

Định lý Con nhím và ứng dụng trong giải toán hình học phẳng

Trần Mạnh Sang

1. Mục tiêu

Sau bài này, học sinh cần nắm được

- Kiến thức: Biết định lý Con nhím và cách chứng minh định lý.
- Kĩ năng: Biết vận dụng định lý trong việc giải một số bài toán hình học phẳng, đặc biệt là chứng minh hai đường thẳng vuông góc.

2. Chuẩn bị của giáo viên và học sinh

- Giáo viên: Chuẩn bị giáo án, một số bài tập cho học sinh.
- Học sinh: Ôn lại định nghĩa và tính chất của vectơ, các phép toán: Cộng, trừ vectơ, nhân vectơ với một số, các quy tắc tìm tổng hai vectơ.

3. Dự kiến phương pháp giảng dạy

Vấn đáp, gợi mở, trực quan, thuyết trình.

4. Tiến trình dạy học.

Thực hiện bài học trong 4 tiết.

Tiết 1.

Có nhiều bài toán hình học phẳng mà nếu giải theo phương pháp hình học thuần túy thì sẽ rất khó khăn. Tuy nhiên, khi sử dụng công cụ vectơ thì việc giải quyết bài toán trở lên đơn giản. Một trong các định lý về vectơ có ứng dụng lớn là định lý Con nhím. Chúng ta cùng nghiên cứu định lý Con nhím và các ứng dụng của nó.

Trước hết chúng ta cùng nhắc lại một số kiến thức về vectơ:

Định nghĩa, phép cộng, trừ hai vectơ, nhân vectơ với một số, các quy tắc hình bình hành, quy tắc 3 điểm.

Ta đến với hai kết quả quan trọng sau:

1. Cho $\triangle ABC$ và điểm M thuộc cạnh BC.

Khi đó ta có:

$$\overrightarrow{AM} = \frac{MC}{BC} \cdot \overrightarrow{AB} + \frac{MB}{BC} \cdot \overrightarrow{AC}$$

Chứng minh

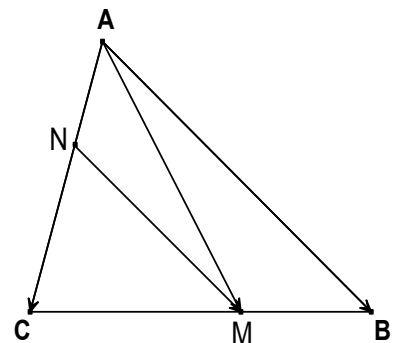
Kẻ MN song song với AB

Theo định lý Talet, ta có:

$$\begin{cases} \frac{AN}{AB} = \frac{MC}{BC} \\ \frac{MN}{AC} = \frac{MB}{BC} \end{cases} \text{ suy ra } \begin{cases} \overrightarrow{AN} = \frac{AN}{AB} \cdot \overrightarrow{AB} = \frac{MC}{BC} \cdot \overrightarrow{AB} \\ \overrightarrow{NM} = \frac{MN}{AC} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{MB}{BC} \cdot \overrightarrow{AC} \end{cases}$$

Ta có:

$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AN} + \overrightarrow{NM} = \frac{MC}{BC} \cdot \overrightarrow{AB} + \frac{MB}{BC} \cdot \overrightarrow{AC}$$



2. Cho $\triangle ABC$ với $BC = a, CA = b, AB = c$. Điểm I là tâm đường tròn nội tiếp của tam giác. Khi đó:

$$a\overrightarrow{IA} + b\overrightarrow{IB} + c\overrightarrow{IC} = \vec{0}.$$

Chứng minh

Kẻ phân giác AA', BB', CC' lần lượt của góc A, B, C .

Việc tính tổng của nhiều vectơ, chúng ta thường có bước tổng hợp từng cặp vectơ. Ta dựng hình bình hành $ANIM$ sao cho C' thuộc IN và B' thuộc IM .

Khi đó

$$\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{IN}$$

Áp dụng định lý Talet ta có

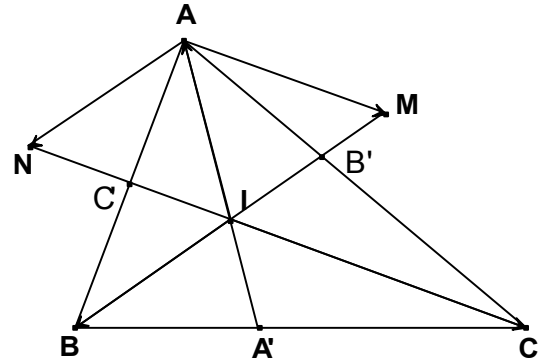
$$\begin{cases} \frac{AM}{IC} = \frac{AB'}{B'C} = \frac{AB}{CB} = \frac{c}{a} \\ \frac{AN}{IB} = \frac{AC'}{C'B} = \frac{AC}{CB} = \frac{b}{a} \end{cases}$$

Hay

$$\begin{cases} \overrightarrow{AM} = \frac{c}{a} \overrightarrow{IC} \\ \overrightarrow{AN} = \frac{b}{a} \overrightarrow{IB} \end{cases}$$

Suy ra

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AI} &= \frac{c}{a} \overrightarrow{IC} + \frac{b}{a} \overrightarrow{IB} \\ &\Leftrightarrow a\overrightarrow{IA} + b\overrightarrow{IB} + c\overrightarrow{IC} = \vec{0}. \end{aligned}$$



Chúng ta đến với bài toán sau:

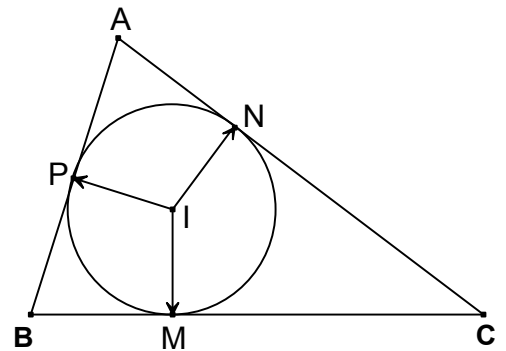
Bài toán: Đường tròn tâm I nội tiếp $\triangle ABC$, tiếp xúc với các cạnh BC, CA, AB lần lượt tại M, N, P . Chứng minh rằng: $a\overrightarrow{IM} + b\overrightarrow{IN} + c\overrightarrow{IP} = \vec{0}$.

