Математическая олимпиада Санкт-Петербурга среди студентов технических вузов 2005 года

1. Непрерывная на оси функция принимает только иррациональные значения. $f(\sqrt{2})=\sqrt{e}$. Найти $f(2)$. (2 балла)
2. Пусть $x_1,...x_5$ - корни уравнения $x^5-x-1=0$. Найти $x_1^6+x_2^6+...+x_5^6$. (3 балла)
3. Пусть A - $(n\times n)$-матрица, все элементы которой являются четными числами. Могут ли среди ее собственных чисел быть нечетные? (3 балла)
4. В равносторонний треугольник вписаны окружности, как показано на рисунке. Найти $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{S_n}{S}$, где S - площадь треугольника, а S_n - сумма площадей всех кругов. (4 балла)
5. Найти дифференцируемую функцию $\varphi(x)$, удовлетворяющую уравнению $\int\limits_0^1\varphi(ax)da=n\varphi(x)$. (4 балла)
6. Вычислить интеграл $\int\limits_0^{\pi/4}\left(\frac{\sin x-\cos x}{\sin x+\cos x}\right)^{2n+1}dx$. (5 баллов)
7. Доказать неравенство: $\ln\frac{x+y}{2\sqrt{xy}}\geq\frac{x+y}{4xy}-\frac{1}{x+y}$ при $x>1, y>1$. (5 баллов)
8. Найти сумму ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$, если $a_n=\sum\limits_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m(n+1)^{2m}}$. (6 баллов)
9. Найти $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{D_n}{n!\ln n}$, где $D_n=\begin{vmatrix}3 & 1 & ... & 1 & 1\\ 1 & 4 & ... & 1 & 1\\ ... & ... & ... & ... & ...\\ 1 & 1 & ... & n & 1\\ 1 & 1 & ... & 1 & n+1\end{vmatrix}$. (7 баллов)
10. Найти функцию $f(x)$ непрерывную всюду на вещественной оси за исключением точек $x=0$ и $x=1$ и удовлетворяющую уравнению $f\left(\frac{x}{x+1}\right)+2f(x+1)=x+1$. (9 баллов)
11. Пусть 3×3 матрицы A,B таковы, что $A=A^T, B=B^T$, $a_{11}>0$, $\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}>0$, $\det A>0$, $b_{11}>0$, $\begin{vmatrix}b_{11} & b_{12}\\ b_{21} & b_{22}\end{vmatrix}>0$, $\det B>0$. Доказать, что $\sum\limits_{i=1}^{3}\sum\limits_{j=1}^{3}a_{ij}\cdot b_{ji}>0$. (10 баллов)