

VMF - ĐÁP ÁN ĐỀ THI THỬ SỐ 6 - MÔN TOÁN-2012

PHẦN CHUNG: (Dành cho tất cả các thí sinh) (7 điểm)**Câu I (2 điểm)**Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2$ (C)

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số trên.
2. Tìm trên (C) điểm A sao cho khoảng cách từ A đến $B(2; -4)$ là nhỏ nhất.

GIẢI

1. Khảo sát và vẽ đồ thị ...

2. Lấy điểm $A(x; y)$ tùy ý thuộc (C) $\Rightarrow BA^2 = (x - 2)^2 + (y + 4)^2$ Xét $x \leq -1 \Rightarrow x - 2 \leq -3 \Rightarrow |x - 2| \geq 3 \Rightarrow (x - 2)^2 \geq 9$ $\Rightarrow BA^2 \geq 9 \Rightarrow BA \geq 3$ Xét $x > -1 \Rightarrow y \geq -2 \Rightarrow y + 4 \geq 2 \Rightarrow (y + 4)^2 \geq 4$ $\Rightarrow BA^2 \geq 4 \Rightarrow BA \geq 2$ Trong cả hai trường hợp ta thấy $BA \geq 2$ Dấu bằng xảy ra khi $\begin{cases} x = 2 \\ y = -2 \end{cases} \Leftrightarrow A(2; -2)$ Vậy điểm $A(2; -2)$ thỏa yêu cầu bài toán.**Câu II (2 điểm)**

1. Giải phương trình:
- $\frac{4(\sin x + \sqrt{3}\cos x) - 4\sqrt{3}\sin x \cos x - 3}{4\cos^2 x - 1} = 1$

GIẢI.

Điều kiện: $4\cos^2 x - 1 \neq 0$. Khi đó phương trình đã cho tương đương với:

$$8\cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) - 2\sqrt{3}\sin 2x - 3 = 2(1 + \cos 2x) - 1$$

$$\Leftrightarrow 8\cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) - 2(\sqrt{3}\sin 2x + \cos 2x) - 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow 8\cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) - 4\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) - 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos\left[2\left(x - \frac{\pi}{6}\right)\right] - 2\cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2\cos^2\left(x - \frac{\pi}{6}\right) - 2\cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2\cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) [\cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) - 1] = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = 0 \\ \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} + k\pi \\ x - \frac{\pi}{6} = l2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2\pi}{3} + k\pi \\ x = \frac{\pi}{6} + l2\pi \end{cases} \quad (k, l \in \mathbb{Z})$$

Đối chiếu với điều kiện ta nhận được nghiệm của phương trình đã cho là $x = \frac{\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$

2. Giải bất phương trình:
- $\sqrt{6}(x^2 - 3x + 1) + \sqrt{x^4 + x^2 + 1} \leq 0; x \in \mathbb{R}$

GIẢI.

Bất phương trình đã cho tương đương với:

$$6(x^2 - 3x + 1) + \sqrt{6(x^4 + x^2 + 1)} \leq 0 \Leftrightarrow 6[2(x^2 - x + 1) - (x^2 + x + 1)] + \sqrt{6(x^4 + x^2 + 1)} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow 12(x^2 - x + 1) + \sqrt{6(x^2 - x + 1)(x^2 + x + 1)} - 6(x^2 + x + 1) \leq 0$$

$$\Leftrightarrow 12\left(\frac{x^2 - x + 1}{x^2 + x + 1}\right) + \sqrt{\frac{6(x^2 - x + 1)}{x^2 + x + 1}} - 6 \leq 0 \quad (\text{vì } x^2 + x + 1 > 0 \forall x \in \mathbb{R})$$

Đặt $t = \sqrt{\frac{6(x^2 - x + 1)}{x^2 + x + 1}} > 0$, khi đó bất phương trình trở thành:

$$2t^2 + t - 6 \leq 0 \Leftrightarrow 0 < t \leq \frac{3}{2}$$

Do đó:

$$\frac{6(x^2 - x + 1)}{x^2 + x + 1} \leq \frac{9}{4} \Leftrightarrow 5x^2 - 11x + 5 \leq 0 \Leftrightarrow \frac{11 - \sqrt{21}}{10} \leq x \leq \frac{11 + \sqrt{21}}{10}$$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình đã cho là $S = \left[\frac{11 - \sqrt{21}}{10}; \frac{11 + \sqrt{21}}{10} \right]$

Câu III (1 điểm)

Tính tích phân: $I = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{2 + \sin x}{1 + \cos x} dx$

GIẢI.

