ỨNG DỤNG PHƯƠNG PHÁP TỌA ĐỘ TRONG HÌNH HỌC

I.Kiến thức cơ bản :

1.Kiến thức : (Theo chương trình Hình Học 10 nâng cao)

- ✓ Tọa độ của điểm, véc tơ trong mặt phẳng và các kiến thức liên quan.
- ✓ Đường thẳng.
- ✓ Đường tròn.
- ✓ Các đường Cônic : Elip, Hyperbol, Parabol.

2.Các dạng bài toán áp dụng :

.Bài toán hình học khó áp dụng được cho các tính chất hình học thuần tuý (hình học cổ điển) .
.Bài toán hình học mà việc chứng minh hoặc tính toán quá phức tạp.
.Bài toán hình học chứa đựng các yếu tố : tọa độ, véctơ, đường Cônic . . .

3.Nhận dạng :

.Dạng 1: bài toán hình giải tích thuần tuý (chứa đựng sẳn các yếu tố về hình giải tích)
.Dạng 2: bài toán hình cổ điển chuyển về bài toán véc tơ (không sử dụng tọa độ)
.Dạng 3: bài toán hình cổ điển chuyển về bài toán tọa độ.

4.Phương pháp áp dụng :

.Chọn hệ trục tọa độ thích hợp (hệ tọa độ Đêcac hoặc Afin) tùy theo bài toán sao cho việc tính toán đơn giản, dễ biểu diễn.
.Tìm toạ độ các đối tượng đã cho và các đối tượng liên quan.
.Từ đó rút ra các tính chất hình học cần tìm theo yêu cầu của bài toán.

II.Các bài toán minh hoa :

Bài 1: (Đề thi học sinh giỏi quốc gia 2006-2007)

Cho tam giác ABC có hai đỉnh B, C cố định và đỉnh A thay đổi. Gọi H, G lần lượt là trực tâm và trọng tâm của tam giác ABC. Tìm quỹ tích điểm A, biết rằng trung điểm K của HG thuộc đường thẳng BC.

Giải :

Chọn hệ trục Oxy với O trung điểm BC và trục Ox là đường thẳng BC
.Đặt $BC = 2a > 0$. Khi đó tọa độ $B(-a,0)$; $C(a,0)$. Giả sử
$A(x_0, y_0)$ $y_0 \neq 0$. Khi đó trực tâm H là nghiệm hệ phương trình

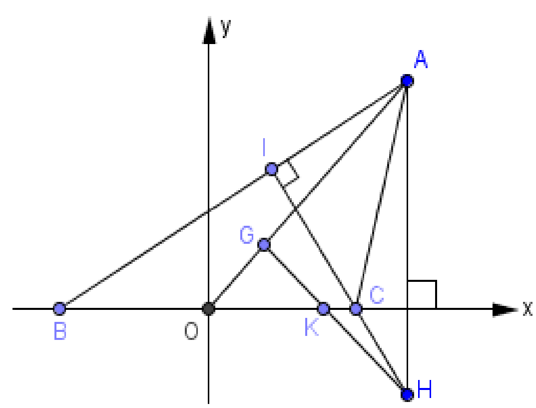
$$\begin{cases} x = x_0 \\ (x+a)(a-x_0) - y_0 y = 0 \end{cases} \Rightarrow H\left(x_0, \frac{a^2 - x_0^2}{y_0}\right)$$

.Trọng tâm $G\left(\frac{x_0}{3}; \frac{y_0}{3}\right)$, suy ra trung điểm $K\left(\frac{2x_0}{3}; \frac{3a^2 - 3x_0^2 + y_0^2}{6y_0}\right)$

.K thuộc đường thẳng BC khi và chỉ khi

$$3a^2 - 3x_0^2 + y_0^2 = 0 \Leftrightarrow \frac{x_0^2}{a^2} - \frac{y_0^2}{3a^2} = 1 \quad (y_0 \neq 0)$$

.Vậy quỹ tích A là hyperbol $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{3a^2} = 1$ bỏ đi hai điểm B, C



Bài 2 : (Đề thi OLYMPIC Lê Hồng Phong 2008-2009) Cho tam giác ABC có hai đỉnh B, C cố định và đỉnh A thay đổi. Qua B dựng đường thẳng d vuông góc với BC, d cắt đường trung tuyến AI của tam giác ABC tại K.Gọi H là trực tâm của tam giác ABC. Tìm quỹ tích điểm A, biết rằng IH song song với KC.

Giải :

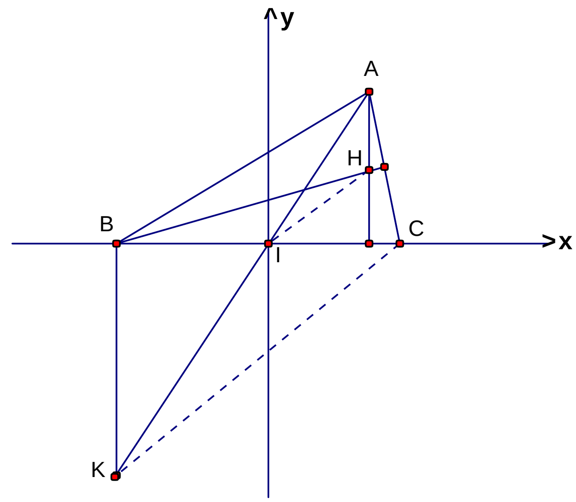
Chọn hệ trục Oxy với O trùng I và trục Ox là đường thẳng BC.
Đặt $BC = 2a > 0$.Khi đó toạ độ $B(-a;\ 0)$; $C(a;\ 0)$
Giả sử tọa độ điểm $A(x_0;\ y_0)$ với $y_0 \neq 0$

.Khi đó trực tâm H là nghiệm hệ phương trình

$$\begin{cases} x = x_0 \\ (x+a)(a-x_0) - y_0 y = 0 \end{cases} \Rightarrow H\left(x_0; \frac{a^2 - x_0^2}{y_0}\right)$$

$K = d \cap (AI)$ là nghiệm hệ phương trình

$$\begin{cases} x = -a \\ y = \frac{y_0}{x_0} x \end{cases} \Rightarrow K\left(-a; -a\frac{y_0}{x_0}\right) \text{ với } x_0 \neq 0$$



Theo giả thiết, ta có

$\vec{IH}$ cùng phương $\vec{KC} \Leftrightarrow a\frac{y_0}{x_0}.x_0 - 2a.\frac{a^2 - x_0^2}{y_0} = 0$

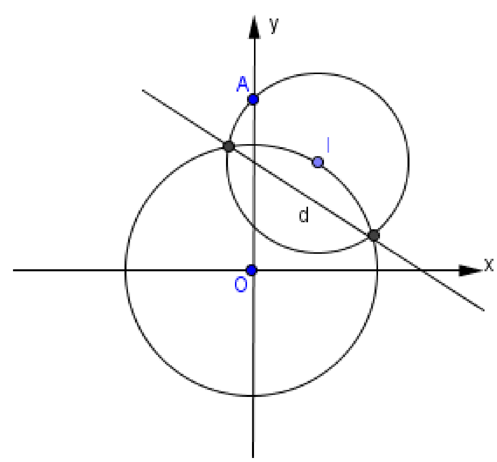
$$\Leftrightarrow \frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{2a^2} = 1$$

Vậy quỹ tích A là elip $\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{2a^2} = 1$ bỏ đi 4 điểm B, C, $A_1(0; -a\sqrt{2})$, $A_2(0; a\sqrt{2})$ là 4 đỉnh của elip

Bài 3: Trong mặt phẳng cho đường tròn (O,R) và một điểm A cố định. I là điểm di động trên (O). Đường tròn tâm I luôn đi qua A. Chứng minh rằng trục đẳng phương của hai đường tròn (O) và (I) luôn tiếp xúc với một đường tròn cố định .

Giải :

Chọn hệ trục (Oxy) như hình vẽ (OA là trục Oy) . Ta có A(0,b) , (O) : $x^2 + y^2 = R^2$.



Gọi I(m ; n) $\in$ (O) $\Rightarrow m^2 + n^2 = R^2$ và $IA^2 = m^2 + (b-n)^2$.

Vậy (I) : $(x-m)^2 + (y-n)^2 = m^2 + (n-b)^2$.

Hay $x^2 + y^2 - 2mx - 2ny + 2nb - b^2 = 0$. Suy ra phương trình của trục đẳng phương của (O) và(I) là (d) : 2mx + 2ny – 2nb $+ b^2 + R^2 = 0$.