Chứng minh

Ta có biến đổi:

$$\begin{aligned} &a\overrightarrow{IM} + b\overrightarrow{IN} + c\overrightarrow{IP} \\ &= a(\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AM}) + b(\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{BN}) + c(\overrightarrow{IC} + \overrightarrow{CP}) \\ &= (a\overrightarrow{IA} + b\overrightarrow{IB} + c\overrightarrow{IC}) + (a\overrightarrow{AM} + b\overrightarrow{BN} + c\overrightarrow{CP}) \\ &= a\overrightarrow{AM} + b\overrightarrow{BN} + c\overrightarrow{CP} \\ &= a\left(\frac{MC}{a}\overrightarrow{AB} + \frac{MB}{a}\overrightarrow{AC}\right) + b\left(\frac{AN}{b}\overrightarrow{BC} + \frac{CN}{b}\overrightarrow{BA}\right) \\ &\quad + c\left(\frac{AP}{c}\overrightarrow{CB} + \frac{BP}{c}\overrightarrow{CA}\right) \\ &= (MC - CN)\overrightarrow{AB} + (AN - AP)\overrightarrow{BC} + (BP - MB)\overrightarrow{CA} \\ &= \vec{0}. \end{aligned}$$

Ta có điều phải chứng minh.



Chúng ta cùng đến với kết quả chính của phần này

Định lý Con nhím:

Cho đa giác lồi $A_1A_2\dots A_n$ và $\vec{e}_i$ ($1 \leq i \leq n$) là vectơ đơn vị vuông góc với $\overrightarrow{A_iA_{i+1}}$ (xem $A_{n+1} \equiv A_1$) và hướng ra ngoài đa giác. Khi đó ta có đẳng thức:

$$A_1A_2\vec{e}_1 + A_2A_3\vec{e}_2 + \dots + A_nA_1\vec{e}_n = \vec{0}.$$

Ta chứng minh định lý bằng phương pháp quy nạp.

- Với $n=3$, ta xét định lý trong tam giác ABC. Định lý đúng do bài toán trên.
- Giả sử định lý đúng với $n=k$, ta xét với $n=k+1$.

Gọi $\vec{e}$ là vectơ đơn vị vuông góc với A_1A_k và hướng ra ngoài tam giác $A_1A_kA_{k+1}$.

Trong tam giác $A_1A_kA_{k+1}$, ta có:

$$A_1A_k\vec{e} + A_kA_{k+1}\vec{e}_k + A_{k+1}A_1\vec{e}_{k+1} = \vec{0}$$

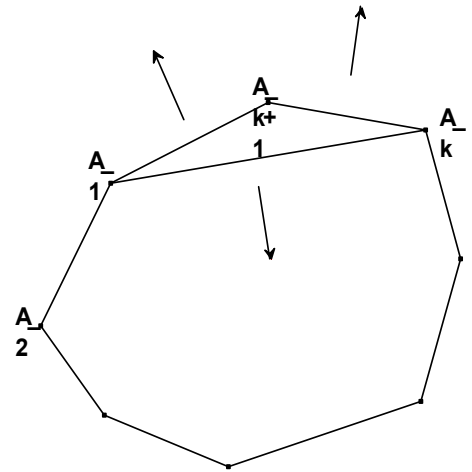
Theo giả thiết quy nạp, trong đa giác $A_1A_2\dots A_k$ ta có

$$A_1A_2\vec{e}_1 + A_2A_3\vec{e}_2 + \dots + A_{k-1}A_k\vec{e}_{k-1} + A_kA_1(-\vec{e}) = \vec{0}$$

Suy ra

$$A_1A_2\vec{e}_1 + A_2A_3\vec{e}_2 + \dots + A_kA_{k+1}\vec{e}_k + A_{k+1}A_1\vec{e}_{k+1} = \vec{0}$$

Vậy định lý được chứng minh.



Chúng ta đến với một số bài tập áp dụng.

Bài 1: Với J là một điểm bất kỳ trong $\square ABC$. Hạ JM, JN, JP vuông góc với BC, CA, AB. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{JM}\overrightarrow{JM} + \frac{b}{JN}\overrightarrow{JN} + \frac{c}{JP}\overrightarrow{JP} = \vec{0}.$$

Bài tập 1 là một bài tập đơn giản, nhận mạnh với chúng ta rằng, vectơ xét ở đây là vectơ đơn vị.

Từ hệ thức trên ta thấy, nếu các vectơ $\overrightarrow{IM}$, $\overrightarrow{IN}$, $\overrightarrow{IP}$ có cùng độ lớn thì ta có hệ thức:

$$a\overrightarrow{JM} + b\overrightarrow{JN} + c\overrightarrow{JP} = \vec{0}.$$

Bài 2: Cho $\square ABC$, I là tâm đường tròn bàng tiếp $\angle ACB$ của tam giác. Gọi M, N, P lần lượt là hình chiếu vuông góc của I trên các cạnh BC, AC, AB. Chứng minh rằng:

a. $a\overrightarrow{IM} + b\overrightarrow{IN} - c\overrightarrow{IP} = \vec{0}$

b. $a\overrightarrow{IA} + b\overrightarrow{IB} - c\overrightarrow{IC} = \vec{0}$

Chứng minh.

