Dùng đơn điệu để giải phương trình vô tỷ

Nguyễn Anh Huy – 10 CT THPT Lê Hồng Phong TP HCM

Trong những bài toán giải phương trình vô tỷ thì dùng đơn điệu của hàm số là một phương pháp mạnh và thường cho ta lời giải đẹp. Bài viết này sẽ giới thiệu một số ứng dụng của phương pháp trên. Khi trình bày mỗi bài toán, chúng tôi đều viết theo trình tự Ý tưởng - Lời giải – Kinh nghiệm, với mong muốn cho bạn đọc có một cái nhìn sâu hơn về cách tư duy và kinh nghiệm giải toán.

I) CÁC KIẾN THỨC CƠ BẢN:

- **Định lý 1**: Nếu hàm số y=f(x) luôn đồng biến (hoặc nghịch biến) và liên tục trên D thì số nghiệm trên D của phương trình $f(x) = k$ không nhiều hơn một và $\forall x, y \in D: f(x) = f(y) \Leftrightarrow x = y$.
- **Định lý 2**: Nếu hàm số f(x) và g(x) đơn điệu ngược chiều và liên tục trên D thì số nghiệm trên D của phương trình f(x)=g(x) không nhiều hơn một.
- **Định lý 3**: Nếu hàm số f(x) luôn đồng biến (hoặc luôn nghịch biến) trên D thì $f(x) > f(y) \Leftrightarrow x > y$ (hoặc $x < y$).

II) CÁC BÀI TOÁN VÍ DỤ:

Bài 1: Giải phương trình $\sqrt{3x+1} + \sqrt{x + \sqrt{7x+2}} = 4$ (1.1)

** *Ý tưởng*: VT toàn dấu cộng nên ta hi vọng đây là 1 hàm đồng biến theo x. Khi đó theo **định lý 1**, (1.1) có nghiệm duy nhất (dễ thấy đó là x=1).

** *Lời giải*:

Đặt VT (1.1) là f(x). Ta có $f'(x) = \frac{3}{2\sqrt{3x+1}} + \left(1 + \frac{7}{2\sqrt{7x+2}}\right).\frac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{7x+2}}} > 0 \ \forall x$

Vậy $f(x) = 4 = f(1) \Leftrightarrow x = 1$

Thử lại ta thấy $x = 1$ thoả (1.1). Vậy (1.1) có tập nghiệm $S = \{1\}$■

** <u>*Kinh nghiệm*</u>: Với những phương trình phức tạp việc dự đoán và chứng minh nghiệm duy nhất là rất quan trọng. Bằng đơn điệu ta đã có lời giải đẹp cho (1.1). Nhưng đây chỉ là 1 bài cơ bản.

Bài 2: Giải phương trình $x^3 - b = a\sqrt[3]{ax+b}$ (2.1) với $a > 0$ (x là ẩn)

** <u>*Ý tưởng*</u>:

VT có bậc 3 và bậc 0, VP có bậc $\frac{1}{3}$ làm ta nghĩ tới việc đưa 2 vế về hàm số có dạng $f(t) = mt^3 + nt$. Để ý một chút, ta thấy hạng tử x^3 của VT có bậc cao nhất nên tương ứng với mt^3 trong f(x), vậy $m = 1$. Tương tự, hạng tử $a\sqrt[3]{ax+b}$ ở VP có bậc thấp nhất nên tương ứng với nt trong f(x), vậy $n = a$. Từ đó có

$f(t) = t^3 + at$. Vậy ta cần đưa (2.1) về dạng

$$(x-u)^3 + a(x-u) = ax + b + a\sqrt[3]{ax+b} \qquad (2.2)$$

Tiếp tục phân tích, ta thấy VT không xuất hiện x^2 nên có ngay $u = 0$, vì nếu $u \neq 0$ ta không thể khử hạng tử $3ux^2$.

Nghĩa là (2.2) ⇔ $x^3 + ax = ax + b + a\sqrt[3]{ax+b}$. Dễ thấy chỉ cần cộng $ax + b$ vào 2 vế của (2.1) là ta có (2.2). Công việc đến đây trở nên đơn giản.