Ta có d(A,d) = $\frac{|2nb - 2nb + b^2 - R^2|}{2\sqrt{m^2 + n^2}} = \frac{|b^2 - R^2|}{2R}$

Bài 4: Cho tam giác ABC có đường cao CH. Gọi I, K lần lượt là trung điểm của các đoạn AB, CH. Một đường thẳng d di động luôn luôn song song với cạnh AB cắt cạnh AC tại M và cắt cạnh BC tại N. Dựng hình chữ nhật MNPQ với hai điểm P, Q nằm trên cạnh AB. Gọi J là tâm hình chữ nhật MNPQ. Chứng minh ba điểm I, J, K thẳng hàng.

Giải :

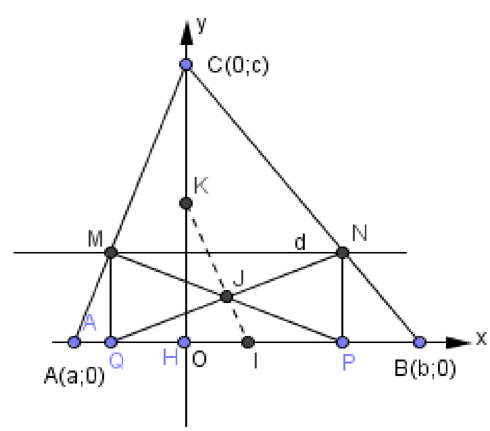
Chọn hệ trục Oxy sao cho $O \equiv H$, các điểm A, B nằm trên Ox, điểm C nằm trên Oy

Ta có toạ độ các điểm H(0; 0), C(0; c) , A(a; 0) , B(b; 0).

Đường thẳng d có phương trình y = m (0<m<c)

(AC) : cx+ay-ac = 0 và (BC) : cx+by = 0

$M = d \cap AC \Rightarrow M\left(\frac{a(c-m)}{c}; m\right)$, tương tự $N\left(\frac{b(c-m)}{c}; m\right)$



Điểm P là hình chiếu vuông góc của N trên Ox $\Rightarrow P\left(\dfrac{b(c-m)}{c};0\right)$

J là trung điểm của đoạn PM $\Rightarrow J\left(\dfrac{(a+b)(c-m)}{2c};\dfrac{m}{2}\right)$

Từ đó ta có $\overrightarrow{IK}=\left(-\dfrac{a+b}{2};\dfrac{c}{2}\right)$ và $\overrightarrow{IJ}=\left(-\dfrac{m(a+b)}{2c};\dfrac{m}{2}\right)$

Vậy $\overrightarrow{IK}$ cùng phương $\overrightarrow{IJ}$, nên ba điểm I, J, K thẳng hàng.

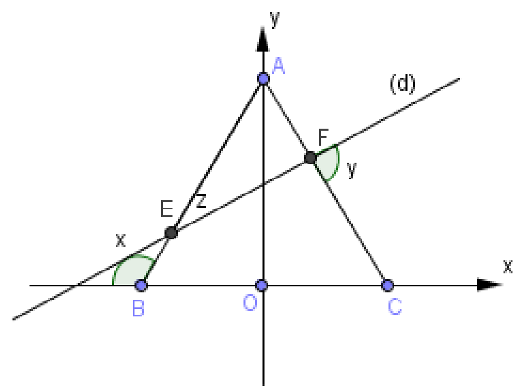
Bài 5 : Cho tam giác ABC đều có cạnh bằng 2a và (d) là đường thẳng tùy ý cắt các đường thẳng BC, CA, AB. Gọi x, y, z tương ứng là các góc giữa đường thẳng (d) và các đường thẳng BC, CA, AB. Chứng minh :

$$\sin^2 x.\sin^2 y.\sin^2 z+\cos^2 x.\cos^2 y.\cos^2 z=\frac{1}{16}.$$

Giải :

Chọn hệ trục tọa độ sao cho $A(0;a\sqrt{3}),B(-a;0),C(a;0)$. Khi đó

$\overrightarrow{AB}=(-a;-a\sqrt{3})$, $\overrightarrow{CA}=(-a;a\sqrt{3})$, $\overrightarrow{BC}=(2a;0)$.



Gọi $\vec{u}=(u_1;u_2)$ là véc tơ chỉ phương của đường thẳng (d). Ta có :

$$\cos^2 x=\frac{u_1^2}{u_1^2+u_2^2}\Rightarrow \sin^2 x=\frac{u_2^2}{u_1^2+u_2^2}$$

$$\cos^2 y=\frac{\left(u_1-u_2\sqrt{3}\right)^2}{4(u_1^2+u_2^2)}\Rightarrow \sin^2 y=\frac{\left(u_1\sqrt{3}-u_2\right)^2}{4(u_1^2+u_2^2)}$$

$$\cos^2 z=\frac{\left(u_1+u_2\sqrt{3}\right)^2}{4(u_1^2+u_2^2)}\Rightarrow \sin^2 z=\frac{\left(u_1\sqrt{3}-u_2\right)^2}{4(u_1^2+u_2^2)}$$

$$S=\sin^2 x.\sin^2 y.\sin^2 z+\cos^2 x.\cos^2 y.\cos^2 z$$

$$=\frac{u_1^2\left(u_1^2-3u_2^2\right)^2+u_2^2\left(3u_1^2-u_2^2\right)^2}{16\left(u_1^2+u_2^2\right)^3}=\frac{u_1^6+3u_1^4u_2^2+3u_1^2u_2^4+u_2^6}{16\left(u_1^2+u_2^2\right)^3}=\frac{1}{16}.$$

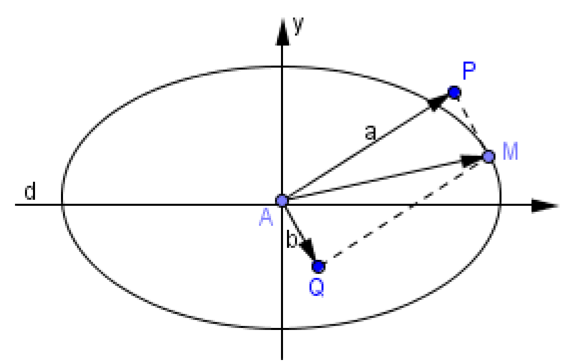
Bài 6 : Cho đường d trên đó lấy một điểm A. Cho trước hai số dương a, b sao cho a>b. Xét tất cả các điểm P, Q sao cho AP = a, AQ = b và đường thẳng d là phân giác của $\widehat{PAQ}$. ứng với mỗi cặp điểm P,Q xét điểm sao cho $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{AQ}$.Tìm quỹ tích điểm M.

Giải :

Chọn hệ tục tọa độ như sau : lấy A làm gốc tọa độ, trục hoành là d.Gọi M(x; y)Ta có

: $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{AQ}\Leftrightarrow (x;y)=(x_P;y_P)+(x_Q;y_Q)\Leftrightarrow \begin{cases}x=x_P+x_Q\\ y=y_P+y_Q\end{cases}$ (1

)



Do AP = a và AQ = b nên $\begin{cases}x_P^2+y_P^2=a^2\\ x_Q^2+y_Q^2=b^2\end{cases}$ (2)

Nếu phương trình (AP): y = kx thì (AQ): y = -kx

Từ (2) suy ra $\begin{cases}x_P^2+k^2x_P^2=a^2\\ x_Q^2+k^2x_Q^2=b^2\end{cases}$

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = x_P^2 + x_Q^2 + 2x_P x_Q = \dfrac{(a+b)^2}{1+k^2} \\ y^2 = y_P^2 + y_Q^2 + 2y_P y_Q = \dfrac{k^2(a-b)^2}{1+k^2} \end{cases} \Leftrightarrow \frac{x^2}{(a+b)^2} + \frac{y^2}{(a-b)^2} = 1$$

Vậy quỹ tích M là một elip

Bài 7: Trên đường thẳng d cho trước, cho ba điểm A, B, C trong đó B nằm giữa A và C. Vẽ vòng tròn tiếp xúc với d tại B. Gọi M là giao điểm của hai tiếp tuyến với vòng tròn trên vẽ từ A và C. Tìm quỹ tích điểm M.