Bài tập 2 nhấn mạnh cho chúng ta một điều: Vectơ đơn vị có hướng ra ngoài đa giác.

a. Xét $\triangle ABC$, có

$$\begin{cases} IP \perp AB \\ IN \perp AC \\ IM \perp BC \\ IP = IN = IM \end{cases}$$

Và có $\overrightarrow{IP}$ hướng vào trong tam giác, ta phải chọn $-\overrightarrow{IP}$. Áp dụng định lý con nhím cho $\triangle ABC$, ta có:

$$a\overrightarrow{IM} + b\overrightarrow{IN} - c\overrightarrow{IP} = \vec{0}$$

$$b. a\overrightarrow{IA} + b\overrightarrow{IB} - c\overrightarrow{IC} = \vec{0}$$

Ta có:

$$\begin{aligned} a\overrightarrow{IA} + b\overrightarrow{IB} - c\overrightarrow{IC} &= a(\overrightarrow{IM} + \overrightarrow{MA}) + b(\overrightarrow{IN} + \overrightarrow{NB}) - c(\overrightarrow{IP} + \overrightarrow{PC}) \\ &= a\overrightarrow{MA} + b\overrightarrow{NB} - c\overrightarrow{PC} \end{aligned}$$

Ta có:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} &= \frac{BM}{CM} \overrightarrow{AC} + \frac{CB}{CM} \overrightarrow{AM} \\ \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} &= \frac{BM}{CB} \overrightarrow{AC} + \frac{CM}{CB} \overrightarrow{AB} = \frac{BM}{a} \overrightarrow{AC} + \frac{CM}{a} \overrightarrow{AB} \end{aligned}$$

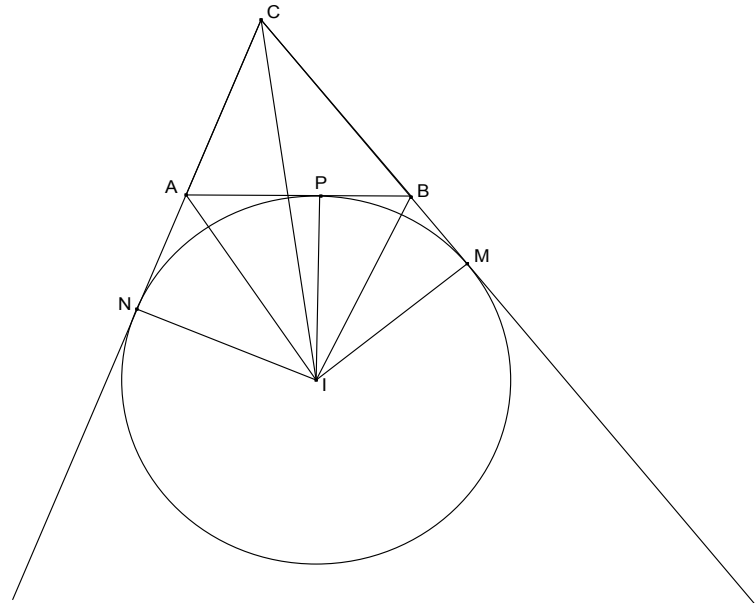
Tương tự ta có:

$$\overrightarrow{BN} = \frac{AN}{b} \overrightarrow{BC} + \frac{CN}{b} \overrightarrow{BA}$$

Vậy

$$\begin{aligned} a\overrightarrow{MA} + b\overrightarrow{NB} - c\overrightarrow{PC} &= -(BM \cdot \overrightarrow{AC} + CM \cdot \overrightarrow{AB}) - (AN \cdot \overrightarrow{BC} + CN \cdot \overrightarrow{BA}) - (AP \cdot \overrightarrow{CB} + BP \cdot \overrightarrow{CA}) \\ &= \vec{0}. \end{aligned}$$

Chúng ta kết thúc bài toán.



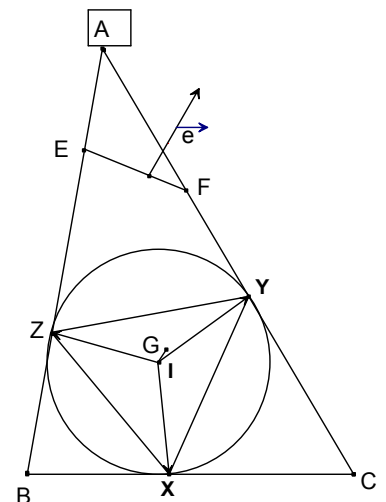
Tiết 2.

Bài 3: Cho $\triangle ABC$ không đều, BC là cạnh nhỏ nhất. Đường tròn nội tiếp tâm I của tam giác tiếp xúc với các cạnh BC, CA, AB lần lượt tại X, Y, Z. G là trọng tâm của $\triangle XYZ$. Trên các tia BA, CA lấy các điểm E, F sao cho: $BE = CF = BC$. Chứng minh rằng:

$IG \perp EF$.

Chứng minh

Với những bài toán sử dụng vectơ để chứng minh hai đường thẳng vuông góc với nhau, ta thường chứng minh một vectơ có giá là một trong hai đường cùng phương với một vectơ vuông góc với đường còn lại.



Gọi $\vec{e}$ là vectơ vuông góc với EF, có độ dài bằng IX và hướng ra phía ngoài tứ giác BCFE

Áp dụng định lý con nhím cho tứ giác BCFE, ta có

$$BC.\overrightarrow{IX} + FC.\overrightarrow{IY} + EB.\overrightarrow{IZ} + EF.\vec{e} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow BC(\overrightarrow{IX} + \overrightarrow{IY} + \overrightarrow{IZ}) + EF.\vec{e} = \vec{0}.$$

$$\Leftrightarrow 3.BC.\overrightarrow{IG} + EF.\vec{e} = \vec{0}$$

Hay $\overrightarrow{IG}$ cùng phương với $\vec{e}$

Suy ra $IG \perp EF$.

Nhận thấy, với phương pháp vectơ, chúng ta không cần thiết phải xác định điểm G trên hình vẽ mà vẫn giải quyết được bài toán.

Chúng ta đến với một số bài tập tương tự.

Bài 4: Cho $\square ABC$ có góc A nhọn. Vẽ bên ngoài các tam giác vuông cân đỉnh A là ABD và ACE. Gọi M là trung điểm của BC. Chứng minh rằng $AM \perp DE$.

