TRƯỜNG THPT CHUYÊN TIỀN GIANG
TỔ HÀNH CHÁNH

SÁNG KIẾN KINH NGHIỆM

ĐỀ TÀI:

ÁP DỤNG TÍNH LIÊN TỤC CỦA HÀM SỐ, ĐỊNH LÍ LAGRANGE, ĐỊNH LÍ ROLLE ĐỂ GIẢI TOÁN

Người thực hiện: NGUYỄN VŨ THANH

Năm học 2008-2009

MỤC LỤC

I. PHẦN MỞ ĐẦU

1. Lý do chọn đề tài:

Từ khi tham dự các hội nghị Chuyên đề Bồi dưỡng học sinh giỏi THPT do trường Đại học Khoa học tự nhiên Hà nội tổ chức hàng năm từ 2002 đến nay,được học tập các chuyên đề do các giảng viên , các chuyên gia Toán của Bộ trình bày và được sự động viên của thầy Trương Thành Phú chuyên viên môn Toán của Sở Giáo dục và đào tạo Tiền Giang chúng tôi có một tâm huyết là sẽ cố gắng thực hiện hoàn chỉnh , cụ thể hoá các chuyên đề phù hợp với trình độ học sinh tỉnh nhà để đóng góp vào thành tích chung của Tỉnh trong các kỳ thi HSG cấp khu vực và cấp quốc gia.

Trong những năm gần đây bộ môn Toán của tỉnh Tiền Giang đã có những tiến bộ và đạt được một số thành tích đáng kể trong các kỳ thi HSG khu vực. Nhưng gần đây Bộ đã thay đổi mạnh về quy chế thi HSG cấp Quốc gia đó là không còn phân chia hai bảng A,B như trước mà chỉ có một bảng thống nhất chung toàn quốc. Đề thi khó hơn và số lượng giải ít hơn gây khó khăn cho cả Giáo viên và học sinh môn Toán tỉnh nhà.

Trong điều kiện khó khăn đó việc tìm tài liệu và viết các chuyên đề này là việc cần thiết trong tình hình hiện nay.Được sự ủng hộ của các thầy cô trong tổ Toán Tin trường THPT Chuyên Tiền Giang chúng tôi thực hiện viết chuyên đề :” *Áp dụng tính liên tục của hàm số, định lí Lagrange, định lí Rolle để giải toán”*.

2. Mục tiêu nghiên cứu:

Nhằm hệ thống và phân loại kiến thức các bài tập có sử dụng tính liên tục và các định lí Lagrange , định lí Rolle đồng thời đưa ra nhận xét cách giải .Giúp cho học sinh có hệ thống kiến thức và biết vận dụng vào việc giải các bài toán giải tích , đại số đồng thời định hướng suy nghĩ tư duy toán học và khả năng vận dụng sáng tạo trong các bài toán mới.

3. Nhiệm vụ nghiên cứu:

Trình bày lời giải và hướng dẫn giải các bài toán có sử dụng tính liên tục của hàm số để chứng minh phương trình có nghiệm, để giải các bài toán về hàm số và dãy số , trình bày một phương pháp chứng minh một hàm số là hàm số hằng và một lớp các phương trình hàm liên tục.

Tiếp theo những áp dụng tính liên tục của hàm số là các bài tập áp dụng định lí Lagrange, định lí Rolle để chứng minh phương trình có nghiệm, để chứng minh đẳng thức,bất đẳng thức, để giải phương trình,hệ phương trình,bất phương trình và áp dụng để tìm giới hạn dãy số.

Rèn luyện tư duy toán thông qua các bài tập về hàm số và giới hạn dãy số đồng thời trao đổi và học tập kinh nghiệm với các thầy cô bộ môn Toán của tỉnh Tiền Giang.

4. Phương pháp nghiên cứu

-Dựa vào các chuyên đề đã học ở Hà Nội và các tài liệu trong tất cả các đợt bồi dưỡng để trình bày hệ thống các áp dụng của hàm số liên tục , định lí Lagrange, định lí Rolle và các nhận xét.

-Hướng dẫn học sinh Đội tuyển tìm tài liệu có liên quan,phân loại bài tập,nhận xét cách giải, tạo tình huống có vấn đề để HS cùng trao đổi nghiên cứu.

-Hệ thống và sắp xếp các dạng bài tập từ dễ đến khó và có các lời giải cụ thể.

-Phương pháp phân tích:giúp học sinh nắm rõ bản chất vấn đề , lựa chọn phương pháp giải phù hợp đồng thời mở rộng và tương tự hoá bài toán.

5. Một số kết quả đạt được

Giúp cho học sinh đội tuyển có thêm phương pháp và tài liệu cần thiết để giải các bài toán về hàm số và dãy số.

Qua chuyên đề này giúp học sinh khắc sâu thêm kiến thức về hàm số liên tục và giới hạn dãy số.

