Задачи олимпиады Санкт-Петербурга
среди студентов технических вузов
4 мая 2008 года

1. Как изменится определитель 2008-го порядка $\det\{a_{ik}\}$, если каждый его элемент a_{ik} умножить на 2008^{i-k}? А определитель 2007-го порядка?

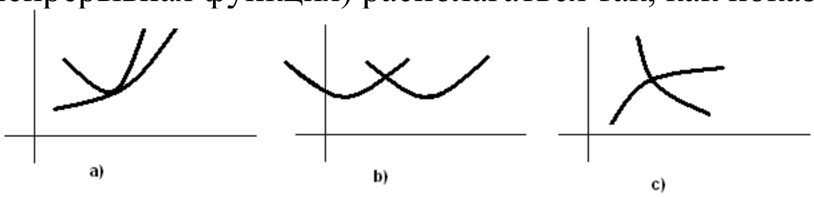
(3 балла)

2. Вычислить $\int\limits_0^{2008} x(x-4)(x-8)\cdot\ldots\cdot(x-2008)\,dx$ (3 балла)

3. Найти сумму ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^{4n}}{(4n)!}$ (4 балла)

4. Найти кривую, образованную центрами окружностей, касающихся данной окружности и проходящих через данную точку. (4 балла)

5. Могут ли графики двух решений уравнения $y''+q(x)y=0$ ($q(x)$ – непрерывная функция) располагаться так, как показано на рисунке?



(5 баллов)

6. Найти общее решение дифференциального уравнения

$$5y+y'^2=x(x+y')$$

(6 баллов)

7. Доказать, что многочлен $x^{18n}(x^5+1)+x^{12n+1}(x^2+1)+x^{6n+2}(x^2+1)$, $n\in\mathbb{N}$ делится на многочлен $x^5+x^4+x^3+x^2+x+1$. (6 баллов)

8. Даны n комплексных чисел $c_1,c_2,\ldots,c_n$ таких, что изображающие их точки плоскости являются вершинами выпуклого n-угольника. Доказать, что если $(z-c_1)^{-1}+(z-c_2)^{-1}+\ldots+(z-c_n)^{-1}=0$, то отвечающая z точка плоскости лежит внутри этого n-угольника. (7 баллов)

9. В действительной квадратной матрице заданы все элементы, кроме лежащих на диагонали. Доказать, что на пустых местах можно расставить нули и единицы так, чтобы матрица оказалась невырожденной. (7 баллов)

10. Вычислить $\int\limits_0^{\infty}\int\limits_0^{\infty}|\ln x-\ln y|e^{-(x+y)}\,dxdy$ (7 баллов)

11. Показать, что для любого фиксированного целого $m\ge 2$ ряд сходится только для одного фиксированного значения x и найти сумму ряда для этого x. (9 баллов)

$$1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{m-1}-\frac{x}{m}+\frac{1}{m+1}+\frac{1}{m+2}+\ldots+\frac{1}{2m-1}-\frac{x}{2m}+\frac{1}{2m+1}+\ldots+\frac{1}{3m-1}-\frac{x}{3m}+\frac{1}{3m+1}+\ldots$$

12. Пусть A и B - эрмитовы матрицы n- го порядка, $A^2 = A, B^2 = B,$ $AB = -BA,$ X – матрица столбец $\left(X \in \mathbb{C}^n \right)$, X^* – транспонированная и комплексно сопряженная матрица, $X^* X = 1$. Доказать, что $\left(X^* A X \right)^2 + \left(X^* B X \right)^2 \le 1.$ (10 баллов)