Chứng minh

Xét trong tam giác EAD, ta có:

$$\begin{cases} AB \perp AD \\ AC \perp AE \end{cases}$$

Gọi $\vec{e}$ là vectơ đơn vị vuông góc với ED và hướng ra phía ngoài tam giác EAD.

Áp dụng định lý con nhím trong $\square EAD$ ta có:

$$\frac{AD}{AB} \overrightarrow{AB} + \frac{AE}{AC} \overrightarrow{AC} + ED.\vec{e} = \vec{0}$$

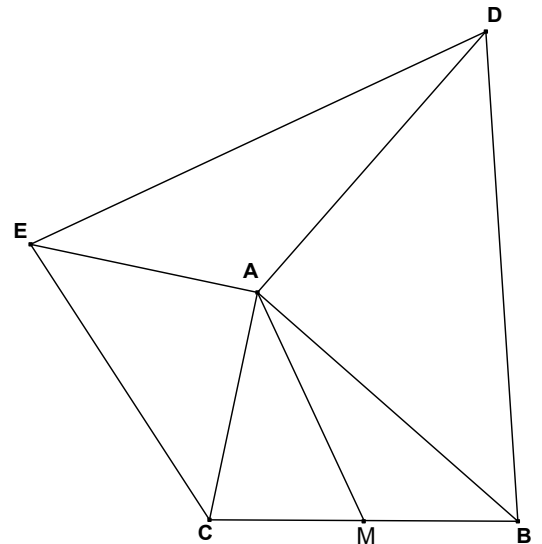
Do ta có hai tam giác ABD và ACE cân tại A nên $AE = AC$ và $AD = AB$

Vậy ta có:

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + ED.\vec{e} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow 2\overrightarrow{AM} + ED.\vec{e} = \vec{0}$$

Hay $\overrightarrow{AM}$ cùng phương với $\vec{e}$, suy ra $AM \perp DE$.



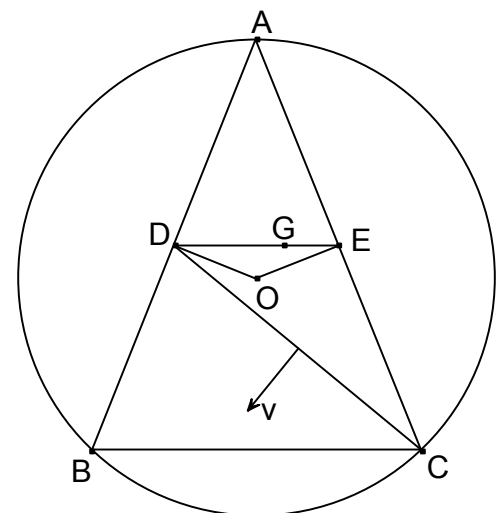
Bài 5: Cho $\square ABC$ cân tại A, nội tiếp trong đường tròn tâm O. D là trung điểm của AB và G là trọng tâm $\square ACD$. Chứng minh rằng: $OG \perp CD$.

Chứng minh

Gọi E là trung điểm của đoạn AC

$$\text{Nhận thấy, trong } \square ADC, \text{ có } \begin{cases} OD \perp AB \\ OE \perp AC \\ OD = OE \end{cases}$$

Vậy ta có thể áp dụng định lý con nhím cho $\square ABC$



Gọi vectơ $\vec{v}$ vuông góc với DC, có hướng ra phía ngoài miền tam giác ADC và có độ lớn bằng OD.

Áp dụng định lý con nhím cho $\square ABC$, ta có:

$$\begin{aligned} AD \cdot \overrightarrow{OD} + AC \cdot \overrightarrow{OE} + DC \cdot \vec{v} &= \vec{0} \\ \Leftrightarrow \frac{1}{2} AC \cdot \overrightarrow{OD} + AC \cdot \overrightarrow{OE} + DC \cdot \vec{v} &= \vec{0} \\ \Leftrightarrow \frac{1}{2} AC \cdot \overrightarrow{OD} + \frac{1}{2} AC (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}) + DC \cdot \vec{v} &= \vec{0} \\ \Leftrightarrow \frac{1}{2} AC (\overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}) + DC \cdot \vec{v} &= \vec{0} \\ \Leftrightarrow \frac{3}{2} AC \cdot \overrightarrow{OG} + DC \cdot \vec{v} &= \vec{0} \end{aligned}$$

Suy ra $\overrightarrow{OG}$ cùng phương với $\vec{v}$, hay $OG \perp CD$.

Ta nhận thấy, muốn ứng dụng phương pháp vectơ vào việc chứng minh 2 đường thẳng vuông góc thì chúng ta phải gắn được một đường vào cạnh của một đa giác.

Ta đến với bài toán tiếp theo.

Bài 6: Cho hình chữ nhật ABCD. K là hình chiếu vuông góc của B trên AC. M, N lần lượt là trung điểm của AK và CD. Chứng minh rằng: $BM \perp MN$.

Chứng minh

Bài toán đưa ra yêu cầu chứng minh

$BM \perp MN$. Ta xem xét để tìm ra được một đa giác chứa một trong hai đường và chứng ta có thể áp dụng định lý con nhím cho đa giác đó.

Nhận thấy, $BK \perp MC$ và $BC \perp NC$, vậy ta có thể áp dụng định lý con nhím cho $\square MNC$.

Gọi $\vec{e}$ là vectơ đơn vị vuông góc với MN và có hướng ra phía ngoài của $\square MNC$.

