\Rightarrow\frac{2x+4-4(2-x)}{\sqrt{2x+4}+2\sqrt{2-x}}=\frac{12x-8}{\sqrt{9x^2+16}}\quad\left(Do\sqrt{2x+4}+2\sqrt{2-x}\neq 0\right)$$

$$\Leftrightarrow\frac{6\left(x-\frac{2}{3}\right)}{\sqrt{2x+4}+2\sqrt{2-x}}=\frac{12\left(x-\frac{2}{3}\right)}{\sqrt{9x^2+16}}$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x=\frac{2}{3}\ (TM)\\ \frac{1}{\sqrt{2x+4}+2\sqrt{2-x}}=\frac{2}{\sqrt{9x^2+16}}\ (1)\end{array}\right.$$

Giải (1):

$(1)\Leftrightarrow\sqrt{9x^2+16}=2\sqrt{2x+4}+4\sqrt{2-x}$

$\Leftrightarrow 9x^2+16=4(2x+4)+16(2-x)+16\sqrt{2x+4}.\sqrt{2-x}$

$\Leftrightarrow 9x^2+8x-32=16\sqrt{8-2x^2}$

Đặt: $2\sqrt{8-2x^2}=t\Rightarrow t^2=32-8x^2$

$PT\Leftrightarrow 9x^2+8x-32=8t$

$\Leftrightarrow x^2+8x=8t+32-8x^2$

$\Leftrightarrow x^2+8x=t^2+8t$

$\Leftrightarrow(x+4)^2=(t+4)^2$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x=t\\ x+t=-8\ \left(\text{Loại do } x\geq -2; t\geq 0\rightarrow VT\geq -2>-8\right)\end{array}\right.$$

Với $x=t$

Ta có: $x=2\sqrt{8-2x^2}\Leftrightarrow\begin{cases}x\geq 0\\ x^2=4\left(8-2x^2\right)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\geq 0\\ x^2=\frac{32}{9}\end{cases}\Rightarrow x=\frac{4\sqrt{2}}{3}\ (TM)$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm $\boxed{x=\frac{4\sqrt{2}}{3}\ \text{và}\ x=\frac{2}{3}}$

Câu III:

$I = \int_0^{\pi} \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx$

Đặt $t = \pi - x \Rightarrow dt = -dx$

Đổi cận: $x = 0 \to t = \pi ; x = \pi \to t = 0$

Ta có: $I = \int_{\pi}^{0} \frac{(\pi - t)\sin(\pi - t)}{1+\cos^2(\pi - t)}(-dt) = \int_0^{\pi} \frac{(\pi - t)\sin(\pi - t)}{1+\cos^2(\pi - t)}dt = \int_0^{\pi} \frac{(\pi - t)\sin t}{1+\cos^2 t}dt$

$\Leftrightarrow I = \pi\int_0^{\pi} \frac{\sin t}{1+\cos^2 t}dt - \int_0^{\pi} \frac{t\sin t}{1+\cos^2 t}dt = \pi\int_0^{\pi} \frac{\sin x}{1+\cos^2 x}dt - \int_0^{\pi} \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dt = \pi\int_0^{\pi} \frac{\sin x}{1+\cos^2 x}dt - I$

$\Leftrightarrow 2I = \pi\int_0^{\pi} \frac{\sin x}{1+\cos^2 x}dt = -\pi\int_0^{\pi} \frac{d(\cos x)}{1+\cos^2 x}$

Đặt $\cos x = \tan a \Rightarrow d(\cos x) = \frac{da}{\cos^2 a}$

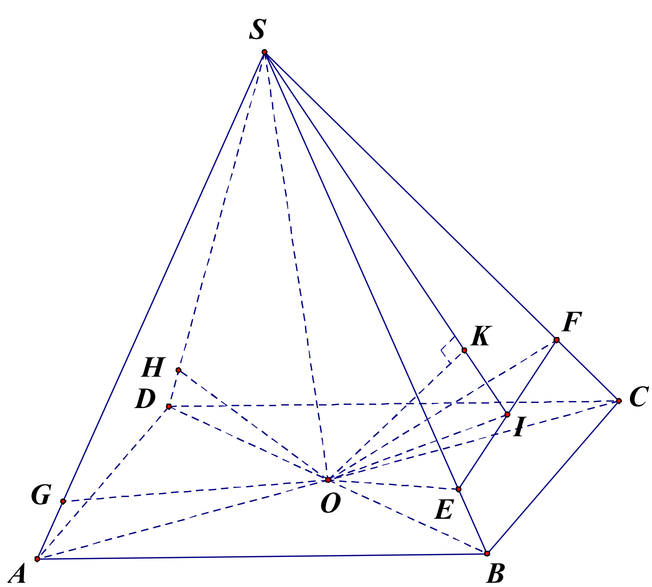
Đổi cận: $x = 0 \to a = \frac{\pi}{4} ; x = \pi \to a = -\frac{\pi}{4}$

