$\Rightarrow f(x) = \frac{8}{7}x^3, \forall x \in [-\frac{1}{2};\frac{1}{3}]$.

Thử lại thấy đúng.

Nhận xét. Qua cách giải trên ta thấy điều đầu tiên là giả thiết $x \in [-\frac{1}{2};\frac{1}{3}]$ là không cần thiết, ta có thể mở rộng tập xác định là $[-1;1]$ mà kết quả không thay đổi. Thứ hai, giả thiết x^2 cũng có thể khái quát thành 1 đa thức. Như vậy, ta có thể khái quát như sau:

Bài toán 2a. *Cho g(x) là đa thức bậc n có tập xác định là [-1;1]. Tìm hàm $f:[-1;1]\to R$, liên tục trên R và thỏa mãn : $f(x) - \frac{1}{3}f(\frac{x}{2}) = g'(x)$.*

Các bạn hãy thử tìm điều kiện cho *g(x)* nếu ta muốn khái quát *g(x)* thành một hàm liên tục bất kì.

Trở lại bài toán *ví dụ 1*, với cách giải trình bày ở bài toán *ví dụ 2*, ta hoàn toàn có thể thay đổi giả thiết $f(x) - 2xf(x^2) \geq 0$ bởi $f(x) - 2x f(x^2) = g'(x)$.

Các bạn hãy đưa ra một đề bài có các điều kiện rằng buộc cho *g(x)* để tạo thành một bài toán hoàn chỉnh.

Kết hợp các hướng tổng quát trên, tôi xin đề xuất một bài toán tổng quát hơn:

3. Ví dụ 3.

Cho các hàm số g: $[0;1]\to$ R, $f:[0;1]\to[0;1]$ trong đó g, h có đạo hàm trên [0;1], h(0) = 0, h(1) =1 và g là đa thức bậc n .Tìm hàm f: $[0;1]\to R$, thỏa mãn:

$f(x) - h'(x).f(h(x)) = g'(x)$.

Mời các bạn hãy giải bài toán này và tiếp tục! Sau đây là bài tập để các bạn tự luyện:

Bài tập. *Cho f(x) có đạo hàm trong (0;1), liên tục trong [0;1], ngoài ra f(0) = f(1) = 0. Chứng minh rằng tồn tại một số c ∈ (0;1) thỏa mãn điều kiện:*

f(c) = 1996.f' (c).

Chúc các bạn thành công!

Xung Quanh Bài Toán Bất Đẳng Thức
THI TOÁN QUỐC TẾ 2005

NGUYỄN ANH TUẤN
CHUYÊN TOÁN K97-00
Sv. Lớp D2000VT, Học viện Công nghệ Bưu chính Viễn thông.

Trong kỳ thi Olympic Toán Quốc tế lần thứ 46 tổ chức tại Mexico có bài toán về bất đẳng thức (BĐT) như sau:

Bài toán 1. *Cho 3 số thực dương x, y, z thỏa mãn điều kiện xyz ≥ 1. Chứng minh rằng:*

$$\frac{x^5-x^2}{x^5+y^2+z^2}+\frac{y^5-y^2}{y^5+z^2+x^2}+\frac{z^5-z^2}{z^5+x^2+y^2}\geq 0 \qquad (1)$$

Lời giải 1. BĐT (1) tương đương với:

$$\frac{(x^5+y^2+z^2)-(x^2+y^2+z^2)}{x^5+y^2+z^2}+\frac{(y^5+z^2+x^2)-(x^2+y^2+z^2)}{y^5+z^2+x^2}+\frac{(z^5+x^2+y^2)-(x^2+y^2+z^2)}{z^5+x^2+y^2}\geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x^5+y^2+z^2}+\frac{1}{y^5+z^2+x^2}+\frac{1}{z^5+x^2+y^2}\leq\frac{3}{x^2+y^2+z^2} \qquad (2)$$

Ta sẽ chứng minh:

$$\frac{1}{x^5+y^2+z^2}\leq\frac{3(y^2+z^2)}{2(x^2+y^2+z^2)^2}.$$

Thật vậy, theo giả thiết $xyz \geq 1$ ta có:

$$\frac{1}{x^5+y^2+z^2}\leq\frac{1}{\frac{x^4}{yz}+y^2+z^2}\leq$$

$$\le \frac{1}{\frac{2x^4}{y^2+z^2}+y^2+z^2} \qquad (3)$$

Áp dụng BĐT *Bunhiacôpxky* ta có:

$$\left(\left(\sqrt{\frac{y^2+z^2}{2}}\right)^2+y^2+z^2\right)\times$$

$$\times\left(\left(\sqrt{\frac{2x^4}{y^2+z^2}}\right)^2+y^2+z^2\right)\ge$$

$$\ge\left(x^2+y^2+z^2\right)^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\frac{2x^4}{y^2+z^2}+y^2+z^2} \le \frac{3\left(y^2+z^2\right)}{2\left(x^2+y^2+z^2\right)^2} \ (4)$$