** <u>*Lời giải*</u>: (1.1) ⇔ $x^3 - b + ax + b = ax + b + a\sqrt[3]{ax+b}$

⇔ $f(x) = f(\sqrt[3]{ax+b})$ (*) với $f(t) = t^3 + at$.

Có $a > 0 \Rightarrow f(t)$ đồng biến trên R, nên (*) ⇔ $x = \sqrt[3]{ax+b}$ ⇔ $x^3 = ax + b$

Đây chính là phương trình bậc 3 dạng cơ bản. ■

** <u>*Kinh nghiệm:*</u> Bài toán trên cho ta một cách nhìn sơ lược về đơn điệu hàm số, trong đó phần quan trọng nhất là xây dựng hàm và dùng những đánh giá thích hợp để tìm ra hệ số. Chúng ta cũng có thể mở rộng hơn một chút:

Bài 2*) Giải phương trình $x^n - b = a\sqrt[n]{ax+b}$ với $n \in N$, <u>n lẻ</u> và $a > 0$.

Bài 3) Giải phương trình $8x^3 - 36x^2 + 53x - 25 = \sqrt[3]{3x-5}$ (3.1)

** *Ý tưởng*: Cũng như bài 1, do VT có bậc 3 còn VP có bậc $\frac{1}{3}$ nên ta cần đưa 2 vế về biểu thức dạng $f(t) = mt^3 + nt$. Để ý rằng hạng tử $\sqrt[3]{3x-5}$ ở VP có bậc thấp nhất nên tương ứng với nt trong f(t), vậy $n = 1$. Lưu ý rằng $8x^3 = 8(x^3) = (2x)^3$ nên ở đây ta phải xét 2 trường hợp, $m = 8$ hoặc $m = 1$.

- Nếu $m = 1$: $\Rightarrow f(t) = t^3 + t$. Do đó cần đưa (3.1) về dạng

$$(2x-u)^3 + (2x-u) = 3x - 5 + \sqrt[3]{3x-5}$$

$$\Leftrightarrow 8x^3 + x^2(-12u) + x(6u^2-1) - u^3 - u + 5 = \sqrt[3]{3x-5}$$

Đồng nhất hệ số với VT của (3.1) ta được

$$\begin{cases} -12u = -36 \\ 6u^2 - 1 = 53 \\ -u^3 - u + 5 = -25 \end{cases} \Leftrightarrow u = 3$$

Vậy trường hợp m=1 đã cho kết quả, do đó không cần xét m=8.

** *Lời giải*:

(3.1) $\Leftrightarrow 8x^3 - 36x^2 + 54x - 27 + 2x - 3 = 3x - 5 + \sqrt[3]{3x-5}$

$\Leftrightarrow (2x-3)^3 + 2x - 3 = 3x - 5 + \sqrt[3]{3x-5}$

$\Leftrightarrow f(2x-3) = f(\sqrt[3]{3x-5})$ (2.2) với $f(t) = t^3 + t$

Ta có f(t) đồng biến trên R do đó (3.2) $\Leftrightarrow 2x - 3 = \sqrt[3]{3x-5}$

$\Leftrightarrow (2x-3)^3 = 3x - 5 \Leftrightarrow 8x^3 - 36x^2 + 51x - 22 = 0 \Leftrightarrow x \in \left\{2; \frac{5\pm\sqrt{3}}{4}\right\}$ ■

** *Kinh nghiệm*: Đôi khi ta cần tinh ý trong việc xây dựng hàm, như trong bài trên hệ số bậc cao nhất có thể là 8 hoặc 1. Một ví dụ khác:

Bài 3*) Giải phương trình $4x^3 + 18x^2 + 27x + 14 = \sqrt[3]{4x+5}$

Lưu ý rằng $4x^3 = 4(x^3) = \frac{1}{2}(2x)^3$ do đó ta cũng cần xét 2 trường hợp.

Bài toán trên cũng có thể giải bằng cách đặt $\sqrt[3]{4x+5} = 2y + 3$ để đưa về hệ đối xứng loại 2.

Những bước phân tích trên nhìn tuy dài nhưng khi đã quen rồi thì ta có thể tính rất nhanh.Tuy nhiên, trong một số bài toán, hàm f(t) của ta không đồng biến trên R nhưng ta có thể chỉ cần xét đơn điệu trên miền xác định D.