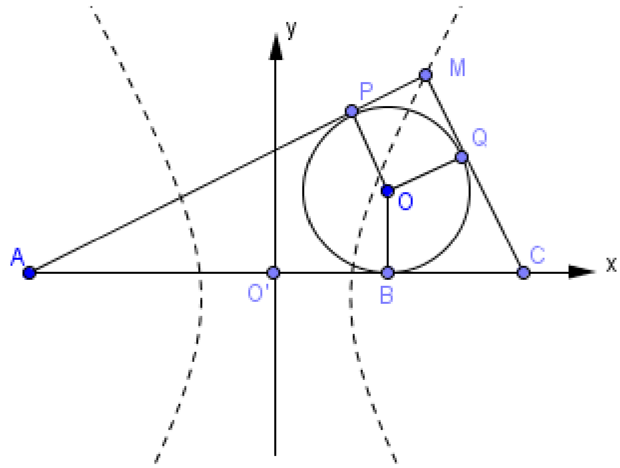
Giải :

Gọi các tiếp điểm như hình vẽ, ta có

$|MA - MC| = |BA - BC| =$ hằng số (1)

.Nếu B là trung điểm của AC thì từ (1) $\Rightarrow MA = MC$: quỹ tích M là trung trực của AC.

.Nếu B không là trung điểm của AC thì từ (1): quỹ tích M là hyperbol nhận A, C làm tiêu điểm (như hình vẽ)



Bài 8 : Cho đường thẳng d và một điểm A cố định không nằm trên d. P và Q là hai điểm di động trên d nhưng PQ = a (trong đó a là số dương cho trước). Gọi M là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác APQ. Tìm quỹ tích điểm M.

Giải :

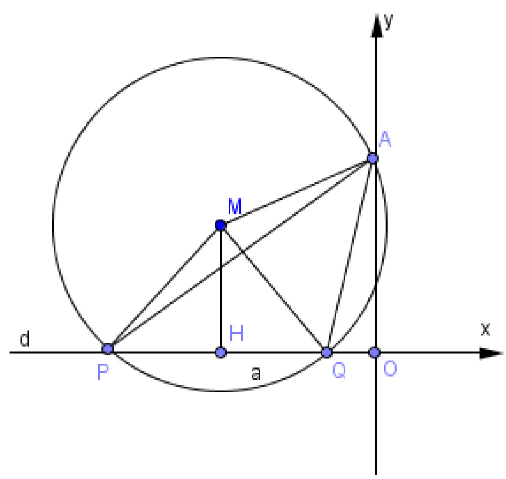
Dựng hệ trục tọa độ như hình vẽ

Gọi M (x; y), giả sử khoảng cách từ A đến d là h, khi đó A(0; h)

Ta có

$$MA^2 - MH^2 = \frac{a^2}{4} \Leftrightarrow x^2 + (y-h)^2 - y^2 = \frac{a^2}{4} \Leftrightarrow y = \frac{1}{2h}x^2 + \frac{h}{2} - \frac{a^2}{4h}$$

Vậy quỹ tích điểm M là một Parabol

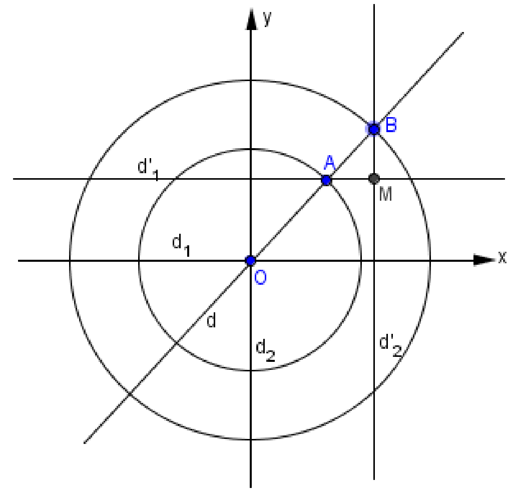


Bài 9: Qua tâm O của hai đường tròn đồng tâm vẽ hai đường thẳng vuông góc d_1 và d_2. Đường thẳng d di động quay quanh O về cùng một hướng cắt các vòng tròn nhỏ và lớn lần lượt tại A và B. Qua A vẽ đường thẳng d_1' song song d_1 và qua B vẽ đường thẳng d_2' song song d_2. Tìm quỹ tích điểm $M = d_1' \cap d_2'$.

Giải :

Lập hệ trục tọa độ nhận d_1, d_2 à trục Ox và Oy.
Giả sử đường thẳng d có phương trình y = kx, $A(x_A ; y_A)$, $B(x_B ; y_B)$.
Từ giả thiết, ta có $x = x_B$, $y = y_A$

Ta có $\begin{cases} x_A^2 + y_A^2 = r^2 \\ x_B^2 + y_B^2 = R^2 \end{cases}$ và $\begin{cases} y_A = kx_A \\ y_B = kx_B \end{cases}$



$\Rightarrow x_B^2 = \dfrac{R^2}{1+R^2}$; $y_A^2 = \dfrac{k^2r^2}{1+k^2}$

Từ đó ta có $\dfrac{x^2}{R^2} + \dfrac{y^2}{r^2} = \dfrac{x_B^2}{R^2} + \dfrac{y_A^2}{r^2} = 1$

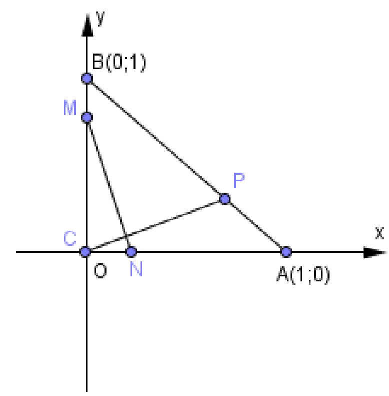
Vậy quỹ tích điểm M là Elip $\dfrac{x^2}{R^2} + \dfrac{y^2}{r^2} = 1$

Bài 10: Cho tam giác ABC vuông cân tại C. Trên các Cạnh BC, CA, AB lần lượt lấy các điểm M, N, P sao cho $\dfrac{MB}{MC} = \dfrac{NC}{NA} = \dfrac{PA}{PB}$. Chứng minh rằng $CP \perp MN$ và CP = MN

Giải :

Chọn hệ trục Oxy sao cho $O \equiv C$, tia Ox $\equiv$ CA và tia Oy$\equiv$ CB
Ta có toạ độ các điểm C(0; 0) , A(1; 0) , B(0; 1).

Từ giả thiết ta đặt $\dfrac{MB}{MC} = \dfrac{NC}{NA} = \dfrac{PA}{PB} = k$



Do đó $\begin{cases} \vec{CM} = \dfrac{1}{1+k}\vec{CB} \\ \vec{CN} = \dfrac{k}{1+k}\vec{CA} \\ \vec{CP} = \dfrac{1}{1+k}\vec{CA} + \dfrac{k}{1+k}\vec{CB} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} M\left(0; \dfrac{1}{1+k}\right) \\ N\left(\dfrac{k}{1+k}; 0\right) \\ P\left(\dfrac{1}{1+k}; \dfrac{k}{1+k}\right) \end{cases}$

Từ đó $\vec{MN}.\vec{CP} = \dfrac{k}{(1+k)^2} - \dfrac{k}{(1+k)^2} = 0 \Rightarrow CP \perp MN$

$\vec{MN}^2 = \dfrac{k^2+1}{(1+k)^2} = \vec{CP}^2$

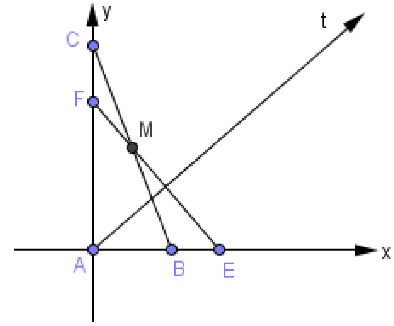
Bài 11: Cho tam giác ABC vuông tại A. Gọi At là tia phân giác của góc A. Qua trung điểm M của cạnh huyền BC ta dựng đường thẳng vuông góc với tia At cắt các đường thẳng AB và AC lần lượt tại E và F. Chứng minh BE = CF.

Giải :

Chọn hệ trục Oxy sao cho $O \equiv A$, tia Ox $\equiv$ AB và tia Oy$\equiv$ AC
Ta có toạ độ các điểm A(0; 0) , B(b; 0) , C(0; c).

