Задачи олимпиады Санкт-Петербурга
среди студентов технических вузов
6 мая 2007 года

1. Вычислить $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{(n+1)!}\sum\limits_{k=1}^{n}k\cdot k!$ (3 балла)

2. Решить уравнение $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{2n+1}{n!}x^{2n}=e^{x^2}\left(5x+4\right)$ (3 балла)

3. Решить систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} y''+\dfrac{(y')^2}{y}=x'+\dfrac{xy'}{y}, \\ x'y+xy'=1, \end{cases}$$

где $x=x(t),\ y=y(t)$. (3 балла)

4. Пусть функция $f(x)$ удовлетворяет условиям: $f(x)\in C^2(-\infty,\infty)$ и для любых x, h верно $f(x+h)-f(x)=h\,f'\left(x+\dfrac{h}{2}\right)$. Доказать, что функция $f(x)$ представима в виде $f(x)=ax^2+bx+c$. (4 балла)

5. Матрица $M=\left[m_{ij}\right]_{i,j=1}^{n}$ определяется следующим образом: $m_{ij}=a_ia_j$ при $i\neq j$, и $m_{ii}=a_i^2+k$. Вычислить $\det M$. (4 балла)

6. Показать, что любой многочлен можно представить в виде разности монотонно возрастающих многочленов. (5 баллов)

7. Определенная на $\mathbb{R}$ неубывающая функция f является трижды дифференцируемой и удовлетворяет тождеству $f\left(f(t)\right)\equiv 3t+\sin t$. Вычислить значение третьей производной $f'''(0)$ в точке $t=0$. (5 баллов)

8. Касательные к параболе $y^2=2px$ в точках *A*, *B*, *C* образуют треугольник *KLM*. Известно, что площадь треугольника *ABC* равна *S*. Вычислить площадь треугольника *KLM*. (5 баллов)

9. Пусть $f(x), g(x), h(x) \in C[a,b]$ и $h(x) > 0$ на $[a,b]$. Пусть $\forall x \in [a,b]$ выполняется неравенство $f(x) \le g(x) + \int_a^x h(t) f(t) dt$. Доказать, что на $[a,b]$

$$f(x) \le g(x) + \int_a^x h(t) g(t) \exp\left(\int_t^x h(u) du \right) dt.$$

(6 баллов)

10. Функции $a(x), b(x)$ на промежутке X удовлетворяют следующим условиям: $b(x) < 0$, $b(x)$ - дифференцируема, $a(x)$ - непрерывна, $b'(x) + 2a(x)b(x) = 0$. Доказать, что на X существует фундаментальная система решений $\{\varphi_1(x); \varphi_2(x)\}$ дифференциального уравнения $y'' + a(x)y' + b(x)y = 0$, удовлетворяющая условию $\varphi_1(x)\varphi_2(x) = 1$.

(8 баллов)

11. Пусть комплексные числа a, b, c такие, что все корни уравнения $z^3 + az^2 + bz + c = 0$ лежат на окружности $|z| = 1$. Что можно сказать о расположении на комплексной плоскости корней уравнения $z^3 + |a| z^2 + |b| z + |c| = 0$?

(9 баллов)

12. Пусть x - вещественное число. Пусть $a_{i0} = \dfrac{x}{2^i}$, $a_{i,j+1} = a_{i,j}{}^2 + 2a_{i,j}$. Найти $\lim\limits_{n \to \infty} a_{n,n}$.

(4 балла)