Математическая олимпиада Санкт-Петербурга
среди студентов технических вузов 2009 года

1. Доказать, что $\left(1+\frac{1}{4}\right)\left(1+\frac{1}{8}\right)\ldots\left(1+\frac{1}{2^n}\right)<2,\ n\geq 2$ *(3 балла)*

2. Доказать, что $\sin x+\arcsin x>2x$ при $x>0$. *(4 балла)*

3. Доказать, что интеграл $\int\limits_0^\infty \frac{dx}{\left(1+x^2\right)\left(1+x^\alpha\right)}$ не зависит от α. *(4 балла)*

4. Доказать, что все решения уравнения $\left(1+x^2+y^2\right)y'=1$ ограничены на всей оси. *(4 балла)*

5. Существуют ли такие ортогональные матрицы X и Y порядка 3×3, что

$$X^3Y^2X^5Y^7X^4Y^5=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}?$$ *(5 баллов)*

6. Найдите общий вид всех многочленов над $\mathbb{R}$, которые делятся без остатка на сумму своих производных всех порядков. *(6 баллов)*

7. Круг радиуса r катится без скольжения по окружности $x^2+y^2=R^2$ $\left(R>r\right)$, оставаясь внутри нее. Траектория некоторой точки M окружности катящегося круга называется гипоциклоидой. Во что превращается гипоциклоида при $r=R/2$? Ответ обосновать. *(6 баллов)*

8. Доказать, что $\int\limits_0^1 \sqrt[q]{1-x^p}\,dx=\int\limits_0^1 \sqrt[p]{1-x^q}\,dx$ при любых $p,q\in\mathbb{N}$. *(6 баллов)*

9. Доказать, что кривая $\vec{r}=\left(t^2-1,\,t^2+2,\,t^3\right)$ - плоская, и найти уравнение плоскости, в которой она лежит. *(8 баллов)*

10. Последовательность задана рекуррентно:

$x_1=0,\ x_2=1,\ x_n=\left(n-1\right)\left(x_{n-1}+x_{n-2}\right),\ n\geq 3.$ Найти $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{n!}$. *(8 баллов)*

11. Найти все определенные на $(0,\infty)$ дважды дифференцируемые функции f такие, что для любого x: $f'(x)>0$ и $f\left(f'(x)\right)=-f(x)$. *(10 баллов)*

12. Известно, что матрицы A,B,C попарно перестановочны. Доказать, что найдутся вещественные числа α,β,γ, не все равные нулю, такие, что $\det\left(\alpha A+\beta B+\gamma C\right)=0$. *(10 баллов)*