Ta có:

$$\begin{aligned} I &= \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{2 + \sin x}{1 + \cos x} dx = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{2 + 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}}{2 \cos^2 \frac{x}{2}} dx = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{\cos^2 \frac{x}{2}} + \tan \frac{x}{2} \right) dx \\ &= \left(2 \tan \frac{x}{2} - 2 \ln \left| \cos \frac{x}{2} \right| \right) \Big|_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} = 2 \left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}} \right) - 2 \ln \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 2 \left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}} \right) - \ln \frac{2}{3} \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } I = 2 \left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}} \right) - \ln \frac{2}{3}$$

Câu IV (1 điểm)

Cho hình chóp $S.ABCD$ có SA là đường cao và đáy là hình chữ nhật $ABCD$, biết $SA = a, AB = b, AD = c$. Trong mặt phẳng (SDB) , vẽ qua trọng tâm G của tam giác SBD một đường thẳng cắt cạnh SB tại M và cắt cạnh SD tại N . Mặt phẳng (AMN) cắt cạnh SC của hình chóp $S.ABCD$ tại K . Xác định vị trí của M trên cạnh SB sao cho thể tích của hình chóp $S.AMKN$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính giá trị đó theo a, b, c .

GIẢI

HÌNH VẼ

Do G là trọng tâm của tam giác SBD suy ra G cũng là trọng tâm của tam giác SAC . Do đó AG cắt SC tại trung điểm K của SC .

$$\text{Đặt } \frac{SM}{SB} = x, \frac{SN}{SD} = y \quad \left(\frac{1}{2} \leq x \leq 1; \frac{1}{2} \leq y \leq 1 \right).$$

Theo công thức tính tỉ số thể tích ta có:

$$\frac{V_{SANK}}{V_{SADC}} = \frac{SA}{SA} \cdot \frac{SN}{SD} \cdot \frac{SK}{SC} = \frac{y}{2}; \quad \frac{V_{SAKM}}{V_{SACB}} = \frac{SA}{SA} \cdot \frac{SK}{SC} \cdot \frac{SM}{SB} = \frac{x}{2}$$

Lại có: $V_{SADC} = V_{SACB} = \frac{1}{2} V_{S.ABCD} = \frac{1}{6} abc$ và $V_{SANK} + V_{SAKM} = V_{S.ANKM}$

nên ta có:

$$\frac{V_{SANK}}{V_{SADC}} + \frac{V_{SAKM}}{V_{SACB}} = \frac{2V_{S.ANKM}}{V_{S.ABCD}} = \frac{x+y}{2} \Rightarrow V_{S.ANKM} = \frac{V_{S.ABCD}(x+y)}{4} = \frac{abc(x+y)}{12} \quad (1)$$

Mặt khác:

$$SN = \frac{SN}{SD} SD = ySD; \quad SM = \frac{SM}{SB} SB = xSB; \quad SG = \frac{2}{3} SO$$

Vì O là trung điểm của BD nên $2SO = SD + SB \Rightarrow SG = \frac{1}{3y} SN + \frac{1}{3x} SM \quad (2)$

Mà M, N, G thẳng hàng nên từ (2) ta có: $\frac{1}{3y} + \frac{1}{3x} = 1 \Rightarrow x = \frac{y}{3y-1} \quad \left(\frac{1}{2} \leq y \leq 1 \right)$

Thay vào (1) suy ra:

$$V_{S.ANKM} = \frac{abc \left(\frac{y}{3y-1} + y \right)}{12} = \frac{abc}{4} \cdot \frac{y^2}{3y-1}$$