Áp dụng định lý con nhím cho tam giác MNC, ta có

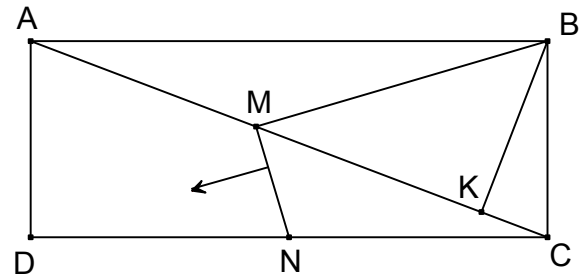
$$-\frac{MC}{BK} \overrightarrow{BK} + \frac{NC}{BC} \overrightarrow{BC} + MN \cdot \vec{e} = \vec{0} \quad (1)$$

Ta phải tính $-\frac{MC}{BK} \overrightarrow{BK} + \frac{NC}{BC} \overrightarrow{BC}$ theo $\overrightarrow{MB}$.

$$\text{Nhận thấy} \quad \overrightarrow{BK} = \frac{KC}{MC} \overrightarrow{BM} + \frac{KM}{MC} \overrightarrow{BC}$$

Kết hợp với (1), ta có

$$\begin{aligned} -\frac{MC}{BK} \left(\frac{KC}{MC} \overrightarrow{BM} + \frac{KM}{MC} \overrightarrow{BC} \right) + \frac{NC}{BC} \overrightarrow{BC} + MN \cdot \vec{e} &= \vec{0} \\ \Leftrightarrow -\frac{MC}{BK} \frac{KC}{MC} \overrightarrow{BM} - \frac{MC}{BK} \frac{KM}{MC} \overrightarrow{BC} + \frac{NC}{BC} \overrightarrow{BC} + MN \cdot \vec{e} &= \vec{0} \\ \Leftrightarrow -\frac{KC}{BK} \overrightarrow{BM} - \frac{KM}{BK} \overrightarrow{BC} + \frac{NC}{BC} \overrightarrow{BC} + MN \cdot \vec{e} &= \vec{0} \end{aligned}$$



Ta có: $\cot \angle BAC = \frac{AK}{BK} = \frac{2MK}{BK} = \frac{AB}{BC} = \frac{2NC}{BC}$

Hay

$$\frac{MK}{BK} = \frac{NC}{BC}$$

Vậy ta có

$$-\frac{KC}{BK} \overrightarrow{BM} + MN \cdot \vec{e} = \vec{0}$$

Suy ra $\overrightarrow{BM}$ cùng phương với $\vec{e}$, hay $BM \perp MN$.

Tiết 3.

Bài 7: Cho hình vuông ABCD. Các điểm M, N thuộc các cạnh BA, BC sao cho $BM=BN$. H là hình chiếu vuông góc của B trên CM. Chứng minh rằng $DH \perp HN$

Bài 8: Cho $\triangle ABC$ cân tại A. H là trung điểm BC,

D là hình chiếu của H trên AC,

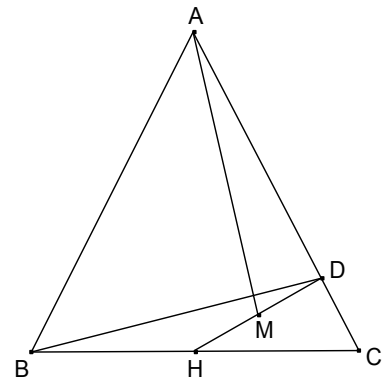
M là trung điểm của HD.

Chứng minh rằng: $AM \perp BD$.

Ta xét trong $\triangle BHD$, có

$$\begin{cases} AH \perp BH \\ AD \perp HD \end{cases}$$

$\vec{e}$ là vectơ đơn vị vuông góc với BD, hướng ra ngoài.



Bài 9: Cho hình thang vuông ABCD, đường cao $AD = h$, cạnh đáy

$AB = a, CD = b$ ($a < b$). Tìm mối liên hệ giữa a, b, h sao cho:

a. $AC \perp BD$

b. $BD \perp AM$, trong đó M là trung điểm của BC.

c. $BD \perp CI$ với I là trung điểm AD

d. $AC \perp BI$

Giải

a. Xét trong $\triangle ADC$.

Có

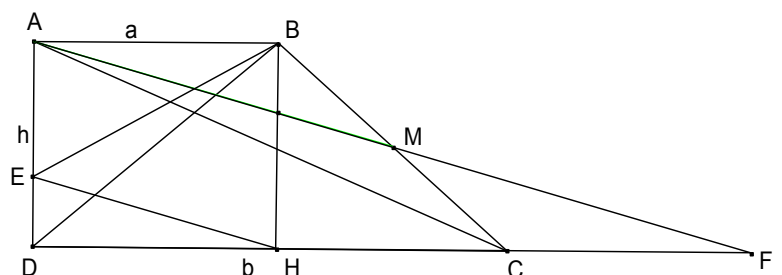
$$\begin{cases} AB \perp AD \\ BD \perp AC \\ BH \perp DH \end{cases}$$

Theo định lý Con nhím, có

$$\frac{AD}{BA} \overrightarrow{BA} - \frac{AC}{BD} \overrightarrow{BD} + \frac{DC}{BH} \overrightarrow{BH} = \vec{0}$$

Ta có nhận xét: $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BH}$

Suy ra:



$$\frac{AD}{BA} = \frac{AC}{BD} = \frac{DC}{BH}$$

Hay

$$\frac{h}{a} = \frac{\sqrt{h^2 + b^2}}{\sqrt{h^2 + a^2}} = \frac{b}{h}$$

$$\Leftrightarrow h^2 = ab$$

Bài toán này cho ta điều kiện để hai đường chéo của hình thang vuông vuông góc với nhau, đó là : Bình phương đường cao bằng tích của hai đáy.

b. $BD \perp AM$

Câu b, chúng ta áp dụng câu a để giải toán. Tuy nhiên ta phải tìm được một hình thang vuông có hai đường chéo lần lượt song song hoặc trùng với hai đường thẳng BD và AM. Kẻ HE song song với AM và cắt BD tại E. Khi đó, tứ giác DEBH là hình thang vuông có hai đường chéo là BD và HE.

