Математическая олимпиада Санкт-Петербурга среди студентов технических вузов 2006 года

1. Найти функцию $f(x)$ такую, что $\int_{-x}^{0} \frac{f(x+t)}{e^x+e^{-t}}dt = \frac{1}{1+e^x}$, $x \in \mathbb{R}$. (2 балла)

2. Вычислить $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^4+1}}+\frac{2}{\sqrt{n^4+2}}+\ldots+\frac{n}{\sqrt{n^4+n}}\right)$. (2 балла)

3. Докажите, что любую ненулевую диагональную матрицу $(n\times n)$ при $n>1$ можно представить в виде суммы двух матриц, определитель каждой из которых равен единице. (2 балла)

4. Пусть X и Y - квадратные матрицы порядка n, причем матрица X - невырожденная. Может ли коммутатор этих матриц ($XY-YX$) оказаться равным матрице X ? (4 балла)

5. На параболе $y^2=2px$ найти точку так, чтобы нормаль, проведенная к параболе в этой точке, отсекала сегмент наименьшей площади. (5 баллов)

6. Пусть A - квадратная матрица порядка $n=2006$, все элементы которой равны единице, E - единичная матрица такого же порядка. Найти матрицу $\left(E-A\right)^{-2006}$. (5 баллов)

7. Найти сумму ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{e^{a_n x}+1}$ при $x>0$, если $a_1=1,\ a_{n+1}=2a_n$ при $n=1,2,\ldots$. (7 баллов)

8. Пусть $P_n(x)$ - многочлен степени n, определяемый равенством $\left(\frac{1}{1+x^2}\right)^{(n)}=\frac{P_n(x)}{\left(1+x^2\right)^{n+1}}$. Доказать, что имеет место равенство $P_{n+1}(x)+2x(n+1)P_n(x)+n(n+1)\left(1+x^2\right)P_{n-1}(x)=0$. (8 баллов)

9. Пусть функция $f(x)$ определена и дважды непрерывно дифференцируема на $\mathbb{R}$, причем для всех $x\in\mathbb{R}$ выполняется неравенство $\left|f''(x)+2xf'(x)+(x^2+1)f(x)\right|\le 1$. Найти $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$. (8 баллов)

10. По прямой $x+y=2\sqrt{a^2+b^2}$ движется источник света S. При каком положении S тень, отбрасываемая эллипсом $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ на прямую $x+y=-2\sqrt{a^2+b^2}$, имеет наименьшую длину. (8 баллов)

11. Пусть $g(x)\in C^1\left[0;+2\right)$ и $g'(x)\ge 0$ для любого $x\in\left[0;2\right)$. Доказать, что для любого $n\in\mathbb{N}$ верно неравенство
$$\int_1^{\frac{2}{n+1}}g(x)dx+\int_1^{\frac{4}{n+1}}g(x)dx+\int_1^{\frac{6}{n+1}}g(x)dx+\ldots+\int_1^{\frac{2n}{n+1}}g(x)dx\ge 0.$$ (8 баллов)

12. Решить задачу Коши для дифференциального уравнения $4y^2y''=x\left(y'\right)^3$, $y(1)=1,\ y'(1)=2$. (8 баллов)