Dễ dàng ta tìm được toạ độ $E\left(\dfrac{b+c}{2}; 0\right)$ và $F\left(0; \dfrac{b+c}{2}\right)$

Từ đó suy ra $BE = \left|\dfrac{c-b}{2}\right|$ và $CF = \left|\dfrac{b-c}{2}\right|$



Bài 12: Cho hai điểm A, B cố định và một đường thẳng d vuông góc với AB, nhưng không đi qua A, B. Một điểm M chạy trên d.Tìm tập hợp giao điểm N của các đường thẳng vuông góc với MA, MB tại AvàB.

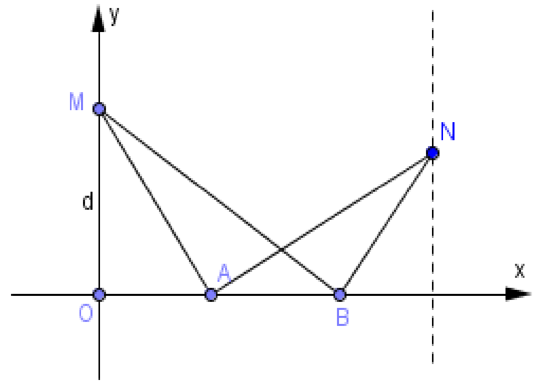
Giải :

Chọn hệ trục Oxy sao cho $O = d \cap AB$, tia Ox $\equiv$ AB và tia Oy$\equiv$ d

Ta có toạ độ các điểm A(a; 0) , B(b; 0) , M(0; m).Gọi N(x; y)

Khi đó $\begin{cases} \vec{MA}.\vec{NA} = 0 \\ \vec{MB}.\vec{NB} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a(a-x)+my = 0 \\ b(b-x)+my = 0 \end{cases}$

Giải hệ ta được x = a+b. Vậy tập hợp giao điểm N là đường thẳng vuông góc Ox tại H có hoành độ $\bar{OH} = a+b$.



Bài 13: Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn tâm I. Gọi D là trung điểm của cạnh AB, E là trọng tâm của tam giác ADC. Chứng minh rằng AB = AC thì IE vuông góc với CD.

Giải :

Ta có thể chọn hệ trục tọa độ Oxy sao cho O trùng với trung điểm BC, A thuộc Oy với A(0; a) , B(-c; 0) , C(c; 0).Khi đó ta có $D\left(-\frac{c}{2};\frac{a}{2}\right)$, $E\left(\frac{c}{6};\frac{a}{2}\right)$

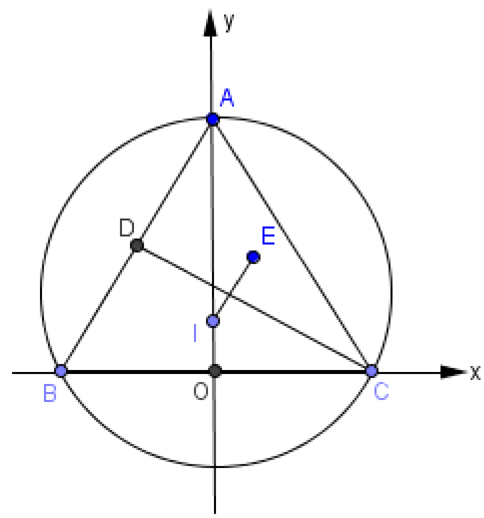
Để tính tọa độ tâm $I(0;y_0)$, ta có

$$IA = IC \Leftrightarrow (a-y_0)^2 = c^2 + y_0^2 \Rightarrow y_0 = \frac{a^2-c^2}{2a}$$

Hệ số góc đường thẳng IE là $k = \frac{y_E - y_I}{x_E - x_I} = \frac{3c}{a}$.

Hệ số góc đường thẳng CD là $k' = \frac{y_D - y_C}{x_D - x_C} = -\frac{a}{3c}$

Ta có $k.k' = -1 \Rightarrow IE \perp CD$.



Bài 14: Tìm quỹ tích những điểm M trên mặt phẳng có tổng khoảng đến một điểm cố định I và một đường thẳng cố định Δ bằng một số a dương cho trước.

Giải :

.Chọn hệ trục toạ độ vuông góc Oxy sao cho

+ $O \equiv I$

+ $Ox \perp \Delta$ và Δ có phương trình $x = d > 0$

.Ta phải tìm quỹ tích những điểm M(x ; y) sao cho

$\sqrt{x^2+y^2}+|x-d|$ a (1)

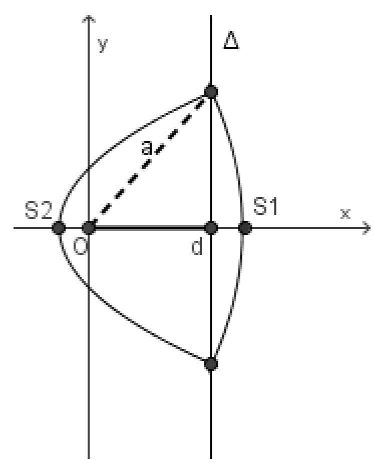
.Nếu $x \ge d$ thì $\sqrt{x^2+y^2}+|x-d|$ $\sqrt{x^2 \ge y^2}$ d

.Nếu $x < d$ thì $\sqrt{x^2+y^2}+|x-d|+d$ $(\sqrt{x^2-y^2} \ge x)$ d

.Như vậy các trường hợp xãy ra là

d > a : quỹ tích M là tập rỗng

d = a : từ lý luận trên (1) $\Leftrightarrow y$ 0 , $0 \le x \le a$: quỹ tích M đoạn thẳng nối từ I đến chân đường vuông góc hạ từ I lên Δ.



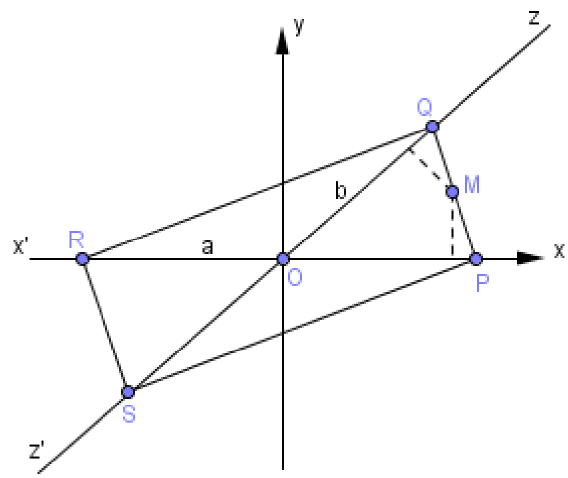
$d < a$: Khi $x \geq d$, từ (1) $\Rightarrow y^2 = 2(a-d)\left(\frac{a+d}{2} - x\right)$

Khi $x < d$, từ (1) $\Rightarrow y^2 = 2(a+d)\left(\frac{a-d}{2} + x\right)$

Như vậy quỹ tích M là 2 nhánh của 2 Parabol(khoảng giữa S1,S2) có phương trình như trên.

Bài 15: Cho hai đường thẳng cắt nhau a và b . Tìm tập hợp những điểm M sao cho tổng khoảng cách từ đó tới a và b luôn luôn bằng số 1 không đổi .

Giải :



Ta chọn hệ trục tọa độ Oxy với O là giao điểm của a và b , Ox là đường thẳng a sao cho đường thẳng b có phương trình y = kx (k > 0)

Giả sử M(x ; y) là điểm nào đó , kẻ MA ⊥ a , MB ⊥ b .

Khi đó , ta có thể tính được các khoảng cách MA và MB :

$MA = |y|$, $MB = \frac{|kx - y|}{\sqrt{k^2+1}}$

Vậy , với điều kiện bài toán là $|y| + \frac{|kx-y|}{\sqrt{k^2+1}} = 1$ (1) . Ta chia các trường hợp sau :

a) $y \geq 0$ và $y \leq kx$. Dễ thấy rằng khi đó M nằm trong góc xOz .

$$(1) \Leftrightarrow y + \frac{kx-y}{\sqrt{k^2+1}} = 1 \Leftrightarrow kx + \left(\sqrt{k^2+1} - 1\right)y - \sqrt{k^2+1} = 0 \quad (2)$$

Như vậy , tập hợp M là phần đường thẳng (2) nằm trong góc xOz , tức là đoạn PQ (hình vẽ) .

b) $y \geq 0$ và $y \geq kx$. Khi đó M nằm trong góc zOx' và :

$$(1) \Leftrightarrow y + \frac{-kx+y}{\sqrt{k^2+1}} = 1 \Leftrightarrow -kx + \left(\sqrt{k^2+1} + 1\right)y - \sqrt{k^2+1} = 0 \quad (3)$$

Như vậy tập hợp M là phần đường thẳng (3) nằm trong zOx', tức là đoạn thẳng PR (hình vẽ) .