Từ (3) và (4) suy ra

$$\frac{1}{x^5+y^2+z^2} \le \frac{3\left(y^2+z^2\right)}{2\left(x^2+y^2+z^2\right)^2}.$$

Cũng tương tự:

$$\frac{1}{y^5+z^2+x^2} \le \frac{3\left(z^2+x^2\right)}{2\left(x^2+y^2+z^2\right)^2}$$

$$\frac{1}{z^5+x^2+y^2} \le \frac{3\left(x^2+y^2\right)}{2\left(x^2+y^2+z^2\right)^2}$$

Cộng theo vế các BĐT trên ta thu được (2) $\Rightarrow$ đpcm.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow$ x = y = z = 1

Lời giải 2.

Áp dụng BĐT Bunhiacôpxky ta có:

$$\left(x^5+y^2+z^2\right)\left(\frac{1}{x}+y^2+z^2\right)\ge$$

$$\ge\left(x^2+y^2+z^2\right)^2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x^5+y^2+z^2} \le \frac{\frac{1}{x}+y^2+z^2}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^2}.$$

Thêm hai BĐT tương tự nữa:

$$\frac{1}{y^5+z^2+x^2} \le \frac{\frac{1}{y}+z^2+x^2}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^2} \text{ và}$$

$$\frac{1}{z^5+x^2+y^2} \le \frac{\frac{1}{z}+x^2+y^2}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^2}$$

Ta suy ra:

$$\frac{1}{x^5+y^2+z^2}+\frac{1}{y^5+z^2+x^2}+$$

$$+\frac{1}{z^5+x^2+y^2}\le$$

$$\le \frac{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+2\left(x^2+y^2+z^2\right)}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^2}$$

Mặt khác từ giả thiết $xyz \ge 1$

$\Rightarrow \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z} \le yz+zx+xy \le$

$\le x^2+y^2+z^2$, do đó từ BĐT trên suy ra (2) $\Rightarrow$ đpcm.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow$ x = y = z = 1.

Bằng cách 2, ta chứng minh được bài toán tổng quát sau:

Bài toán 2. *Cho n số thực dương* $x_1, x_2, ..., x_n$ $(n\ge 3)$ *thoả mãn điều kiện* $x_1x_2...x_n \ge 1$. *Chứng minh rằng:*

$$\frac{x_1^{2n+1}-x_1^n}{x_1^{2n+1}+x_2^n+x_3^n+..+x_n^n}+$$

$$+\frac{x_2^{2n+1}-x_2^n}{x_2^{2n+1}+x_1^n+x_3^n+..+x_n^n}+\ldots+$$

$$+\frac{x_n^{2n+1}-x_n^n}{x_n^{2n+1}+x_2^n+x_3^n+..+x_{n-1}^n}\ge 0 \ (5)$$

Chứng minh. Theo BĐT Cô-si và giả thiết $x_1x_2...x_n \ge 1$ ta có: $x_1^{2n+1}\ge \frac{x_1^{2n}}{x_2x_3...x_n}\ge$

$$\ge \frac{(n-1)x_1^{2n}}{x_2^n+x_3^n+...+x_n^n} \ (6)$$

Mặt khác, áp dụng BĐT Bunhiacôpxky ra có: $$\left(\left(\sqrt{\frac{x_2^n+\ldots+x_n^n}{n-1}}\right)^2+x_2^n+\ldots+x_n^n\right)\times$$
$$\times\left(\left(\sqrt{\frac{(n-1)x_1^{2n}}{x_2^n+\ldots+x_n^n}}\right)^2+x_2^n+\ldots+x_n^n\right)\ge$$
$$\ge\left(x_1^n+x_2^n+\ldots+x_n^n\right)^2$$
$$\Leftrightarrow\frac{1}{\frac{(n-1)x_1^{2n}}{x_2^n+\ldots+x_n^n}+x_2^n+x_3^n+\ldots+x_n^n}\le$$
$$\le\frac{n}{n-1}\frac{\left(x_2^n+\ldots+x_n^n\right)}{\left(x_1^n+x_2^n+\ldots+x_n^n\right)^2}\qquad(7)$$