Bài 4) Giải phương trình $9x^2 - 28x + 21 = \sqrt{x-1}$ (4.1)

** *Ý tưởng*: Ta xây dựng hàm $f(t) = mt^2 + nt$. Để ý rằng hạng tử $\sqrt{x-1}$ ở VP có bậc thấp nhất nên tương ứng với nt trong f(t), do đó $n = 1$. Như bài 2, ta cũng phải xét 2 trường hợp $m = 9$ hoặc $m = 1$.

- Nếu $m = 9$: $\Rightarrow f(t) = 9t^2 + t$. Cần đưa (3.1) về dạng

$9(x-u)^2 + x - u = 9(x-1) + \sqrt{x-1}$

$\Leftrightarrow 9x^2 + x(-18u - 8) + u^2 - u + 9 = \sqrt{x-1}$.

Đồng nhất hệ số ta được:

$\begin{cases} -18u - 8 = -28 \\ u^2 - u + 9 = 21 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = \frac{10}{9} \\ u \in \{4; -3\} \end{cases} \Rightarrow$ Loại

- Nếu $m = 1$: $\Rightarrow f(t) = t^2 + t$. Cần đưa (3.1) về dạng

$(3x-u)^2 + 3x - u = x - 1 + \sqrt{x-1}$

$\Leftrightarrow 9x^2 + x(-6u + 2) + u^2 - u + 1 = \sqrt{x-1}$. Đồng nhất hệ số ta được

$\begin{cases} -6u + 2 = -28 \\ u^2 - u + 1 = 21 \end{cases} \Leftrightarrow u = 5.$

Đến đây có lẽ bài toán đã được giải quyết, nhưng thật ra "chông gai" còn ở phía trước: (4.1) $\Leftrightarrow 9x^2 - 30x + 25 + 3x - 5 = x - 1 + \sqrt{x-1}$

$\Leftrightarrow f(3x-5) = f(\sqrt{x-1})$ (4.2) với $f(t) = t^2 + t$.

(!) Lưu ý rằng $f(t) = t^2 + t$ chỉ đồng biến trên $(-\frac{1}{2}; +\infty)$ và nghịch biến trên $\left(-\infty; -\frac{1}{2}\right)$, hơn nữa $\sqrt{x-1} \geq 0 > -\frac{1}{2}$.

Như vậy ta chỉ có (4.2) $\Leftrightarrow 3x - 5 = \sqrt{x-1}$ khi $3x - 5 \geq -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x \geq \frac{3}{2}$.

Còn $1 \leq x < \frac{3}{2}$ thì sao? Lại để ý rằng hàm số bậc 2 cũng có cái hay của nó, đó là $(-t)^2 = t^2$. Ở trên , dựa vào hệ số bậc cao nhất là 9, ta chỉ mới xét

$t = 3x - u$ nên bây giờ ta sẽ xét $t = u - 3x$:

Cần đưa (4.1) về dạng $(u - 3x)^2 + u - 3x = x - 1 + \sqrt{x-1}$

$\Leftrightarrow 9x^2 + x(-6u - 4) + u^2 + u + 1 = \sqrt{x-1}$. Đồng nhất hệ số:

$\begin{cases} -6u - 4 = -28 \\ u^2 + u + 1 = 21 \end{cases} \Leftrightarrow u = 4.$

Kiểm tra lại: Có $x < \frac{3}{2} \Leftrightarrow 4 - 3x > -\frac{1}{2}$ do đó chọn $u = 4$.

Đến đây bài toán mới thực sự được giải quyết.