Giúp cho học sinh có thêm phương pháp để viết các chuyên đề nâng cao khác.

II. NỘI DUNG NGHIÊN CỨU

1.Các tính chất của hàm số liên tục trên một đoạn được áp dụng nhiều và rất phong phú đa dạng trong các bài toán về hàm số và dãy số cũng như các định lí Lagrange, định lí Rolle cũng được sử dụng trong các đề thi HS giỏi cấp Quốc Gia gần đây.Với mong muốn có một chuyên đề tương đối hoàn chỉnh về các các dạng bài tập này nên chúng tôi viết chuyên đề :" *Áp dụng tính liên tục của hàm số, định lí Lagrange, định lí Rolle để giải toán"* để phục vụ giảng dạy cho học sinh Đội tuyển tỉnh nhà.

2. Đề tài được chia làm 2 chương:

-Chương I: Trình bày áp dụng tính chất của hàm số liên tục, trong chương này chủ yếu áp dụng tính chất hàm số liên tục trên một đoạn đồng thời sử dụng nhiều đến sự tồn tại giới hạn hữu hạn của dãy số và mối liên hệ giữa giới hạn dãy và giới hạn hàm.

- Chương II: Trình bày áp dụng định lí Lagrange, định lí Rolle để chứng minh phương trình có nghiệm, để chứng minh đẳng thức, bất đẳng thức, để giải phương trình,hệ phương trình,bất phương trình và áp dụng để tìm giới hạn dãy số.

Dù cố gắng nhiều nhưng đề tài không tránh khỏi sai sót , rất mong nhận được sự đóng góp từ các đồng nghiệp môn Toán của tỉnh nhà.

Sau đây và trình bày phần nội dung của đề tài.

Chương I.

ÁP DỤNG TÍNH CHẤT HÀM SỐ LIÊN TỤC ĐỂ GIẢI TOÁN

I.1.CÁC TÍNH CHẤT:

1.Nếu hàm số f liên tục tại x_0 thì mọi dãy (x_n) có $\lim x_n = x_0$ thì

$\lim f(x_n) = f(x_0) = f(\lim x_n)$.

2.Nếu hàm số y = f(x) liên tục trên đoạn [a;b] thì nó đạt được giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất trên đoạn đó,đồng thời nhận mọi giá trị trung gian ở giữa giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất,nghĩa là :

a/Tồn tại $x_1 \in [a;b]$ sao cho $f(x_1) \le f(x)$ với $\forall x \in [a;b]$,

kí hiệu $m=f(x_1)= \min\limits_{[a;b]} f(x)$

b/ Tồn tại $x_2 \in [a;b]$ sao cho $f(x) \le f(x_2)$ với $\forall x \in [a;b]$,

kí hiệu $M = f(x_2) = \max\limits_{[a;b]} f(x)$

c/Với mọi $c \in [m;M], \exists x_0 \in [a;b]$ sao cho $f(x_0) = c$

3. Nếu hàm số y = f(x) liên tục trên đoạn [a;b] và f(a).f(b) < 0 thì tồn tại $x_0 \in (a;b)$ sao cho $f(x_0) = 0$,nghĩa là phương trình f(x) = 0 có nghiệm.Nếu có thêm giả thiết hàm số f đơn điệu trên khoảng (a;b) thì nghiệm x_0 là duy nhất.

I.2.CÁC BÀI TOÁN:

I.2.1. Áp dụng tính liên tục của hàm số để chứng minh phương trình có nghiệm:

Biến đổi phương trình về dạng f(x) = 0 sau đó chứng minh f liên tục trên [a;b] và f(a).f(b) ≤ 0

Bài 1: Cho a,b,c khác 0 và p,q tùy ý.CMR phương trình $\frac{a^2}{x-p}+\frac{b^2}{x-q}=c$ luôn có nghiệm.

*Giải :** Với p = q ta có $\frac{a^2+b^2}{x-p}=c \Leftrightarrow \begin{cases} x\neq p \\ x=\frac{a^2+b^2}{c}+p \end{cases}$ phương trình có nghiệm.

* Với $p\neq q$ điều kiện xác định $x\neq p$ và $x\neq q$ .Với điều kiện đó phương trình tương đương với $a^2(x-q)+b^2(x-p)=c(x-p)(x-q) \Leftrightarrow c(x-p)(x-q)-a^2(x-q)-b^2(x-p)=0$

Đặt vế trái của phương trình là f(x) . Ta có f liên tục trên R và

$f(p)f(q) = -a^2b^2(p-q)^2 \leq 0$.Do đó tồn tại số x_0 ở giữa p và q sao cho $f(x_0) = 0$,tức phương trình có nghiệm.

