Математическая олимпиада Санкт-Петербурга среди студентов технических вузов 2004 года

1. Найти $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\left(\int\limits_0^x e^{t^2}dt\right)^2}{\int\limits_0^x e^{2t^2}dt}$. (2 балла)

2. Нарисовать на комплексной плоскости множество точек, удовлетворяющих неравенству: $|z^2-3z|+1<|z|+|z-3|$. (3 балла)

3. Найти асимптоты обратной функции f^{-1}, если задана сама функция $f(x)=4x-\operatorname{arctg}x$. (3 балла)

4. Функции fg, gh, fh всюду бесконечно дифференцируемы. Следует ли отсюда непрерывность хотя бы одной из функций f, g, h хотя бы в одной точке? (5 баллов)

5. В выпуклом n-угольнике наудачу выбираются 2 диагонали. Какова вероятность, что они пересекаются? (6 баллов)

6. Вычислить интеграл: $\int\limits_{-1}^{1}\dfrac{dx}{(e^x+1)(x^2+1)}$.(6 баллов)

7. Исследовать на сходимость интеграл: $\int\limits_0^{\infty}\dfrac{dx}{1+x^4\cos^2x}$. (6 баллов)

8. В последовательности $\{a_n\}$: $a_1=3, a_n=a_{n-1}-\dfrac{1}{(n-1)\cdot n\cdot n!}, n=2,3\ldots$

Найти $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$. (7 баллов)

9. Существует ли непрерывная на $(1,+\infty)$ функция $f(t)$ такая, что $\int\limits_x^{x^2}f(t)dt=1$ для любого $x>1$? (8 баллов)

10. У симметричной матрицы порядка n все элементы положительны. Докажите, что у нее найдется положительное собственное число. (8 баллов)

11. Функция $f(x)$ такова, что $\int\limits_0^{\infty}\left(a\left(f(x)\right)^2+\left(f'(x)\right)^2\right)dx=1$. Найдите максимально возможное значение $f(0)$ в зависимости от a($a>0$). (10 баллов)

12. Пусть $f(x)$ – многочлен степени n и $\Phi(x)=f(x)+\dfrac{f'(x)}{2}+\ldots+\dfrac{f^{(n)}(x)}{2^n}$.

Доказать, что, если все корни $\Phi(x)$ вещественные, то все корни $f(x)$ тоже вещественные. (10 баллов)