** *<u>Lời giải</u>*: ĐKXĐ: $x \geq 1$

- Nếu $x \geq \frac{3}{2}$: $\Rightarrow 3x - 5 \geq -\frac{1}{2}$

Ta có (3.1) $\Leftrightarrow (3x-5)^2 + (3x-5) = (x-1) + \sqrt{x-1}$

$\Leftrightarrow f(3x-5) = f(\sqrt{x-1})$ với $f(t) = t^2 + t$

$\Leftrightarrow 3x - 5 = \sqrt{x-1}$ (do f(t) đồng biến trên $(-\frac{1}{2}; +\infty)$)

$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 5 \geq 0 \\ (3x-5)^2 = x - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{5}{3} \\ x \in \{2; \frac{13}{9}\} \end{cases} \Leftrightarrow x = 2$ (thỏa ĐKXĐ)

- Nếu $1 \leq x < \frac{3}{2}$: $\Rightarrow 4 - 3x > -\frac{1}{2}$ (*)

(4.1) $\Leftrightarrow (4-3x)^2 + 4 - 3x = x - 1 + \sqrt{x-1}$

$\Leftrightarrow f(4-3x) = f(\sqrt{x-1})$ với $f(t) = t^2 + t$

$\Leftrightarrow 4 - 3x = \sqrt{x-1}$ (do f(t) đồng biến trên $(-\frac{1}{2}; +\infty)$ và (*))

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4-3x \geq 0 \\ (4-3x)^2 = x-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq \dfrac{4}{3} \\ x \in \{\dfrac{25 \pm \sqrt{13}}{18}\} \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{25-\sqrt{13}}{18}$$

Vậy (3.1) có tập nghiệm $S = \{2; \frac{25-\sqrt{13}}{18}\}$ ■

** _Kinh nghiệm_: Cần linh hoạt trong việc xây dựng hàm số, nhất là đối với hàm bậc chẵn.

Ta cũng có thể giải bài toán trên bằng cách đặt $\sqrt{x-1} = 3y-5$ để đưa về hệ đối xứng loại 2.

Bài 4) $3x^3 - 6x^2 - 3x - 17 = 3\sqrt[3]{9(-3x^2+21x+5)}$ (4.1)

** _Ý tưởng_: Như những bài trước, đầu tiên ta thử đưa 2 vế về biểu thức dạng $f(t) = 3t^3 + 3t$. (4.1) trở thành:

$$3(x-u)^3 + 3(x-u) = 9(-3x^2+21x+5) + 3\sqrt[3]{9(-3x^2+21x+5)}$$

$\Leftrightarrow 3x^3 + x^2(-9u+27) + x(9u^2-186) + (-3u^3-3u-45) = 3\sqrt[3]{9(-3x^2+21x+5)}$

Đồng nhất hệ số với VT(4.1) ta được $\begin{cases} -9u+27 = -6 \\ 9u^2 - 186 = -3 \\ -3u^3 - 3u - 45 = -17 \end{cases}$.

Dễ thấy hệ này vô nghiệm. Vậy ta không thể xây dựng hàm như bình thường. Để ý rằng nguyên nhân dẫn đến việc này là vì hệ số của $9(-3x^2+21x+5)$ quá lớn, cản trở việc đồng nhất hệ số. Vậy ta hãy thử xây dựng hàm theo một hướng khác:

Nhân 9 cho 2 vế của (4.1) ta được

(4.1) $\Leftrightarrow 27x^3 - 54x^2 - 27x - 153 = 27\sqrt[3]{9(-3x^2+21x+5)}$ (4.2)

Bây giờ ta sẽ đưa 2 vế về biểu thức dạng $f(t) = t^3 + 27t$ (do biểu thức chứa căn có hệ số là 27, hạng tử bậc cao nhất là $27x^3 = (3x)^3$). (4.2) trở thành:

$$(3x-u)^3 + 27(3x-u) = 9(-3x^2+21x+5) + 27\sqrt[3]{9(-3x^2+21x+5)}$$

$$\Leftrightarrow 27x^3 + x^2(-27u + 27) + x(9u^2 - 108) - 27u - u^3 - 45 = 27\sqrt[3]{9(-3x^2 + 21x + 5)}$$

Đồng nhất hệ số ta được $\begin{cases} -27u + 27 = -54 \\ 9u^2 - 108 = -27 \\ -27u - u^3 - 45 = -153 \end{cases} \Leftrightarrow u = 3$

Bài toán được giải quyết.