Xét hàm số: $f(y) = \frac{y^2}{3y-1} \left(\frac{1}{2} \leq y \leq 1 \right)$. Ta có $f'(y) = \frac{3y^2-2y}{(3y-1)^2} \Rightarrow f'(y) = 0 \Leftrightarrow y = \frac{2}{3}$

Khi đó: $f\left(\frac{1}{2}\right) = f(1) = \frac{1}{2}$; $f\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{4}{9}$. Suy ra: $\min f(y) = \frac{4}{9} \Leftrightarrow y = \frac{2}{3} \Rightarrow x = \frac{2}{3}$.

Vậy $\min(V_{S.ANKM}) = \frac{abc}{9} \Leftrightarrow MN//BD$.

Câu V(1 điểm)

Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 \leq \frac{3}{4}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = (a+b)(b+c)(c+a) + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$$

GIẢI.

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy, ta có:

$$\frac{1}{a^2} + 4 \geq \frac{4}{a} \Rightarrow \frac{1}{a^2} \geq \frac{4}{a} - 4$$

Tương tự:

$$\frac{1}{b^2} \geq \frac{4}{b} - 4; \quad \frac{1}{c^2} \geq \frac{4}{c} - 4$$

Mặt khác: $(a+b)(b+c)(c+a) \geq 8abc$. Cộng các bất đẳng thức trên vế theo vế, ta được:

$$P \geq 8abc + \frac{4}{a} + \frac{4}{b} + \frac{4}{c} - 12 = \left(8abc + \frac{1}{2a} + \frac{1}{2b} + \frac{1}{2c} \right) + \frac{7}{2} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) - 12$$

Lại áp dụng bất đẳng thức Cauchy, ta có:

$$8abc + \frac{1}{2a} + \frac{1}{2b} + \frac{1}{2c} \geq 4\sqrt{8abc \cdot \frac{1}{2a} \cdot \frac{1}{2b} \cdot \frac{1}{2c}} = 4$$

Đồng thời ta có đánh giá:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq \frac{9}{a+b+c}$$

Do đó:

$$P \geq 4 + \frac{63}{2(a+b+c)} - 12 = \frac{63}{2(a+b+c)} - 8$$

Lại lưu ý rằng:

$$(a+b+c)^2 \leq 3(a^2+b^2+c^2) \leq \frac{9}{4} \Rightarrow a+b+c \leq \frac{3}{2}$$

Suy ra: $P \geq \frac{63}{3} - 8 = 13$. Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c = \frac{1}{2}$

Vậy GTNN của P bằng 13, đạt được khi và chỉ khi $a = b = c = \frac{1}{2}$.

PHẦN RIÊNG: (Thí sinh chỉ được chọn một trong hai phần: A hoặc B)(3 điểm)

A. Chương trình chuẩn:

Câu VI.a (2 điểm)

1. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho ba điểm $A(-1; 7), B(4; -3), C(-4; 1)$. Hãy viết phương trình đường tròn (C) nội tiếp tam giác ABC .

GIẢI.

Gọi $I(a; b)$, r lần lượt là tâm và bán kính của đường tròn (C) .

Gọi $M(x; y)$ là chân đường phân giác trong góc A của tam giác ABC .

Ta có: $\frac{MB}{MC} = \frac{AB}{AC} = \frac{5\sqrt{5}}{3\sqrt{5}} \Rightarrow \overrightarrow{MB} = -\frac{5}{3}\overrightarrow{MC}$. Suy ra M chia đoạn BC theo tỉ số $k = -\frac{5}{3}$ nên ta có tọa độ điểm M là:

$$M : \begin{cases} x = \frac{x_B - kx_C}{1 - k} = \frac{4 - \left(-\frac{5}{3}\right)(-4)}{1 - \left(-\frac{5}{3}\right)} = -1 \\ y = \frac{y_B - ky_C}{1 - k} = \frac{-3 - \left(-\frac{5}{3}\right).1}{1 - \left(-\frac{5}{3}\right)} = -\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow M\left(-1; -\frac{1}{2}\right)$$