Ta có

$$BD \perp AM \Leftrightarrow BD \perp HE$$

Theo câu a, ta có: $DH^2 = DE.HB$

$$\Leftrightarrow a^2 = DE.h$$

$$\Leftrightarrow h = \frac{a^2}{DE} = a \cdot \frac{a}{DE} = a \cdot \cot \angle EHD$$

Kẻ AM cắt DC tại F, dễ thấy ABFC là hình bình hành nên $CF = a$.

$$\text{Suy ra } \cot \angle EHD = \cot \angle AFD = \frac{a+b}{h}$$

$$\text{Vì thế } h = a \frac{a+b}{h} \Leftrightarrow h^2 = a(a+b)$$

Câu c và d chúng ta làm tương tự.

Bài toán đã được giải quyết.

Bài 10: Cho $\square ABC$ vuông tại A có $AB = c$, $AC = b$. Tìm điểm $D \in AC$ sao cho $BD \perp AM$ với AM là trung tuyến của $\square ABC$

Giải.

Ta dựng một tam giác có một cạnh là một trong hai đường, sau đó áp dụng định lý Con nhím cho tam giác đó.

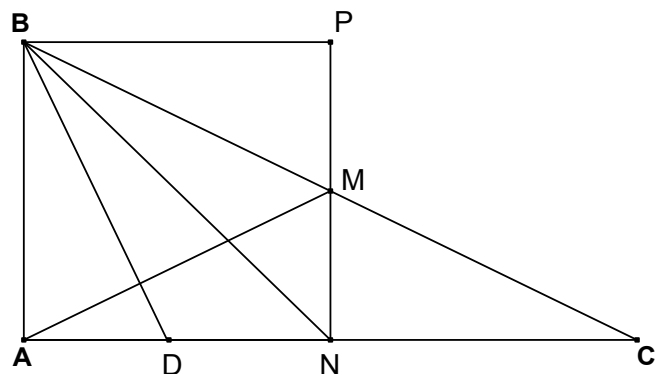
Dựng tam giác AMN, với N là hình chiếu của M trên AC. Kẻ $BP \perp MN$.

$$\text{Trong } \square AMN \text{ có } \begin{cases} BP \perp MN \\ BD \perp AM \\ BA \perp AN \end{cases}$$

Áp dụng định lý Con nhím trong $\square AMN$ ta có:

$$\frac{MN}{BP} \overrightarrow{BP} + \frac{AN}{BA} \overrightarrow{BA} - \frac{AM}{BD} \overrightarrow{BD} = \vec{0} \quad (1)$$

Bên cạnh đó, nếu D nằm giữa A và N thì:



$$\overrightarrow{BD} = \frac{DN}{AN} \overrightarrow{BN} + \frac{AD}{AN} \overrightarrow{BA}$$

Nên từ (1) ta có

$$\begin{aligned} \frac{MN}{BP} \overrightarrow{BP} + \frac{AN}{BA} \overrightarrow{BA} - \frac{AM}{BD} \frac{DN}{AN} \overrightarrow{BN} - \frac{AM}{BD} \frac{AD}{AN} \overrightarrow{BA} &= \vec{0} \\ \Leftrightarrow \frac{MN}{BP} \overrightarrow{BP} + \left(\frac{AN}{BA} - \frac{AM}{BD} \frac{AD}{AN} \right) \overrightarrow{BA} - \frac{AM}{BD} \frac{DN}{AN} \overrightarrow{BN} &= \vec{0} \\ \Leftrightarrow \frac{c}{b} \overrightarrow{BP} + \left(\frac{b}{2c} - \frac{a}{2BD} \frac{2AD}{b} \right) \overrightarrow{BA} - \frac{a}{2BD} \frac{2DN}{b} \overrightarrow{BN} &= \vec{0} \end{aligned}$$

Do ta có: $\overrightarrow{BN} = \overrightarrow{BP} + \overrightarrow{BA}$ nên ta suy ra

$$\frac{c}{b} = \left(\frac{b}{2c} - \frac{a}{2BD} \frac{2AD}{b} \right) = \frac{a}{2BD} \frac{2DN}{b}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} BD = \frac{a}{c} DN \\ BD = \frac{2ac}{b^2 - 2c^2} AD \end{cases}$$

$$\Rightarrow DN = \frac{2c^2}{b^2 - 2c^2} AD$$

Trường hợp nếu $b^2 - 2c^2 < 0$ thì N nằm ngoài A và B, ta là tương tự.
Bài toán được giải quyết.

Bài 11: Cho $\square ABC$ vuông tại A, gọi M là trung điểm của BC. Lấy các điểm B_1, C_1 trên AB, AC sao cho $AB \cdot AB_1 = AC \cdot AC_1$. Chứng minh rằng: $AM \perp B_1C_1$

Chứng minh

Ta dựng một tam giác có một cạnh là một trong hai đường trên.

Xét tam giác B_1AC_1 , có

$$\begin{cases} AC_1 \perp MN_2 \\ AB_1 \perp MN_1 \end{cases}$$

Ở đây N_1, N_2 lần lượt là trung điểm của AB, AC.

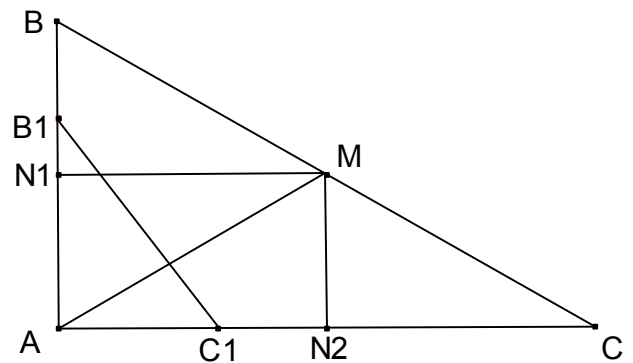
Gọi $\vec{e}$ là vectơ đơn vị vuông góc với B_1C_1 và hướng ra phía ngoài tam giác B_1AC_1 .