** *<u>Lời giải</u>*: Nhân 9 vào 2 vế ta có phương trình:

$\Leftrightarrow (3x - 3)^3 + 27(3x - 3) = 9(-3x^2 + 21x + 5) + 27\sqrt[3]{9(-3x^2 + 21x + 5)}$

$\Leftrightarrow f(3x - 3) = f(\sqrt[3]{9(-3x^2 + 21x + 5)})$ với $f(t) = t^3 + 27t$

$\Leftrightarrow 3x - 3 = \sqrt[3]{9(-3x^2 + 21x + 5)} \Leftrightarrow (3x - 3)^3 = 9(-3x^2 + 21x + 5)$

$\Leftrightarrow 3(x - 1)^3 = 9(-3x^2 + 21x + 5) \Leftrightarrow 3x^3 - 6x^2 - 11x - 8 = 0$

Đây chính là phương trình bậc 3 dạng cơ bản. ■

** *<u>Kinh nghiệm</u>*: Có thể bạn sẽ thắc mắc tại sao lại nhân 9 mà không phải là số khác. Thật ra điều này đã được đề cập đến rồi. Khi xây dựng hàm

$f(t) = mt^3 + 3t$, ta thường nghĩ tới $3x^3 = 3(x^3)$ nên cho m=3 mà quên rằng còn có $3x^3 = \frac{1}{9}(3x)^3$ (trường hợp này thật ra hiếm gặp). Như vậy f(t) cũng có thể là $\frac{t^3}{9} + 3t$. Việc nhân 9 chỉ đơn giản là khử mẫu số.

Chúng ta đã làm quen với những bài phương trình **tổng**, hãy thử xem xét một số bài phương trình **tích**.

Bài 5) Giải phương trình $x^3 + 3x^2 + 4x + 2 = (3x + 2)\sqrt{3x + 1}$ (5.1)

** Ý tưởng: thoạt nhìn thì VT có bậc 3, VP có bậc $\frac{3}{2}$ nên khó có thể dùng đơn điệu. Nhưng nếu ở VP ta coi $y = \sqrt{3x + 1}$ là ẩn thì VP cũng là bậc 3 theo y. Cụ thể, cần phân tích $3x + 2 = m(3x + 1) + n$ (*), khi đó VP có dạng $my^3 + ny$. Dễ thấy từ (*) có ngay $m = n = 1$.

Công việc còn lại là đưa VT về dạng $(x-u)^3+x-u$ là ta có thể dùng đơn điệu. Đồng nhất hệ số ta được $u=-1$.

** Lời giải: ĐKXĐ: $x \geq -\frac{1}{3}$

(5.1) $\Leftrightarrow (x+1)^3+x+1=(3x+1+1)(\sqrt{3x+1})=\left(\sqrt{3x+1}\right)^3+\sqrt{3x+1}$

$\Leftrightarrow f(x+1)=f(\sqrt{3x+1})$ với $f(t)=t^3+t$

$\Leftrightarrow x+1=\sqrt{3x+1} \Leftrightarrow x \in \{0;1\}$ (thoả ĐKXĐ)

Vậy (4.1) có tập nghiệm $S=\{0;1\}$■

** Kinh nghiệm: Với những bài phương trình tích cần linh hoạt trong việc đổi biến và xây dựng hàm để có thể đưa về phương trình dạng chính tắc. Một số bài nhìn vào rất "khủng" đòi hỏi ta phải bình tĩnh phân tích. Hãy nhớ ta luôn cố gắng *phân tích biểu thức bậc lớn theo biểu thức bậc nhỏ*.

Bài 6) $3x(2+\sqrt{9x^2+3})+(4x+2)\left(\sqrt{1+x+x^2}+1\right)=0$ (6.1)

** Ý tưởng: Nhìn qua sự sắp xếp của bài toán, ta thấy VT là tổng 2 biểu thức dạng $f(t)=(mt+n)(p+\sqrt{at^2+bt+c})$. 1 cách tự nhiên, ta hi vọng biểu thức trên có thể cho ta ngay dạng chính tắc để dùng đơn điệu.

Đầu tiên đưa mỗi biểu thức về 1 vế:

(5.1) $\Leftrightarrow (4x+2)((\sqrt{1+x+x^2}+1)=-3x(2+\sqrt{9x^2+3})$ (6.2)

Ta không thể có $3x=m(9x^2+3)+nx+p$ vì biểu thức trong căn có bậc lớn hơn biểu thức ở ngoài. Như kinh nghiệm ở bài 5, ta sẽ làm ngược lại, nghĩa là *phân tích biểu thức bậc lớn theo biểu thức bậc nhỏ*.