Dễ thấy rằng tích vô hương của hai vectơ pháp tuyến :

$$\vec{n}_{PQ} = \left(k ; \sqrt{k^2+1} - 1\right) \quad , \vec{n}_{PR} = \left(-k ; \sqrt{k^2+1} + 1\right)$$ bằng 0 , tức là PQ ⊥ PR

Tương tự như trường hợp a) và b) , ta xét các trường hợp :

c) $y \leq 0$ và $y \leq kx$

d) $y \leq 0$ và $y \geq kx$,

Ta đi đến kết luận :Tập hợp các điểm M là một hình chữ nhật QPRS có tâm là O và hai đường chéonằm trên a và b.

Bài 16: Cho hai điểm A, B cố định, AB = a không đổi và hai điểm C, D di động sao cho CD = b không đổi, $\overrightarrow{AB}$ cùng hướng $\overrightarrow{CD}$, AC + BD = 2(a+b). Tìm quĩ tích giao điểm M của AD và BC.

Giải :

Vẽ $ME // AC, MF // BD \quad (E, F \in AB)$

Ta có: $\frac{MB}{MC} = \frac{AB}{CD} = \frac{a}{b}$; $\frac{MA}{MD} = \frac{AB}{CD} = \frac{a}{b}$

Suy ra: $\dfrac{BE}{BA}=\dfrac{MB}{BC}=\dfrac{a}{a+b}$; $\dfrac{AF}{AB}=\dfrac{AM}{AD}=\dfrac{a}{a+b}$

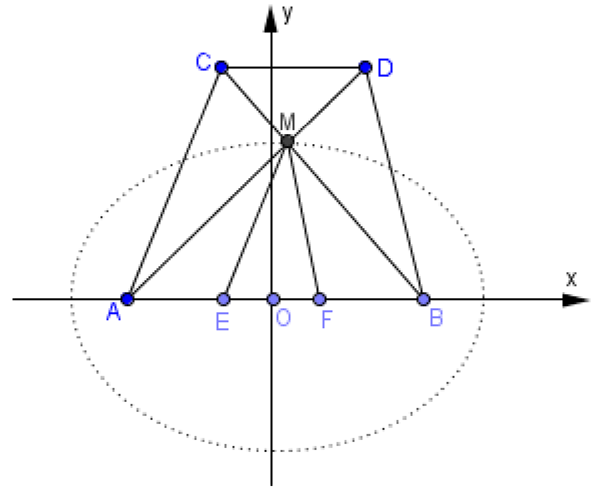
$\Rightarrow BE=\dfrac{a^2}{a+b}$, $AF=\dfrac{a^2}{a+b}$

Suy ra: E và F cố định.

Vì $\dfrac{ME}{AC}=\dfrac{BM}{BC}=\dfrac{a}{a+b}$; $\dfrac{MF}{BD}=\dfrac{AM}{AD}=\dfrac{a}{a+b}$ nên

$ME=\dfrac{a.AC}{a+b}$, $MF=\dfrac{a.BD}{a+b}$

Suy ra: $ME+MF=\dfrac{a.(AC+BD)}{a+b}=2a$ không đổi.



Chọn hệ trục Oxy như hình vẽ, với O là trung điểm của EF.
Ta có tập hợp điểm M là một Elip nhận E và F làm hai tiêu điểm, có độ dài trục lớn là 2a

Bài 17: Hình bình hành $ABCD$ thay đổi trong đó A và D cố định thoả: $\dfrac{AC}{AD}=\dfrac{BD}{BA}$. Tìm tập hợp điểm B và C.

Giải :

Trong mặt phẳng Oxy, chọn $A\equiv O(0;0)$; $D(a;0)$ với $AD=a$ (không đổi)

Theo giả thiết hình bình hành $ABCD$ thay đổi nên lấy $B(x;y)$ và $C(x+a;y)$ bất kỳ với điều kiện $y\neq 0$.

Khi đó:

$\dfrac{AC}{AD}=\dfrac{BD}{BA}\Leftrightarrow AC.BA=AD.BD$

$\Leftrightarrow \sqrt{(x+a)^2+y^2}.\sqrt{x^2+y^2}=a.\sqrt{(x-a)^2+y^2}$

$\Leftrightarrow (x^2+y^2+2ax+a^2).(x^2+y^2)=a^2.(x^2+y^2-2ax+a^2)$

$\Leftrightarrow (x^2+y^2)^2+2ax(x^2+y^2)+2a^3x-a^4=0 \qquad (*)$

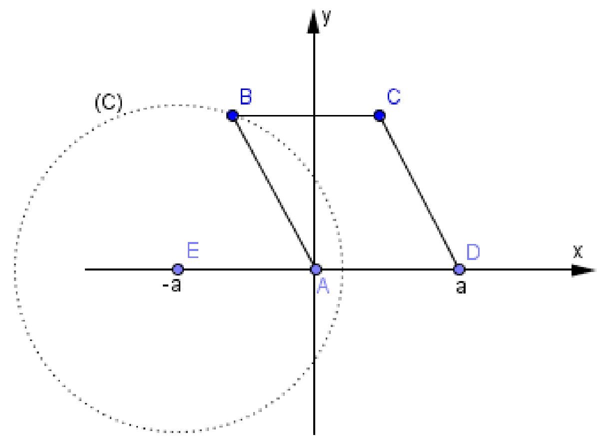
((*) là phương trình bậc hai với ẩn (x^2+y^2))

Tính $\Delta'=(ax)^2-(2a^3x-a^4)=(a^2-ax)^2$

$(*)\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2+y^2=-ax+(a^2-ax) \\ x^2+y^2=-ax-(a^2-ax) \quad \text{(vô lý)}\end{array}\right.$

$\Leftrightarrow x^2+2ax+y^2=a^2$

$\Leftrightarrow (x+a)^2+y^2=2a^2$



Vậy tập hợp điểm B là đường tròn (C) có tâm $I(-a;0)$, bán kính $R_B=a\sqrt{2}$, bỏ hai điểm $\left(-a\left(\sqrt{2}+1\right);0\right)$ và $\left(a\left(\sqrt{2}-1\right);0\right)$

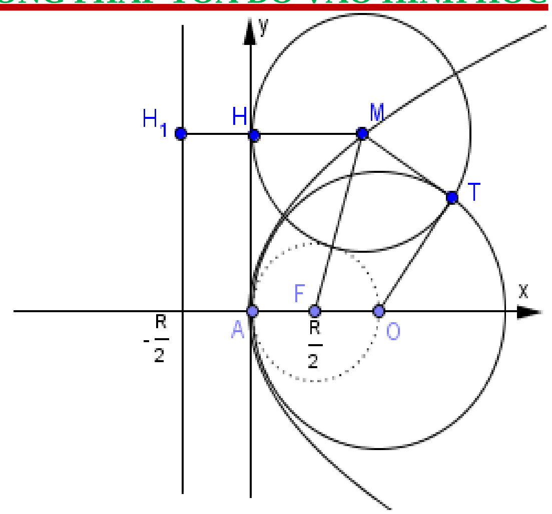
Do tứ giác $ABCD$ là hình bình hành, ta có $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AD}$. Vậy tập hợp điểm C là đường tròn (C') là ảnh của đường tròn (C) qua phép tịnh tiến theo $\overrightarrow{AD}$. Đường tròn (C') có tâm $A\equiv O(0;0)$, bán kính $R_C=a\sqrt{2}$, bỏ hai điểm $\left(-a\sqrt{2};0\right)$ và $\left(a\sqrt{2};0\right)$.

Bài 18: Cho đường tròn (C) tâm O và tiếp tuyến d tiếp xúc với (C) tại một điểm A cố định trên (C). M là một điểm trên mặt phẳng, kẻ tiếp tuyến MT với (C) và hạ MH vuông góc với d.