Áp dụng định lý Cosin cho tam giác B_1AC_1 ta có:

$$\frac{AB_1}{MN_1} \overrightarrow{MN_1} + \frac{AC_1}{MN_2} \overrightarrow{MN_2} + B_1C_1 \vec{e} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2AB_1}{AC} \overrightarrow{MN_1} + \frac{2AC_1}{AB} \overrightarrow{MN_2} + B_1C_1 \vec{e} = \vec{0}$$

Do đề bài có: $AB \cdot AB_1 = AC \cdot AC_1$ nên ta có



$$\frac{2AB_1}{AC}(\overrightarrow{MN_1} + \overrightarrow{MN_2}) + B_1C_1\vec{e} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2AB_1}{AC}\overrightarrow{MA} + B_1C_1\vec{e} = \vec{0}$$

Suy ra $\overrightarrow{MA}$ cùng phương với $\vec{e}$, hay $AM \perp B_1C_1$.

Tiết 4.

Bài 12: Cho I là tâm đường tròn nội tiếp tứ giác ABCD. Gọi E, F là trung điểm của AC, BD. Chứng minh rằng: I, E, F thẳng hàng.

Chứng minh

Ta có kí hiệu như hình vẽ.

Ta có nhận xét sau:

$$\begin{cases} \overrightarrow{IM} = \frac{z}{t+z}\overrightarrow{IB} + \frac{t}{t+z}\overrightarrow{IC} \\ \overrightarrow{IN} = \frac{z}{y+z}\overrightarrow{ID} + \frac{y}{y+z}\overrightarrow{IC} \\ \overrightarrow{IP} = \frac{y}{x+y}\overrightarrow{IA} + \frac{x}{x+y}\overrightarrow{ID} \\ \overrightarrow{IQ} = \frac{x}{x+t}\overrightarrow{IB} + \frac{t}{x+t}\overrightarrow{IA} \end{cases}$$

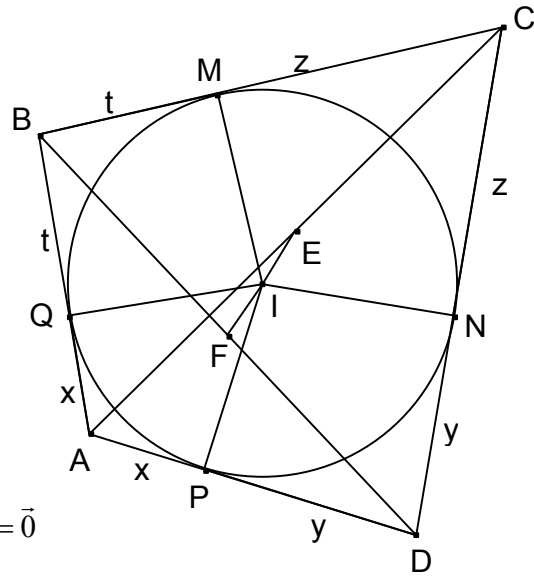
Áp dụng định lý Con nhím cho tứ giác ABCD, ta có:

$$(t+z)\overrightarrow{IM} + (z+y)\overrightarrow{IN} + (y+x)\overrightarrow{IP} + (x+t)\overrightarrow{IQ} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow (y+t)(\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IC}) + (x+z)(\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{ID}) = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow 2(y+t)\overrightarrow{IE} + 2(x+z)\overrightarrow{IF} = \vec{0}$$

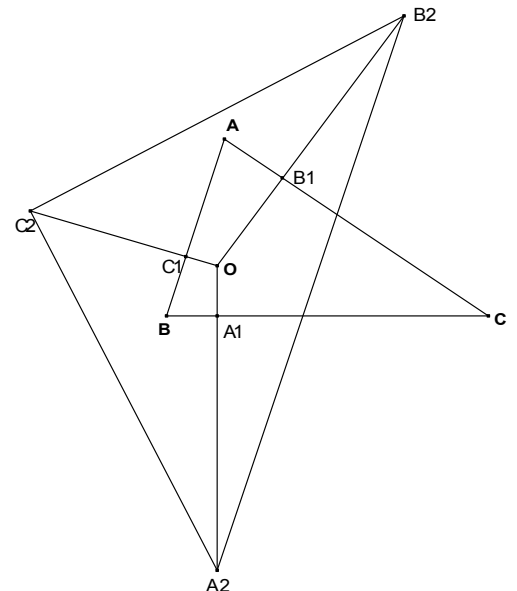
Suy ra $\overrightarrow{IE}$ cùng phương với $\overrightarrow{IF}$ hay I, E, F thẳng hàng.



Bài 13: Cho $\triangle ABC$, điểm O ở trong miền tam giác. Các điểm A_1, B_1, C_1 lần lượt là hình chiếu vuông góc của O trên BC, CA, AB . Lấy các điểm A_2, B_2, C_2 lần lượt thuộc các tia OA_1, OB_1, OC_1 sao cho $OA_2 = a, OB_2 = b, OC_2 = c$. Chứng minh rằng: O là trọng tâm của tam giác $A_2B_2C_2$.

Chứng minh

Theo hình học thuần túy, để chứng minh O là trọng tâm của tam giác $A_2B_2C_2$ là không đơn giản. Chúng ta cùng đến với phương pháp vectơ để giải bài toán trên.



Muốn chứng minh O là trọng tâm của tam giác $A_2B_2C_2$, ta cần chứng minh

$$\overrightarrow{OA_2} + \overrightarrow{OB_2} + \overrightarrow{OC_2} = \vec{0}.$$