Ta có VP (6.2)= $-3x\left(2+\sqrt{(-3x)^2+3}\right)$

Ta hi vọng VT (6.2) cũng có thể đưa về dạng $f(t)=t(2+\sqrt{t^2+3})$

Một cách tự nhiên, để xuất hiện số 2 trong f(t) ta biến đổi:

VT (6.2) = $(2x+1)(\sqrt{4x^2+4x+4}+2)$

Dễ thấy $4x^2 + 4x + 4 = (2x+1)^2 + 3$. Vậy ta đã xây dựng hàm thành công.

Tuy nhiên hàm số f(t) có $f'(t) = 2 + \frac{2t^3+3t}{\sqrt{t^4+3t^2}}$ nên có thể đổi chiều đơn điệu, do đó ta phải có thêm 1 nhận xét: (5.1) chỉ có nghiệm trong $[-\frac{1}{2}; 0]$. Đến đây bài toán thực sự được giải quyết.

** *Lời giải*: Nếu $x > 0$ hoặc $x < -\frac{1}{2}$ thì (6.1) vô nghiệm. Vậy ta xét $x \in [-\frac{1}{2}; 0]$

Ta có (6.1) ⇔ (6.2)

$\Leftrightarrow (2x+1)\left(2 + \sqrt{(2x+1)^2+3}\right) = (-3x)(2 + \sqrt{(-3x)^2+3})$

$\Leftrightarrow f(2x+1) = f(-3x)$ với $f(t) = t(2 + \sqrt{t^2+3}\,)$ (6.3)

Do $f'(t) = 2 + \frac{2t^3+3t}{\sqrt{t^4+3t^2}} > 0 \;\forall\, t \in (-\frac{1}{2}; 1)$ nên

(6.3) $\Leftrightarrow 2x + 1 = -3x \Leftrightarrow x = -\frac{1}{5}$ (chọn)

Vậy (6.1) có tập nghiệm $S = \left\{-\frac{1}{5}\right\}$ ■

** *Kinh nghiệm*: Đây là một bài toán hay và khó, đòi hỏi phải có kĩ năng biến đổi linh hoạt. Ta cũng có cách giải gần gũi hơn, không cần dùng đạo hàm như sau:

(6.1) $\Leftrightarrow (2x+1)\left(2 + \sqrt{(2x+1)^2+3}\right) = (-3x)(2 + \sqrt{(-3x)^2+3})$ (*)

- Nếu $x \in \left(-\frac{1}{2}; -\frac{1}{5}\right) \Rightarrow 3x < -2x - 1 < 0 \Rightarrow (3x)^2 > (2x+1)^2$

$\Rightarrow 2 + \sqrt{(3x)^2+3} > 2 + \sqrt{(2x+1)^2+3} \Rightarrow$ VT (*) < VP (*)

- Nếu $x \in [-\frac{1}{2}; -\frac{1}{5})$ làm tương tự ta cũng có PT trên vô nghiệm.
- Nếu $= -\frac{1}{5}$: Ta thấy thoả (5.1). Vậy (5.1) có $S = \{-\frac{1}{5}\}$■

III) BÀI TẬP TỰ LUYỆN:

1) $2x^3 - x^2 + \sqrt[3]{2x^3 - 3x + 1} = 3x + 1 + \sqrt[3]{x + 2}$

2) $\sqrt{5x^3 - 1} + \sqrt[3]{2x - 1} = 4 - x$

3) $(8x^2 + 2)x + (x - 6)\sqrt{5 - x} = 0$

4) $2^{x-1} - 2^{x^2 - x} = (x - 1)^2$

5) $\sqrt[3]{6x + 1} = 8x^3 - 4x - 1$

6) $8x^2 + 6x + 1 = \frac{|x| - |3x+1|}{|3x^2 + x|}$

7) $-2x^3 + 10x^2 - 17x + 8 = 2x^2\sqrt[3]{5x - x^3}$