Từ (6) và (7) suy ra:
$$\frac{1}{x_1^{2n+1}+x_2^n+x_3^n+\ldots+x_n^n}\le$$
$$\le\frac{1}{\frac{(n-1)x_1^{2n}}{x_2^n+\ldots+x_n^n}+x_2^n+x_3^n+\ldots+x_n^n}\le$$
$$\le\frac{n}{n-1}\frac{\left(x_2^n+\ldots+x_n^n\right)}{\left(x_1^n+x_2^n+\ldots+x_n^n\right)^2}.$$

Cùng với n -1 BĐT tương tự khác, cộng vế với vế ta thu được:
$$\frac{1}{x_1^{2n+1}+x_2^n+x_3^n+\ldots+x_n^n}+$$
$$+\frac{1}{x_2^{2n+1}+x_1^n+x_3^n+\ldots+x_n^n}+\ldots+$$
$$+\frac{1}{x_n^{2n+1}+x_1^n+x_2^n+\ldots+x_{n-1}^n}\le$$
$$\le\frac{n}{x_1^n+x_2^n+\ldots+x_n^n}$$
$$\Leftrightarrow\frac{x_1^n+x_2^n+\ldots+x_n^n}{x_1^{2n+1}+x_2^n+x_3^n+\ldots+x_n^n}+$$
$$+\frac{x_1^n+x_2^n+\ldots+x_n^n}{x_2^{2n+1}+x_1^n+x_3^n+\ldots+x_n^n}+\ldots+$$
$$+\frac{x_1^n+x_2^n+\ldots+x_n^n}{x_n^{2n+1}+x_1^n+x_2^n+\ldots+x_{n-1}^n}\le n$$
$$\Leftrightarrow\left(\frac{x_1^n+x_2^n+\ldots+x_n^n}{x_1^{2n+1}+x_2^n+x_3^n+\ldots+x_n^n}-1\right)+$$
$$+\left(\frac{x_1^n+x_2^n+\ldots+x_n^n}{x_2^{2n+1}+x_1^n+x_3^n+\ldots+x_n^n}-1\right)+\ldots+$$
$$+\left(\frac{x_1^n+x_2^n+\ldots+x_n^n}{x_n^{2n+1}+x_1^n+x_2^n+\ldots+x_{n-1}^n}-1\right)\le 0$$
$$\Leftrightarrow (5)$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow x_1=x_2=\ldots=x_n=1$

Một dạng tổng quát khác của Bài toán 1 như sau:

Bài toán 3. *Cho số tự nhiên $n\ge 3$ và 3 số thực dương x, y, z thoả mãn điều kiện $xyz\ge 1$. Chứng minh rằng:*
$$\frac{x^n-x^2}{x^n+y^2+z^2}+\frac{y^n-y^2}{y^n+z^2+x^2}+\frac{z^n-z^2}{z^n+x^2+y^2}\ge 0\quad(8)$$

Hay là: $$\frac{1}{x^n+y^2+z^2}+\frac{1}{y^n+z^2+x^2}+$$
$$+\frac{1}{z^n+x^2+y^2}\le\frac{3}{x^2+y^2+z^2}$$

Bằng phương pháp tương tự như lời giải 2 chúng ta có thể chứng minh được Bài toán 3 đúng với $n\le 8$. Sau đây ta chứng minh trong trường hợp $n=6$:

Áp dụng BĐT *Bunhiacôpxky* tổng quát ta có: $$\left(x^6+y^2+z^2\right)\left(1+y^2+z^2\right)\left(1+y^2+z^2\right)\ge$$
$$\ge\left(x^2+y^2+z^2\right)^3$$
$$\Rightarrow\frac{1}{x^6+y^2+z^2}\le\frac{\left(1+y^2+z^2\right)^2}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^3}.$$

Thêm hai BĐT tương tự nữa, suy ra
$$\frac{1}{x^6+y^2+z^2}+\frac{1}{y^6+z^2+x^2}+$$
$$+\frac{1}{z^6+x^2+y^2}\le$$
$$\le\frac{\left(1+y^2+z^2\right)^2+\left(1+z^2+x^2\right)^2+\left(1+x^2+y^2\right)^2}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^3}\quad(9)$$

Ta sẽ chứng minh

$$\left(1+y^2+z^2\right)^2+\left(1+z^2+x^2\right)^2+\left(1+x^2+y^2\right)^2$$
$$\le 3\left(x^2+y^2+z^2\right)^2 \quad (10)$$

Đặt $u = x^2$, $v = y^2$, $t = z^2$ thì ta có (10)

$$\Leftrightarrow (1+u+v)^2 + (1+v+t)^2 +$$
$$+ (1+t+u)^2 \le 3(u+v+t)^2$$
$$\Leftrightarrow 3+4(y+v+t)+2(uv+vt+tu)+$$
$$+2\left(u^2+v^2+t^2\right) \le 2\left(u^2+v^2+t^2\right)+$$
$$+4(uv+vt+tu)+(u+v+t)^2$$
$$\Leftrightarrow (u+v+t)^2 - 4(y+v+t)+$$
$$+2(uv+vt+tu) - 3 \ge 0 \qquad (11)$$

Từ giả thiết $xyz \ge 1$, suy ra $uv+vt+tu \ge$ $\ge 3\sqrt[3]{(uvt)^2} = 3\sqrt[3]{(xyz)^4} \ge 3$, do đó (11) đúng và ta có (10). Vậy từ (9) và (10) ta có đpcm.