1. Tìm quỹ tích các điểm M thỏa MT = MH.

2. Chứng minh các đường tròn tâm M bán kính MT luôn tiếp xúc với một đường tròn cố định.

Giải :



1.Chọn hệ trục Oxy sao cho A là gốc tọa độ, tia Ox $\equiv$ AO và tia Oy$\equiv$ d.Khi đó O(R; 0), giả sử M(x; y)

Ta có $MH = MT \Rightarrow MH^2 = MT^2 = MO^2 - R^2$

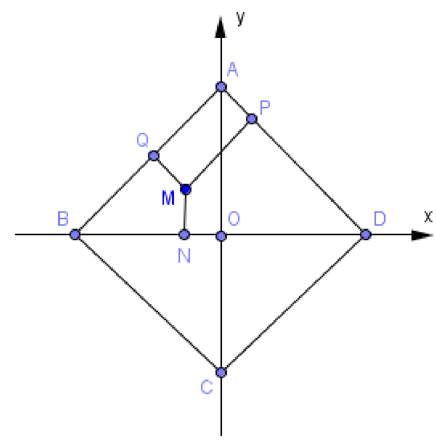
$\Leftrightarrow x^2 = (x-R)^2 + y^2 - R^2 \Leftrightarrow y^2 = 2Rx$. Vậy quỹ tích M là parabol

2.Theo đn của parabol, ta có MF = MH_1 = MH + R/2

Suy ra MF = MT + R/2 , điều này chứng tỏ đường tròn tâm M bán kính MT tiếp xúc đường tròn cố định tâm F bán kính R/2.

Bài 19: Cho hình vuông cố định. Tìm tập hợp những điểm M trong hình vuông đó và thỏa mãn điều kiện: Tích hai khoảng cách từ điểm M đến hai cạnh của hình vuông cùng xuất phát từ một đỉnh bằng bình phương khoảng cách từ điểm M đến đường chéo của hình vuông không đi qua đỉnh đó.

Giải :



Không giảm tính tổng quát, xét hình vuông có cạnh $\sqrt{2}$.

Đặt hình vuông ABCD lên mặt phẳng có hệ trục tọa độ Oxy sao cho A(0;1), B(-1;0), C(0;-1), D(1;0).Gọi M(x;y) là điểm ở trong hình vuông ABCD, hạ MN,MP, MQ lần lượt vuông góc với BD, DA, AB tại N, P, Q.

Do đó: MP.MQ = MN^2 (1) (xét 2 cạnh hình vuông phát xuất từ đỉnh A)

AB: x – y + 1 = 0, AD: x + y – 1 = 0.

(1) $\Leftrightarrow \frac{|x-y+1|}{\sqrt{2}}\cdot\frac{|x+y-1|}{\sqrt{2}} = y^2 \Leftrightarrow |x^2-(y-1)^2| = 2y^2$

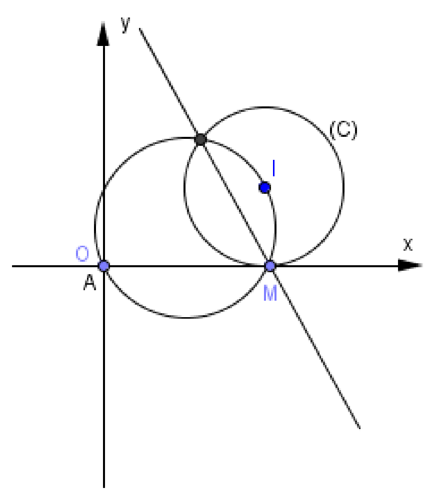
M(x;y) ở trong hình vuông nên x – y + 1 > 0, và x + y – 1 < 0.

Do đó: $x^2 - (y-1)^2 = (x-y+1)(x+y-1) < 0$ nên (1) $\Leftrightarrow x^2 - (y-1)^2 = -2y^2 \Leftrightarrow x^2 + (y+1)^2 = 2$

Vậy tập hợp các điểm M là cung BD, cung # đường tròn C, bán kính R = $\sqrt{2}$ .Từ kết quả trên ta kết luận: Tập hợp các điểm M là 4 cung # đường tròn tâm là các đỉnh của hình vuông và có bán kính bằng cạnh của hình vuông.

Bài 20: Cho đường thẳng cố định a và một điểm A cố định trên a. Gọi (C) là đường tròn lưu động ở trong một nữa mặt phẳng (α) có bờ a. (C) có bán kính không đổi R và luôn tiếp xúc với a, gọi M là tiếp điểm. Gọi I là tâm của đường tròn (C).Chứng minh rằng trong mặt phẳng chứa đường tròn (C), có một parabol (P) cố định sao cho trục đẳng phương của (C) và đường tròn đường kính AI luôn luôn tiếp xúc (P) khi M thay đổi trên a.

Giải :



Trong mặt phẳng chọn hệ trục tọa độ Đề-các vuông góc Oxy, với Ox trùng với a, nữa mặt phẳng α là nữa mặt phẳng y > 0, O trùng A. Đặt M(m;0) có tâm I(m;R).

Phương trình của (C) là:

(C): $(x - m)^2 + (y - R)^2 = R^2$ hay

C): $x^2 + y^2 - 2mx - 2Ry + m^2 = 0$.

Phương trình đường tròn đường kính AI là:

(C'): $(x - m/2)^2 + (y - R/2)^2 = \frac{m^2 + R^2}{4}$ hay

(C'): $x^2 + y^2 - mx - Ry = 0$.

Phương trình trục đẳng phương của hai đường tròn (C) và (C') là:

(d): $mx + Ry - m^2 = 0 \Leftrightarrow$ (d): $y = f(x) = -\frac{m}{R}x + \frac{m^2}{R}$.

Xét hàm số $y = g(x) = -\frac{1}{4R}x^2$.

Hệ $\begin{cases} f(x)=g(x) \\ f'(x)=g'(x)\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\dfrac{m}{R}x+\dfrac{m^2}{R}=-\dfrac{1}{4R}x^2 \\ -\dfrac{m}{R}=-\dfrac{x}{2R}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(x-2m)^2=0\\ x=2m\end{cases} \Leftrightarrow x=2m.$

Vậy Parabol $y = f(x) = -\dfrac{1}{4R}x^2$ luôn tiếp xúc với trục đẳng phương (d).

Bài 21: Cho tam giác với 3 cạnh a, b, c mà 3 đỉnh có tọa độ nguyên. Gọi R là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác. CMR: $abc \geq 2R$.

Giải :

Gọi tam giác là $A_1A_2A_3$ như hình vẽ $S_{A_1A_2A_3} = S = \dfrac{abc}{4R}$

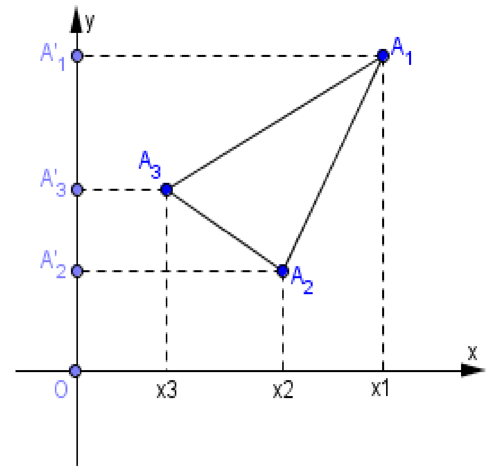
Do đó yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow$ chứng minh $S \geq \dfrac{1}{2}$

Giả sử: $A_1(x_1, y_1)$, $A_2(x_2, y_2)$, $A_3(x_3, y_3)$. Gọi A'_1, A'_2, A'_3 là hình chiếu của A_1, A_2, A_3 lên Oy.

Ta có: $S = S_{A_1A_2A'_2A'_1} - S_{A_1A_3A'_3A'_1} - S_{A_2A_3A'_3A'_2}$

$= A'_1A'_2 \cdot \dfrac{A_1A'_1 + A_2A'_2}{2} - A'_1A'_3 \dfrac{A_1A'_1 + A_3A'_3}{2} - A'_2A'_3 \dfrac{A_2A'_2 + A_3A'_3}{2}$ $2S$

$= (y_1 - y_2)(x_1 + x_2) - (y_1 - y_3)(x_1 + x_3) - (y_3 - y_2)(x_2 + x_3)$ (*)Vế trái (*) là số nguyên (do đề bài cho x_i, y_i nguyên) $\Rightarrow$ 2S là số nguyên $\Rightarrow 2S \geq 1 \Rightarrow S \geq$ #



Bài 22 : Trên mặt phẳng xét một hình vuông ABCD và một tam giác đều EFG cắt nhau tạo thành một thất giác lồi MBNPQRS. Chứng minh rằng nếu SM = NP = QR $\Leftrightarrow$ MB = PQ và BN = RS.