I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC nên $\frac{IA}{IM} = \frac{BA}{BM} = 2 \Rightarrow \overrightarrow{IA} = -2\overrightarrow{IM}$.

$$\text{Suy ra điểm } I \text{ chia đoạn } AM \text{ theo tỉ số } k = -2 \Rightarrow I : \begin{cases} x = \frac{x_A - kx_M}{1 - k} = \frac{-1 - (-2)(-1)}{1 - (-2)} = -1 \\ y = \frac{y_A - ky_M}{1 - k} = \frac{7 - (-2)\left(-\frac{1}{2}\right)}{1 - (-2)} = 2 \end{cases} \Rightarrow I(-1; 2)$$

Phương trình cạnh AB là $(AB) : 2x + y - 5 = 0$.

Bán kính đường tròn (C) chính là khoảng cách từ tâm I đến cạnh AB , do đó: $r = d(I, (AB)) = \frac{|2(-1) + 2 - 5|}{\sqrt{4 + 1}} = \sqrt{5}$.

Vậy phương trình đường tròn (C) là $(C) : (x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 5$.

2. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P) : 2x + y + 3z - 1 = 0$ và đường thẳng d có phương trình $\frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{-3} = \frac{z}{-1}$. Hãy viết phương trình hình chiếu của đường thẳng $\Delta : \frac{x}{-1} = \frac{y-2}{3} = \frac{z+3}{2}$ lên mặt phẳng (P) theo phương (d) .

GIẢI

Gọi (Q) là mặt phẳng chứa Δ và song song với d , Δ' là đường thẳng cần tìm. Dễ thấy Δ' là giao tuyến của (P) và (Q) . Ta có vectơ chỉ phương của Δ và d lần lượt là: $\vec{n}_1 = (-1; 3; 2); \vec{n}_2 = (1; -3; -1)$. Mặt phẳng (Q) đi qua điểm $M(0; 2; -3) \in \Delta$ và nhận vectơ $\vec{n}_1' = \vec{n}_1 \wedge \vec{n}_2 = (3; 1; 0)$ là vector pháp tuyến nên có phương trình:

$$3x + y - 2 = 0$$

Do đó mọi điểm trên Δ' có tọa độ thỏa mãn hệ phương trình

$$\begin{cases} 2x + y + 3z - 1 = 0 \\ 3x + y - 2 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = t \\ y = 2 - 3t \\ z = -\frac{1}{3} + \frac{t}{3} \end{cases}$$

Câu VII.a (1 điểm)

Xác định tập hợp điểm trong mặt phẳng phức biểu diễn số phức z thỏa mãn điều kiện $(2 - z)(i + \bar{z})$ là số thuần ảo.

GIẢI

Đặt $z = x + iy$ ta có:

$$w = (2 - z)(i + \bar{z}) = (2 - x - iy)[x + (1 - y)] = [(2 - x)x + y(1 - y)] + [(2 - x)(1 - y) - xy]i$$

w là số thuần ảo khi và chỉ khi

$$(2 - x)(1 - y) - xy = 0 \Leftrightarrow x + 2y - 2 = 0$$

Vậy tập hợp các điểm cần tìm là đường thẳng $x + 2y - 2 = 0$

B.Chương trình nâng cao:

Câu VI.b (2 điểm)

1. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho điểm $F_1(2; 1)$, $F_2(6; 4)$. Một elip (E) nhận F_1, F_2 làm hai tiêu điểm và tiếp xúc với Ox tại M . Tìm tọa độ điểm M .

2. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(0; -1; 1)$ và $B(1; 2; 1)$. Viết phương trình mặt cầu (S) có đường kính là đoạn vuông góc chung của đường thẳng AB và đường thẳng chứa trục Ox .

GIẢI

1. Ta có nhận xét: Nếu elip (E) có phương trình $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$), với các tiêu điểm F_1, F_2 thì tiếp tuyến tại một điểm I bất kì trên (E) là phân giác ngoài của góc $\widehat{F_1IF_2}$

Áp dụng vào bài toán, ta có Ox là phân giác ngoài của góc $\widehat{F_1MF_2}$.