$2I = -\pi \int_{\frac{\pi}{4}}^{-\frac{\pi}{4}} \frac{da}{\cos^2 a(1+\tan^2 a)} = \pi \int_{\frac{-\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{da}{\cos^2 a.\frac{1}{\cos^2 a}} = \pi \int_{\frac{-\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} da = \pi . a\Big|_{\frac{-\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi^2}{2}$

$\Rightarrow I = \frac{\pi^2}{4}$

Vậy $\boxed{I = \frac{\pi^2}{4}}$ □.

Câu IV:



Kẻ $OE;OF;OG;OH$ vuông góc với SO

với $E;F;G;H$ lần lượt nằm trên $SB;SC;SA;SD$

Ta có: $(SAC)\perp(SBD);(SAC)\cap(SBD)=SO$

$$\begin{cases} OE\in(SBD) \\ OE\perp SO \end{cases}\Rightarrow OE\perp(SAC)\Rightarrow OE\perp OF$$

$\Rightarrow OE;OF;OS$ đôi một vuông góc $\Rightarrow O.EFS$ là một tứ diện vuông.

Kẻ $SI\perp EF;I\in EF$

Ta có: $SO\perp OE;SO\perp OF\Rightarrow SO\perp(OEF)\Rightarrow SO\perp EF$

Như vậy: $\begin{cases} SO\perp EF \\ SI\perp EF \end{cases}\Rightarrow EF\perp(SIO)\Rightarrow(SIO)\perp(SEF)$

Kẻ $OK\perp SI\Rightarrow OK\perp(SEF)\Rightarrow OK=d\big(O;(SBC)\big)=q$

Xét : ΔSOI vuông tại O $(do\,SO\perp mpOEF)$;có $OK\perp SI$

$$\Rightarrow\frac{1}{OK^2}=\frac{1}{SO^2}+\frac{1}{OI^2}$$

Xét : ΔEOF vuông tại O $\big(do\,FO\perp(SOE)\big)$;có $OI\perp EF$ $(do\,EF\perp mpSIO)$

$$\Rightarrow\frac{1}{OI^2}=\frac{1}{OE^2}+\frac{1}{OF^2}$$

Ta có được : $\frac{1}{OK^2}=\frac{1}{SO^2}+\frac{1}{OE^2}+\frac{1}{OF^2}$

$$\Leftrightarrow\frac{1}{q^2}=\frac{1}{SO^2}+\frac{1}{OE^2}+\frac{1}{OF^2}$$

Hoàn toàn tương tự ta có được:

$$\frac{1}{p^2}=\frac{1}{SO^2}+\frac{1}{OE^2}+\frac{1}{OG^2}$$

$$\frac{1}{u^2}=\frac{1}{SO^2}+\frac{1}{OF^2}+\frac{1}{OH^2}$$

$$\frac{1}{v^2}=\frac{1}{SO^2}+\frac{1}{OH^2}+\frac{1}{OG^2}$$

Từ đó có được: $\frac{1}{p^2}+\frac{1}{u^2}=\frac{1}{q^2}+\frac{1}{v^2}=\frac{2}{SO^2}+\frac{1}{OE^2}+\frac{1}{OF^2}+\frac{1}{OG^2}+\frac{1}{OH^2}$

$$\Rightarrow\frac{1}{p^2}+\frac{1}{u^2}=\frac{1}{q^2}+\frac{1}{v^2}\ (\text{đpcm})$$

Câu V:

Đặt $a=\frac{x}{y};b=\frac{y}{z};c=\frac{z}{x} \quad \Rightarrow abc=1$

Do $x,y,z\in[1;3]$ nên $a,b,c\in\left[\frac{1}{3};3\right]$

Ta chứng minh:

$$a+b+c+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\le\frac{26}{3}$$

$$\Leftrightarrow a+b+c+ab+bc+ca\le\frac{26}{3} \quad (*) \quad (Do\ abc=1)$$

Do $a,b,c\in\left[\frac{1}{3};3\right]$ nên ta có:

$$(a-3)(b-3)(c-3)\le 0$$

$$\Leftrightarrow abc-3(ab+bc+ac)+9(a+b+c)-27\le 0$$

$$\Leftrightarrow 9(a+b+c)-3(ab+bc+ac)\le 27-abc$$

$$\Leftrightarrow 9(a+b+c)-3(ab+bc+ac)\le 26 \quad (1) \quad (Do\ abc=1)$$

Mặt khác ra cũng có:

