Задачи олимпиады Санкт-Петербурга среди студентов технических вузов 2002 года

1. $x_1 > 0,\ x_{n+1} = \dfrac{x_n}{1+nx_n^2}$. Доказать, что существует предел $\lim x_n$ и найти его.

(2 балла)

2. Найти $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k\sqrt{k+1}+(k+1)\sqrt{k}}$.

(2 балла)

3. Найти $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}[kx]$. Здесь $[\alpha]$ – целая часть числа α.

(3 балла)

4. Вычислить $\displaystyle\int_0^{2\pi}\sin(\sin x+nx)dx$, где n – целое.

(4 балла)

5. Равносторонние треугольники со сторонами 1,3,5,7,… выстроены в ряд так, что их основания расположены на одной прямой и вплотную примыкают друг к другу. Докажите, что вершины треугольников, противоположные основаниям, лежат на некоторой параболе. Какой?

(5 баллов)

6. Решить уравнение $y''e^{-2x}-y'e^{-2x}+16y=0$.

(5 баллов)

7. a,b,c – комплексные числа, $|a|=|b|=|c|=r$, $a+b+c\neq 0$. Доказать, что
$$\left|\frac{ab+bc+ca}{a+b+c}\right|=r.$$

(6 баллов)

8. Вычислить $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{x^3dx}{e^x-1}$, считая известным, что $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^4}=\frac{\pi^4}{90}$.

(7 баллов)

9. Доказать, что для дважды непрерывно дифференцируемой 2π – периодической вещественной функции f выполнено неравенство:
$$\left(\int_0^{2\pi}(f'(x))^2dx\right)^2\le\int_0^{2\pi}(f''(x))^2dx\cdot\int_0^{2\pi}f^2(x)dx.$$

(8 баллов)

10. Вычислить $\lim\limits_{n\to+\infty}\begin{vmatrix} x & 0 & 0 & \dots & 0 & 1/n! \\ -1 & x & 0 & \dots & 0 & 1/n! \\ 0 & -2 & x & \dots & 0 & 1/n! \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x & 1/n! \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -n & 1/n! \end{vmatrix}$.

(8 баллов)

11. Что больше: $\int\limits_0^1 x^x dx$ или $\int\limits_0^1\int\limits_0^1 (xy)^{xy}\, dxdy$?

(10 баллов)

12. Найти непрерывно дифференцируемое решение функционального уравнения $f(x+y)=f(x)+f(y)+xy\left(\dfrac{x^2}{3}+\dfrac{xy}{2}+\dfrac{y^2}{3}\right)$, $x,y\in\mathbb{R}$, удовлетворяющее условию $f(2)=-2$.

(10 баллов)

Задачи олимпиады Санкт-Петербурга среди студентов технических вузов 2003 года

1. Решить краевую задачу

$$xy''+2y'-xy=0,\ y(+0)=\lim_{x\to+0}y(x)\ \text{- ограничено},\ y(\ln 2)=\frac{3}{\ln 16}.$$

(2 балла)

2. Если функции $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ непрерывны на [a, b] и дифференцируемы в (a, b), то существует точка $c\in(a,b)$ такая, что $\begin{vmatrix} f(a) & g(a) & h(a) \\ f(b) & g(b) & h(b) \\ f'(c) & g'(c) & h'(c) \end{vmatrix}=0$

(2 балла)

3. Доказать, что многочлены $(z+1)^{2003}+1$ и $z^{20}-2002\cdot z^{10}-2003$ не имеют общих комплексных корней.

(4 балла)

4. Пусть $P(x)$ - многочлен степени $n>1$, $x_1, x_2, ..., x_n$ - его различные корни. Доказать, что $\frac{1}{P'(x_1)}+\frac{1}{P'(x_2)}+...+\frac{1}{P'(x_n)}=0$.

(6 баллов)

5. На черных клетках шахматной доски написаны $ch\,x$, а на белых - $sh\,x$. За один ход можно все функции, стоящие на какой-то горизонтали или какой-то вертикали заменить на их производные. Можно ли не более, чем за 2003 хода получить расстановку, при которой по краям доски написаны $ch\,x$, а в остальных клетках $sh\,x$?

(6 баллов)

6. Последовательность x_n такая, что

$$x_1=\frac{1}{2},\ x_{n+1}=\sqrt{\frac{1-\sqrt{1-x_n^2}}{2}},\ n=1,2,\ldots.$$

Докажите, что $\sum_{n=1}^{\infty}x_n<1,025$.

(6 баллов)

7. Пусть A – квадратная матрица с $\det A\neq 0$ (т.е. невырожденная), в каждой строке которой стоит только одно число, отличное от 0 и равное +1 или –1.

Доказать, что при некотором натуральном m справедливо равенство: $A^m = A^T$, где A^T - транспонированная матрица A.

(8 баллов)

8. Составьте уравнение поверхности, получаемой вращением кривой $x^3 + y^3 = 3xy;\ z = 0$ вокруг прямой $x = y = z$.

(8 баллов)

9. В пространстве R^4 заданы четырехмерный куб и трехмерная гиперплоскость, не параллельная ни одному из ребер куба. Доказать, что она содержит не более 6 вершин куба.

(9 баллов)

10. Найдите $y^{(n)}(0)$, если $y(x) = \sqrt{1 + \sqrt{1 + x}}$.

(10 баллов)

11. Даны две матрицы А и В размерами 3×2 и 2×3 соответственно, причем известно, что

$$AB = \begin{pmatrix} 8 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & 4 \\ -2 & 4 & 5 \end{pmatrix}.$$ Найти ВА.

(10 баллов)

12. Найти $\sum_{n=1}^{\infty} arcctg\, 2u_n^2$, где

$u_1 = 1, \quad u_2 = 1, \quad u_n = 4u_{n-1} - u_{n-2}$.

(10 баллов)