Lấy $F_1'(2; -1)$ đối xứng với $F_1(2; 1)$. Do Ox là phân giác ngoài của góc $\widehat{F_1MF_2}$ nên F_1', M, F_2 thẳng hàng. Gọi $M(x; 0)$ thì $\overrightarrow{F_1'M} = k\overrightarrow{F_1'F_2} \Leftrightarrow (x - 2; 1) = k(4; 5) \Leftrightarrow 5(x - 2) = 4 \Leftrightarrow x = \frac{14}{5}$.

Vậy $M\left(\frac{14}{5}; 0\right)$.

2. Lập phương trình đường thẳng đi qua AB ta có $AB: \begin{cases} x = t \\ y = -1 + 3t \\ z = 1 \end{cases}$

Gọi $M(t; 3t - 1; 1) \in AB$ và $N(k; 0; 0) \in Ox$, suy ra $\overrightarrow{MN} = (t - k; 3t - 1; 1)$

Vì $\begin{cases} MN \perp AB \\ MN \perp Ox \end{cases}$ nên $t = k = \frac{1}{3}$.

Do đó: $M\left(\frac{1}{3}; 0; 1\right), N\left(\frac{1}{3}; 0; 0\right) \Rightarrow I\left(\frac{1}{3}; 0; \frac{1}{2}\right)$ là trung điểm của MN và chính là tâm của mặt cầu.

Khi đó: bán kính của mặt cầu là $R = \frac{MN}{2} = \frac{1}{2}$

Vậy phương trình mặt cầu cần tìm là $(S): \left(x - \frac{1}{3}\right)^2 + y^2 + \left(z - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$.

Câu VII.b (1 điểm)

Cho hệ phương trình: $\begin{cases} (m^2 + 2m)x + (1 - m^2)y + m^2 - 2m - 2 = 0 \\ x^2 + y^2 + 2x - 9 = 0 \end{cases}$. Chứng minh rằng hệ phương trình

trên luôn có hai nghiệm phân biệt $(x_1; y_1)$ và $(x_2; y_2)$. Tìm m để biểu thức $P = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2$ đạt giá trị nhỏ nhất.

GIẢI.

Nghiệm của hệ phương trình này là tọa độ giao điểm của đường thẳng $\Delta: (m^2 + 2m)x + (1 - m^2)y + m^2 - 2m - 2 = 0$ và đường tròn $(C): (x + 1)^2 + y^2 = 10$ tâm $I(-1; 0)$, bán kính $R = \sqrt{10}$.

Ta có:

$$(m^2 + 2m)x + (1 - m^2)y + m^2 - 2m - 2 = 0 \Leftrightarrow (x - y + 1)m^2 + (2x - 2)m + (y - 2) = 0$$

Phương trình này nghiệm đúng với mọi m khi $x = 1, y = 2$ nghĩa là Δ luôn đi qua điểm cố định $A(1; 2)$ và A nằm trong (C) .

Do đó Δ luôn cắt (C) tại hai điểm phân biệt $M(x_1; y_1), N(x_2; y_2)$.

Vậy hệ đã cho luôn có hai nghiệm phân biệt

HÌNH VẼ

Ta có: $P = MN^2$ nhỏ nhất khi và chỉ khi $IA \perp \Delta \Leftrightarrow \overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{u_\Delta} = 0 \Leftrightarrow (m^2 - 1) \cdot 2 + (m^2 + 2m) \cdot 2 = 0$

$$\Leftrightarrow 4m^2 + 4m - 2 = 0 \Leftrightarrow m = \frac{-1 \pm \sqrt{3}}{2}$$

Vậy $m = \frac{-1 \pm \sqrt{3}}{2}$.

Các bạn thân mến như vậy là sắp đến kì thi tuyển sinh Đại Học rồi. Ban giám khảo chúc tất cả các thành viên VMF và các bạn đọc theo dõi những đề thi của VMF sẽ đạt kết quả cao nhất và thi đỗ vào các trường Đại Học mà các bạn mong muốn.