$$\left(a-\frac{1}{3}\right)\left(b-\frac{1}{3}\right)\left(c-\frac{1}{3}\right)\ge 0$$

$$\Leftrightarrow (3a-1)(3b-1)(3c-1)\ge 0$$

$$\Leftrightarrow 27abc-9(ab+ac+bc)+3(a+b+c)-1\ge 0$$

$$\Leftrightarrow 9(ab+ac+bc)-3(a+b+c)\le 27abc-1$$

$$\Leftrightarrow 9(ab+ac+bc)-3(a+b+c)\le 26 \ (2)$$

Cộng theo vế (1) và (2) ta được:

$$6(a+b+c)+6(ab+ac+bc)\le 26.2$$

$$\Leftrightarrow (a+b+c)+(ab+ac+bc)\le\frac{26}{3}$$

Như vậy BĐT (*) được chứng minh. Từ đó có được đpcm □.

PHẦN RIÊNG:

Câu VIa.

1.

Theo bài:

$$\begin{cases} B\in\Delta:\sqrt{3}x-y-\sqrt{3}=0 \\ B\in Ox \end{cases}\Rightarrow B(1;0)$$

Do ΔABC vuông tại A, A và B cùng thuộc Ox nên $AC\perp Ox\Rightarrow x_A=x_C$

Mặt khác: $C \in \Delta; A \in Ox$ nên $C\left(a;\sqrt{3}\left(a-1\right)\right); A\left(a;0\right)$

Do C không trùng B nên $a \neq 1$

Ta có: $\begin{cases} S_{ABC} = pr \quad (p \text{ là nửa chu vi, } r \text{ là bán kính đường tr□n nội tiếp } \Delta ABC) \\ S_{ABC} = \dfrac{1}{2}AB.AC \quad (\text{ Do } \Delta ABC \text{ vuông tại } A) \end{cases}$

$\Rightarrow AB.AC = 2pr$

$\Leftrightarrow AB.AC = \left(AB + AC + BC\right).2 \ (*) \ \left(Do \ r = 2\right)$

Với các điểm A, B, C như trên ta có:

$AB = \left|a-1\right|; AC = \left|\sqrt{3}\left(a-1\right)\right|; BC = \left|2\left(a-1\right)\right|$

Thay vào $(*)$ ta được:

$\left|a-1\right|.\left|\sqrt{3}\left(a-1\right)\right| = 2\left(\left|a-1\right| + \left|\sqrt{3}\left(a-1\right)\right| + \left|2\left(a-1\right)\right|\right)$

$\Leftrightarrow \sqrt{3}\left(a-1\right)^2 = 2\left(3+\sqrt{3}\right)\left|a-1\right|$

$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{3}\left(a-1\right) = 2\left(3+\sqrt{3}\right) \\ \sqrt{3}\left(a-1\right) = -2\left(3+\sqrt{3}\right) \end{array}\right. (\text{Do } a \neq 1)$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = \dfrac{2\left(3+\sqrt{3}\right)}{\sqrt{3}} + 1 \\ a = \dfrac{-2\left(3+\sqrt{3}\right)}{\sqrt{3}} + 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 3 + 2\sqrt{3} \\ a = -1 - 2\sqrt{3} \end{array}\right. (TM)$

*Với $a = 3 + 2\sqrt{3}$

Ta có: $A\left(3+2\sqrt{3};0\right); C\left(3+2\sqrt{3};6+2\sqrt{3}\right); B\left(1;0\right)$

Suy ra : $G\left(\dfrac{7+4\sqrt{3}}{3};\dfrac{6+2\sqrt{3}}{3}\right)$

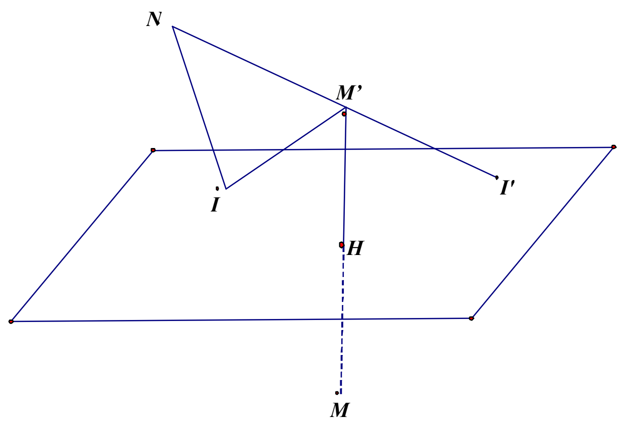
*Với $a = 1 - 2\sqrt{3}$

Ta có: $A\left(-1-2\sqrt{3};0\right); C\left(-1-2\sqrt{3};-6-2\sqrt{3}\right); B\left(1;0\right)$