Thật vậy, ta có

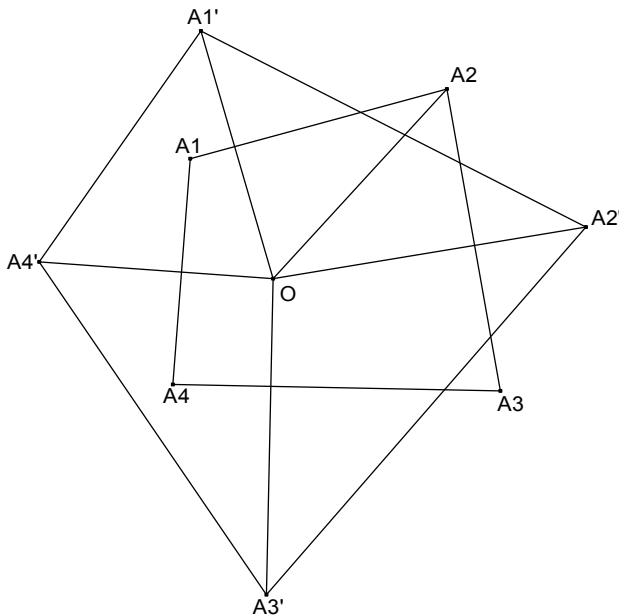
$$\begin{aligned} & \overrightarrow{OA_2} + \overrightarrow{OB_2} + \overrightarrow{OC_2} \\ &= \frac{OA_2}{OA_1} \overrightarrow{OA_1} + \frac{OB_2}{OB_1} \overrightarrow{OB_1} + \frac{OC_2}{OC_1} \overrightarrow{OC_1} \\ &= a. \frac{\overrightarrow{OA_1}}{OA_1} + b. \frac{\overrightarrow{OB_1}}{OB_1} + c. \frac{\overrightarrow{OC_1}}{OC_1} \\ &= \vec{0} \end{aligned}$$

(do định lý Con nhím trong $\square ABC$).

Vậy O là trọng tâm của tam giác $A_2B_2C_2$.

Bài toán có thể được mở rộng đối với một đa giác lồi bất kỳ.

Cho đa giác lồi $A_1A_2...A_n$, điểm O ở trong miền đa giác. Các điểm $A_1', A_2', ..., A_n'$ lần lượt là hình chiếu vuông góc của O trên $A_1A_2, A_2A_3, ..., A_nA_1$. Lấy các điểm $A_1'', A_2'', ..., A_n''$ lần lượt thuộc các tia $OA_1', OA_2', ..., OA_n'$ sao cho $OA_1'' = A_1A_2, OA_2'' = A_2A_3, ..., OA_n'' = A_nA_1$. Khi đó ta có O là trọng tâm của đa giác $A_1A_2...A_n$.



Bài 14: Tìm tất cả những điểm N trong $\square ABC$ thỏa mãn: $\overrightarrow{NA_1} + \overrightarrow{NB_1} + \overrightarrow{NC_1} = \vec{0}$, trong đó A_1, B_1, C_1 lần lượt là chân đường vuông góc hạ từ N xuống BC, CA, AB.

Chứng minh

Nhận thấy, các vecto $\overrightarrow{NA_1}, \overrightarrow{NB_1}, \overrightarrow{NC_1}$ lần lượt vuông góc với 3 cạnh của tam giác, vì thế ta có thể áp dụng định lý Con nhím trong $\square ABC$.

Gọi $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ lần lượt là các vecto đơn vị vuông góc với các cạnh BC, CA, AB và hướng ra phía ngoài $\square ABC$. Áp dụng định lý Con nhím cho $\square ABC$, ta có

$$a\vec{e}_1 + b\vec{e}_2 + c\vec{e}_3 = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \frac{a}{NA_1} \overrightarrow{NA_1} + \frac{b}{NB_1} \overrightarrow{NB_1} + \frac{c}{NC_1} \overrightarrow{NC_1} = \vec{0}$$

(Trực chuẩn hóa các vecto)

Do N thỏa mãn $\overrightarrow{NA_1} + \overrightarrow{NB_1} + \overrightarrow{NC_1} = \vec{0}$ nên ta có:

$$\frac{a}{NA_1} = \frac{b}{NB_1} = \frac{c}{NC_1}$$

Lấy N_1 đối xứng với N qua đường phân giác góc A, khi đó ta có

Khoảng cách từ N_1 đến AC bằng NC_1 ,

Khoảng cách từ N_1 đến AB bằng NB_1 .

Suy ra

$$S_{\square AN_1B} = S_{\square AN_1C}$$

Gọi A' là giao của đường phân giác góc A với BC.

Từ

$$S_{\square AN_1B} = S_{\square AN_1C}$$

$$\Rightarrow c \cdot NA_1 \cdot \sin \angle BAN_1 = b \cdot NA_1 \cdot \sin \angle CAN_1$$

$$\Leftrightarrow c \cdot \sin \angle BAN_1 = b \cdot \sin \angle CAN_1$$

$$\Leftrightarrow c \cdot AA' \cdot \sin \angle BAA' = b \cdot AA' \cdot \sin \angle CAA'$$

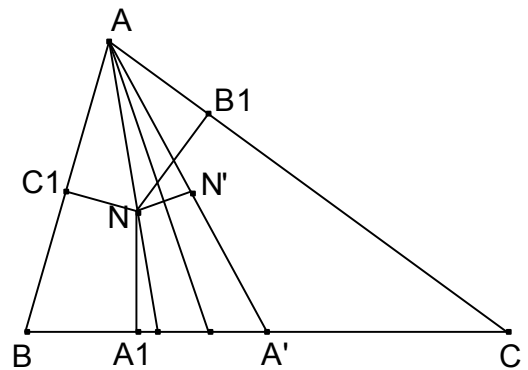
$$\Leftrightarrow S_{\square BAA'} = S_{\square CAA'}$$

Suy ra A' là trung điểm của BC.

Hay AA' là đường trung tuyến của $\square ABC$, vậy N thuộc đường thẳng đối xứng với AA' qua đường phân giác góc A.

Tương tự ta sẽ có: N là giao của 3 đường đối xứng với 3 đường trung tuyến lần lượt qua 3 đường phân giác của mỗi góc.

Bài toán được giải quyết.



5. Kết luận bài học

Qua bài học này, các em cần nắm được định lý Con nhím, cách chứng minh và vận dụng trong giải một số bài hình học phẳng.

Hầu hết các tính chất ta có trong hình học phẳng đều có thể mở rộng sang hình học không gian. Các em sẽ được biết Định lý Con nhím mở rộng trong không gian khi học về vecto trong không gian ở phần hình học 12.