Giải :

Chọn hệ trục Axy như hình vẽ. Gọi a là cạnh của hình vuông.

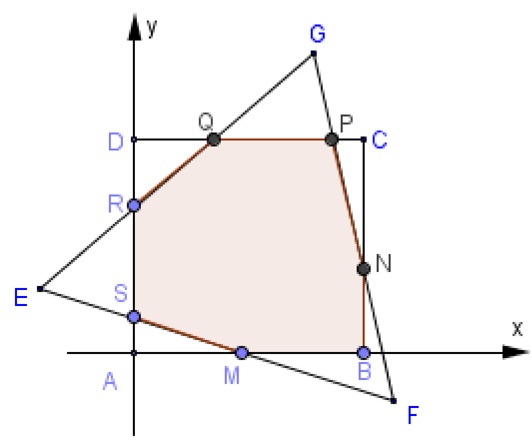
Ta có A(0; 0), B(a; 0), C(a; a), D(0; a), M(m; 0), N(a; n), P(p; a), Q(q; a), R(0; r), S(0; s)

.Nếu SM = NP = QR

Ta có $\overrightarrow{SM} = k\overrightarrow{EF}$, $\overrightarrow{NP} = k\overrightarrow{FG}$, $\overrightarrow{QR} = k\overrightarrow{GE}$ với $k = \dfrac{SM}{EF}$

Ta có $\overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FG} + \overrightarrow{EG} = \vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{SM} + \overrightarrow{NP} + \overrightarrow{QR} = \vec{0}$

$\Rightarrow \begin{cases} m+p-a-q=0 \\ -s-n+r=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a-m=p-q \\ n=r-s\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} MB=PQ \\ BN=RS\end{cases}$



.Nếu MB = PQ và BN = RS thì $\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{PQ} = \vec{0}$, $\overrightarrow{BN} + \overrightarrow{RS} = \vec{0}$ kết hợp $\overrightarrow{SM} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BN} + \overrightarrow{NP} + \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} + \overrightarrow{RS} = \vec{0}$

$\Rightarrow \overrightarrow{SM} + \overrightarrow{NP} + \overrightarrow{QR} = \vec{0}$

$\Rightarrow x\overrightarrow{EF} + y\overrightarrow{FG} + z\overrightarrow{GE} = \vec{0}$

$\Rightarrow (x-z)\overrightarrow{EF} = (z-y)\overrightarrow{FG}$

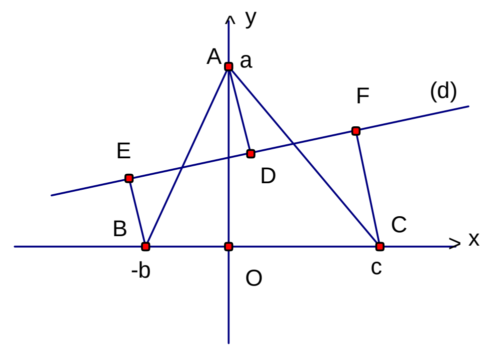
Vì $\Rightarrow \overrightarrow{EF}$, $\overrightarrow{FG}$ không cùng phương nên $\Rightarrow x = y = z \Rightarrow$ SM = NP = QR.

III.Các bài tập tự giải :

Bài 1: Cho tam giác ABC nhọn. (D) là một đường thẳng thay đổi. Gọi D, E, F lần lượt là hình chiếu vuông góc của A, B, C lên (D). Biết rằng $AD^2\tan A + BE^2\tan B + CF^2\tan C = 2S_{ABC}$. Xác định vị trí của đường thẳng (D) để AD lớn nhất.

Giải:

.Chọn hệ trục như hình vẽ (b , c >0)



.Ta có $\tan B = \frac{a}{b}, \tan C = \frac{a}{c}$

$$\tan A = \frac{\tan B + \tan C}{\tan B.\tan C - 1} = \frac{a(b+c)}{a^2 - bc}$$

$$2S_{ABC} = a(b+c)$$

.Giả sử phương trình (d) : $x.\sin\alpha + y.\cos\alpha + d = 0$

$$AD = d(A,d) = |a\cos\alpha + d|$$

$$BE = d(B,d) = |-b\sin\alpha + d|$$

$$CF = d(C,d) = |c\sin\alpha + d|$$

.Theo giả thiết $AD^2\tan A + BE^2\tan B + CF^2\tan C = 2S_{ABC}$

$$\Leftrightarrow (a\cos\alpha + d)^2\frac{a(b+c)}{a^2-bc} + \frac{a}{b}(-b\sin\alpha + d)^2 + \frac{a}{c}(c\sin\alpha + d)^2 = a(b+c)$$

$$\Leftrightarrow bc.\cos^2\alpha + 2ad.\cos\alpha + \frac{a^2d^2}{bc} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{bc}{a}.\cos\alpha + d = 0$$

.Điều này chứng tỏ (d) đi qua $H\left(0;\frac{bc}{a}\right)$ là trực tâm tam giác ABC.

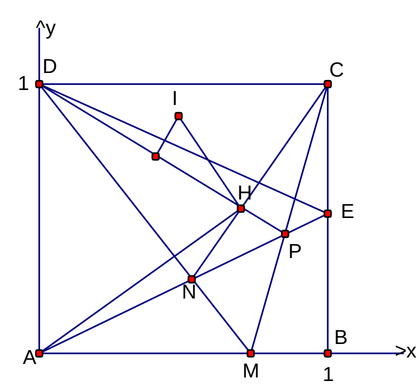
.Vậy AD max = AH, khi (d) đi qua H và song song với BC.

Bài 2: Cho hình vuông ABCD có E trung điểm BC. M là điểm di động trên cạnh AB. Gọi N, P lần lượt là giao điểm của MD và MC với AE. Gọi H là giao điểm của NC và DP, I là giao điểm của đường trung trực đoạn DH với đường thẳng vuông góc với AH tại H. Chứng minh khi M di động trên cạnh AB thì I di động trên một đường tròn cố định.

Giải:

.Chọn hệ trục như hình vẽ, ta có $M(m;0)$

.Ta có $(AE): x - 2y = 0$, $(DM): x + my - m = 0$,
$(CM): x + (m-1)y - m = 0$



$.N = AE \cap MD \Rightarrow N\left(\frac{2m}{m+2};\frac{m}{m+2}\right)$, $P = AE \cap MC \Rightarrow P\left(\frac{2m}{m+1};\frac{m}{m+1}\right)$

.Từ đó $(DP): x + 2my - 2m = 0$, $(NC): 2x + (m-2)y - m = 0$

$.H = DP \cap NC \Rightarrow H\left(\frac{4m}{3m+2};\frac{3m}{3m+2}\right)$

.Suy ra $H \in (d): 3x - 4y = 0$ cố định.

.Theo giả thiết ta có $ID = IH = d(I,d)$, suy ra I thuộc parabol (P) có tiêu điểm là D và đường chuẩn (d).

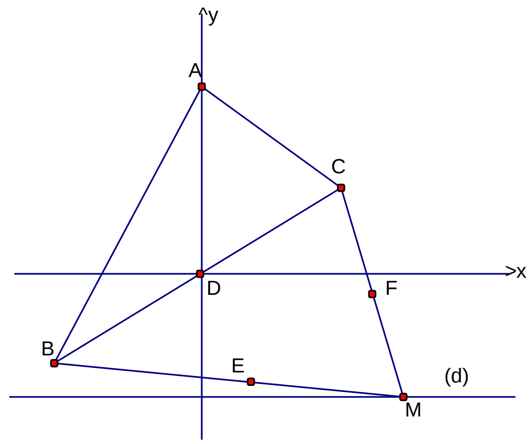
Bài 3: (Đề thi HSG quốc gia 2007-2008)

Cho tam giác ABC, trung tuyến AD .Cho đường thẳng (d) vuông góc với đường thẳng AD. Xét điểm M trên (d). Gọi E, F lần lượt là trung điểm của MB và MC. Đường thẳng đi qua E và vuông góc với (d) cắt đường thẳng AB tại P, đường thẳng đi qua F và vuông góc với (d) cắt đường thẳng AC tại Q. Chứng minh rằng đường thẳng đi qua M và vuông góc với PQ luôn đi qua một điểm cố định, khi M di động trên (d).