Suy ra : $G\left(\dfrac{-2-4\sqrt{3}}{3};\dfrac{-6-2\sqrt{3}}{3}\right)$

Vậy $\boxed{G\left(\dfrac{7+4\sqrt{3}}{3};\dfrac{6+2\sqrt{3}}{3}\right) \text{ và } G\left(\dfrac{-2-4\sqrt{3}}{3};\dfrac{-6-2\sqrt{3}}{3}\right)}$ là hai điểm cần tìm □.

2.



Gọi Δ là đường thẳng qua $M(3;1;0)$ và vuông góc với $(\alpha) \Rightarrow vtcp\ \overrightarrow{n_\Delta}(2;-1;1)$

$$\Rightarrow pt\,\Delta: \begin{cases} x = 3+2t \\ y = 1-t \\ z = t \end{cases}$$

Gọi H là hình chiếu của M trên (α).

Ta có: $H \in \Delta \Rightarrow H(3+2t;1-t;t)$

Mặt khác: $H \in (\alpha) \Rightarrow 2(3+2t)-(1-t)+t+1=0$

$$\Leftrightarrow t=-1 \Rightarrow H(1;2;-1)$$

Gọi M' là điểm đối xứng của M qua (α).

Khi đó H là trung điểm của MM'

$\Rightarrow M'(-1;3;-2)$

Ta có: $\overrightarrow{M'N}(-8;1;11)$ là $vtcp$ của đường thẳng $M'N$

$$\Rightarrow pt\,M'N: \begin{cases} x = -1-8t' \\ y = 3+t' \\ z = -2+11t' \end{cases}$$

Gọi I' là giao điểm của NM' với (α)

$I' \in M'N \Rightarrow I'(-1-8t';3+t';-2+11t')$

Mà $I' \in (\alpha) \Rightarrow 2(-1-8t')-(3+t')+(-2+11t')+1=0$

$$\Leftrightarrow t'=-1 \Rightarrow I'(7;2;-13)$$

Ta có: $|IM-IN| = |IM'-IN| \le |M'N|$

Dấu " = " xảy ra khi $I = M'N \cap (\alpha) \Leftrightarrow I \equiv I'$

$\Rightarrow |IM-IN|_{max} = |M'N|$ khi và chỉ khi $I(7;2;-13)$

Vậy $\boxed{I(7;2;-13)}$ là điểm cần tìm □.

Câu VIIa.

Gọi $z = x + yi$

Ta có: $|z - i| + |z + i| = 4$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2 + (y-1)^2} + \sqrt{x^2 + (y+1)^2} = 4$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2 + (y-1)^2} = 4 - \sqrt{x^2 + (y+1)^2}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4 - \sqrt{x^2 + (y+1)^2} \geq 0 \\ x^2 + (y-1)^2 = 16 + x^2 + (y+1)^2 - 8\sqrt{x^2 + (y+1)^2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x^2 + (y+1)^2} \leq 4 \\ -2y = 16 + 2y - -8\sqrt{x^2 + (y+1)^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + (y+1)^2 \leq 16 \\ y + 4 = 2\sqrt{x^2 + (y+1)^2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + (y+1)^2 \leq 16 \\ y \geq -4 \\ y^2 + 8y + 16 = 4x^2 + 4y^2 + 8y + 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + (y+1)^2 \leq 16 \\ y \geq -4 \\ 4x^2 + 3y^2 = 12 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + (y+1)^2 \leq 16 \\ y \geq -4 \\ \dfrac{x^2}{3} + \dfrac{y^2}{4} = 1 \end{cases}$$

Như vậy tập hợp các điểm biểu diễn số phức z là các điểm nằm trong

Hình tr□n $x^2 + (y+1)^2 \leq 16$ và Elip $\dfrac{x^2}{3} + \dfrac{y^2}{4} = 1$ sao cho các điểm

trên Elip luôn thỏa mãn: $y \geq -4$.

Bằng hình v□ta suy ra được tập hợp các điểm biểu diễn z là Elip: $\dfrac{x^2}{3} + \dfrac{y^2}{4} = 1$

Vậy tập hợp các điểm biểu diễn số phức z là Elip: $\dfrac{x^2}{3} + \dfrac{y^2}{4} = 1$ □.

____________________HẾT______________________