Tôi dự đoán rằng BĐT (8) đúng với mọi n, mong các bạn cùng quan tâm tới việc chứng minh bài toán này. Sau đây là một bài toán mới mà tôi đã phát hiện ra trong quá trình mở rộng bài toán trên.

Tìm tất cả các số nguyên n sao cho bất đẳng thức (BĐT) sau đúng với mọi x, y, z khác không:

$$\left(x^2+xy+y^2\right)^n+\left(y^2+yz+z^2\right)^n+$$
$$+\left(z^2+zx+x^2\right)^n \le 3\left(x^2+y^2+z^2\right)^n \quad (12)$$

Lời giải. Với $n = 0$ thì BĐT (12) hiển nhiên đúng với mọi $x, y, z \ne 0$. Ta xét các trường hợp sau:

i) Với $n < 0$. Đặt $n = -m$ $(m > 0)$, khi đó BĐT (12) trở thành:

$$\frac{1}{\left(x^2+xy+y^2\right)^m}+\frac{1}{\left(y^2+yz+z^2\right)^m}+$$
$$+\frac{1}{\left(z^2+zx+x^2\right)^m} \le \frac{3}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^m}$$

BĐT này không đúng với mọi $x, y, z \ne 0$. Thật vậy, cố đinh x sao cho $y \to 0$, $z \to 0$ thì vế trái $\to +\infty$, trong khi đó vế phải $\to \frac{3}{x^{2m}}$, vô lý.

ii) *Với* $n = 1$. Khi đó (12) có dạng:

$$\left(x^2+xy+y^2\right)+\left(y^2+yz+z^2\right)+$$
$$+\left(z^2+zx+x^2\right) \le 3\left(x^2+y^2+z^2\right)$$

$\Leftrightarrow xy+yz+zx \le x^2+y^2+z^2$. BĐT này đúng với mọi $x, y, z \Rightarrow$ (12) đúng.

ii) *Với* $n = 2$. BĐT (12) có dạng:

$$\left(x^2+xy+y^2\right)^2+\left(y^2+yz+z^2\right)^2+$$
$$+\left(z^2+zx+x^2\right)^2 \le 3\left(x^2+y^2+z^2\right)^2$$
$$\Leftrightarrow 2\left(x^3y+y^3x+y^3z+z^3y+z^3x+x^3z\right) \le$$
$$\le \left(x^4+y^4+z^4\right)+3\left(x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2\right)$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}(x-y)^4+\frac{1}{2}(y-z)^4+\frac{1}{2}(z-x)^4 \ge 0$$

BĐT cuối đúng $\Rightarrow$ BĐT (12) đúng với $n = 2$.

iii) Với $n \ge 3$, ta sẽ chứng minh rằng khi đó (12) không đúng. Thật vậy, ta có (12) $\Leftrightarrow$

$$\left(\frac{x^2+xy+y^2}{x^2+y^2+z^2}\right)^n+\left(\frac{y^2+yz+z^2}{x^2+y^2+z^2}\right)^n+$$
$$+\left(\frac{z^2+zx+x^2}{x^2+y^2+z^2}\right)^n \le 3 \qquad (13)$$

Chọn x = 1,1; y = 1; z = 0,1 thì ta có:

$$\left(\frac{x^2+xy+y^2}{x^2+y^2+z^2}\right)^n+\left(\frac{y^2+yz+z^2}{x^2+y^2+z^2}\right)^n+$$
$$+\left(\frac{z^2+zx+x^2}{x^2+y^2+z^2}\right)^n > \left(\frac{x^2+xy+y^2}{x^2+y^2+z^2}\right)^n =$$
$$= \left(\frac{3,31}{2,22}\right)^n > 1,49^n.$$

Bằng quy nạp ta chứng minh được $1,49^n > 3$ với mọi $n \ge 3$. Từ đó suy ra (13) không đúng với mọi $x, y, z > 0 \Rightarrow$ đpcm.

Từ những phân tích trên ở các trường hợp trên ta đi đến kết luận: *tất cả các số nguyên n phải tìm là n = 0, 1, 2.*