Giải:

.Chọn hệ trục như hình vẽ $O \equiv D, Oy \equiv DA$.Khi đó Ox song song (d), A(0;a), B(b; c) , C(-b; -c)

.Phương trình đường thẳng



$$AB : (a-c)x + by - ab = 0$$
$$AC : (a+c)x - by + ab = 0$$

.$M(x_M ; d)$

.Khi đó $(d_1) : x = \dfrac{b + x_M}{2}$, $(d_2) : x = \dfrac{b - x_M}{2}$

.Từ đó suy ra tọa độ $P = d_1 \cap AB$, $Q = d_2 \cap AC$

.Suy ra đường thẳng đi qua M và vuông góc PQ có phương trình

$$b^2\left(x - \frac{bc}{a}\right) - (ax_M - bc)\left(y - d + \frac{b^2}{a}\right) = 0$$

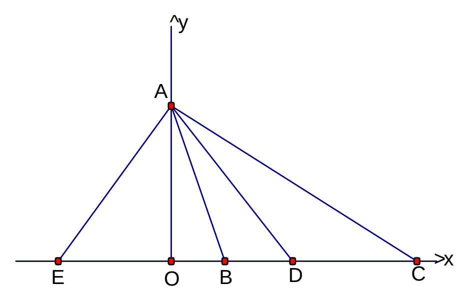
.Suy ra đường thẳng đi qua điểm cố định $\left(\dfrac{bc}{a} ; d - \dfrac{b^2}{a}\right)$

Bài 4: Cho tam giác ABC có hai đường phân giác trong và ngoài góc A cắt cạnh BC tại D và E. Chứng minh rằng nếu AD = AE thì $AB^2 + AC^2 = 4R^2$ (trong đó R là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC).

Giải:

.Chọn hệ trục như hình vẽ

Theo giả thiết tam giác ADE vuông cân tại A.



.Khi đó OA = OE = OD nên $B(b;0), A(0;a), D(a;0), E(-a;0), C(c;0)$

.Theo tính chất đường phân giác $\dfrac{DB}{DC} = \dfrac{AB}{AC} \Rightarrow \dfrac{DB^2}{DC^2} = \dfrac{AB^2}{AC^2}$

$$\Leftrightarrow \frac{(b-a)^2}{(c-a)^2} = \frac{b^2 + a^2}{c^2 + a^2} \Leftrightarrow (b-a)^2(c^2 + a^2) = (c-a)^2(b^2 + a^2) \Leftrightarrow c = \frac{a^2}{b}$$

.Ta có $AB^2 + AC^2 = (a^2 + b^2) + (a^2 + \dfrac{a^4}{b^2}) = \left(\dfrac{a^2 + b^2}{b}\right)^2$

.Gọi I(x;y) là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC, ta có

$$\begin{cases} AI = BI \\ BI = CI \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{b^2 + a^2}{2b} \\ a \end{cases}$$

.Suy ra $4R^2 = 4AI^2 = 4\left[\left(\dfrac{b^2 + a^2}{2b}\right)^2 + (a-a)^2\right] = \left(\dfrac{b^2 + a^2}{b}\right)^2$

.Từ đó suy ra $AB^2 + AC^2 = 4R^2$

BÀI TẬP : ỨNG DỤNG HÌNH HỌC GIẢI TÍCH THUẦN TÚY

Bài 1 : Trong mặt phẳng Oxy cho tam giác ABC có B(1; 2). Đường phân giác trong Δ của góc A có phương trình 2x + y -1 = 0, khoảng cách từ C đến Δ bằng 2 lần khoảng cách từ B đến Δ. Tìm tọa độ của A và C, biết rằng C nằm trên trục tung.

Bài 2 : Cho điểm A(1; 0) và hai đường tròn $(C_1) : x^2 + y^2 = 2$, $(C_2) : x^2 + y^2 = 5$. Xét tam giác ABC có $B \in (C_1)$ và $C \in (C_2)$. Tìm tọa độ B, C để diện tích tam giác ABC lớn nhất.

Bài 3 : Cho đường thẳng $\Delta: 3x+4y-25=0$, điểm M chạy trên Δ. Trên tia OM lấy N sao cho OM.OM = 1. Chứng minh N chạy trên đường tròn cố định, viết phương trình đường tròn đó.

Bài 4 : Cho parabol $y=-x^2 (P)$ và đường thẳng $y=-mx-1\ (d)$. Chứng minh khi m thay đổi đường thẳng (d) luôn cắt (P) tại 2 điểm phân biệt M, N. Tìm quỹ tích tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác OMN.

Bài 5 : Cho đường tròn $(C): x^2+y^2=1$. Đường tròn (C) cắt trục tung ở A(1; 0) và B(-1; 0). Đường thẳng $y=m\ (0 \neq |m| < 1)$ cắt (C) tại J và S. Đường thẳng qua A, J cắt đường thẳng qua B, S tại P. Tìm tập hợp các điểm P khi m thay đổi.

Bài 6 : Cho elip (E) có tiêu điểm F. Ba tia xuất phát từ F cắt (E) tại M, N, P. Chứng minh $\frac{1}{FM}+\frac{1}{FN}+\frac{1}{FP}$ không đổi khi M, N, P thay đổi.

Bài 7 : Trên mp Oxy cho ba đường thẳng $d_1: 3x-y-4=0$, $d_2: x+y-6=0$, $d_1: x+3y-3=0$. Tìm các độ các đỉnh của hình vuông ABCD biết rằng A và C thuộc d_3, B thuộc d_1, D thuộc d_2.

Bài 8 : Trên mp Oxy cho ba đường thẳng $d_1: x-2y-2=0$, $d_2: 2x+3y-11=0$.Đường thẳng d đi qua giao điểm của d_1, d_2 cắt hai tia Ox, Oy lần lượt tại A, B. Viết phương trình đường thẳng d sao cho $\frac{1}{OA^2}+\frac{1}{OB^2}$ nhỏ nhất.

BÀI TẬP : ỨNG DỤNG HÌNH HỌC GIẢI TÍCH VÀO BÀI HÌNH HỌC TỔNG HỢP

Bài 1 : Cho tam giác ABC nhọn có trọng tâm G và trực tâm H không trùng nhau. Chứng minh rằng

$$GH // BC \Leftrightarrow \tan B + \tan C = 2\tan A.$$

Bài 2 : Cho tam giác ABC đều cạnh a. Tìm tập hợp các điểm M thỏa mãn : $4MA^2-2MB^2-MC^2=6a^2$

Bài 3 : Trên đoạn AD cố định, dựng hình bình hành ABCD sao cho $\frac{AC}{AD}=\frac{BD}{AB}$. Tìm quỹ tích điểm B.

Bài 4 : Cho hình vuông ABCD cạnh bằng 2. Gọi M là trung điểm cạnh CD, N là điểm di động trên cạnh BC sao cho $BC=n\ (0 \le n \le 1)$ và P là điểm nằm trên cạnh AB sao cho DP song song với MN. Chứng minh đường thẳng PN luôn tiếp xúc với một đường tròn cố định.

Bài 5 : Cho tam giác ABC nhọn. (D) là một đường thẳng thay đổi. Gọi D, E, F lần lượt là hình chiếu vuông góc của A, B, C lên (D). Biết rằng $AD^2\tan A + BE^2\tan B + CF^2\tan C = 2S_{ABC}$. Xác định vị trí của đường thẳng (D) để AD lớn nhất.

Bài 6 : Cho tam giác ABC có hai đường phân giác trong và ngoài góc A cắt cạnh BC tại D và E. Chứng minh rằng nếu AD = AE thì $AB^2+AC^2=4R^2$ (trong đó R là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC).

Bài 7 : Cho tam giác ABC, trung tuyến AD .Cho đường thẳng (d) vuông góc với đường thẳng AD. Xét điểm M trên (d). Gọi E, F lần lượt là trung điểm của MB và MC. Đường thẳng đi qua E và vuông góc với (d) cắt đường thẳng AB tại P, đường thẳng đi qua F và vuông góc với (d) cắt đường thẳng AC tại Q. Chứng minh rằng đường thẳng đi qua M và vuông góc với PQ luôn đi qua một điểm cố định, khi M di động trên (d).

Bài 8 : Cho tam giác ABC có hai đường phân giác trong và ngoài góc A cắt cạnh BC tại D và E. Chứng minh rằng nếu AD = AE thì $AB^2+AC^2=4R^2$ (trong đó R là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC).

....

NGUYỄN VĂN TRUNG