Bài 2: Cho hàm $f:[a;b]\rightarrow[a;b]$ liên tục .CMR phương trình f(x) = x có nghiệm trong [a;b]

*HD:*Đặt g(x) = f(x) –x liên tục trên [a;b] và $g(a).g(b)\leq 0$

Bài 3:CMR phương trình $\frac{1}{\cos x}-\frac{1}{\sin x}=m$ luôn có nghiệm.

HD: Điều kiện $x\neq k\frac{\pi}{2}$ .PT tương đương với sinx – cosx –msinxcosx = 0

Đặt f(x) = sinx – cosx –msinxcosx liên tục trên $[0;\frac{\pi}{2}]$ và $f(0).f(\frac{\pi}{2})<0$

Bài 4:CMR với mọi a,b,c PT sau luôn có nghiệm:

$$ab(x-a)(x-b)+bc(x-b)(x-c)+ac(x-a)(x-c)=0$$

HD: Đặt f(x)= ab(x-a)(x-b)+ bc(x-b)(x-c)+ ac(x-a)(x-c) liên tục trên R và

$f(a).f(b).f(c).f(0)\leq 0 \Rightarrow f(a).f(b)\leq 0$ hoặc $f(c).f(0)\leq 0$

I.2.2. Áp dụng tính liên tục của hàm số để giải các bài toán về hàm số và dãy số:

-Áp dụng định lí giá trị trung gian giữa giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm liên tục .

-Dãy số đơn điệu và bị chặn thì tồn tại giới hạn hữu hạn.

Bài 5: Cho f là hàm số liên tục trên R thỏa mãn các điều kiện f(f(x))f(x) =1 với mọi x và f(2a)=2a-1(với a>1).Hãy tính f(a)

Giải: Ta có f(f(2a)).f(2a) =1 và f(2a) = 2a-1 nên [f(2a-1)].(2a-1) =1 suy ra f(2a-1)=$\frac{1}{2a-1}$

Vì f liên tục trên R và $\frac{1}{2a-1} < a < 2a-1$ nên tồn tại $x_0 \in$(2a-1;2a) sao cho f(x_0) = a

Vì f(f(x)).f(x)=1 với mọi x nên f(f(x_0)).f(x_0)=1 suy ra $f(a) = \frac{1}{a}$

Bài 6: Cho hai hàm số liên tục f,g:[0;1]$\to$[0;1] thỏa mãn điều kiện f(g(x)) = g(f(x)) , $\forall x \in [0;1]$.Biết rằng f là hàm số tăng.CMR tồn tại $a \in [0;1]$ sao cho f(a) = g(a) = a

Giải: Đặt h(x) = g(x)-x với $\forall x \in [0;1]$, h là hàm số liên tục trên [0;1]

và h(0).h(1) = [g(0)-0] [g(1)-1]$\leq$ 0 nên tồn tại $x_0 \in [0;1]$ sao cho h(x_0) = 0 hay g(x_0) = x_0

Nếu f(x_0) = x_0 thì ta có đpcm

Nếu f(x_0) $\neq$ x_0 ta xét dãy (x_n) được xác định bởi x_1 = f(x_0),x_{n+1} = f (x_n) với mọi n$\geq$ 1.Rõ ràng $x_n \in [0;1]$. Do f là hàm số tăng nên dãy (x_n) là dãy tăng nếu $x_0 < x_1$ và là dãy giảm nếu $x_0 > x_1$ Suy ra tồn tại limx_n =a $\in [0;1]$.Bằng quy nạp ta chứng minh được g(x_n) = x_n với mọi n$\geq$ 1.Thật vậy với n =1 ta có x_1 = f(x_0) $\Rightarrow$ g(x_1) = g(f(x_0)) = f(g(x_0)) =
f(x_0) = x_1. Giả sử g(x_k) = x_k .Khi đó x_{k+1} = f(x_k) = f(g(x_k)) = g(f(x_k)) = g(x_{k+1}) .
Vậy g(x_n) = x_n với mọi n$\geq$ 1.Do f và g liên tục nên ta có :
f(a) = f(limx_n) = limf(x_n) = limx_{n+1} = a và g(a) = g(limx_n) = limg(x_n) = limx_n = a.
Vậy f(a) = g(a) = a.

Bài 7: Cho f là hàm số liên tục trên đoạn [0;1] thỏa điều kiện f(0) = f(1) .CMR với bất kì số tự nhiên n nào cũng tồn tại số c thuộc đoạn [0;1] sao cho $f(c) = f(c + \frac{1}{n})$

Giải : Xét hàm số $g(x) = f(x + \frac{1}{n}) - f(x)$, $x \in \left[0; \frac{n-1}{n}\right]$ khi đó g liên tục trên $\left[0; \frac{n-1}{n}\right]$ và

$$g(0) + g(\frac{1}{n}) + g(\frac{2}{n}) + ...g(\frac{n-1}{n}) = f(\frac{1}{n}) - f(0) + f(\frac{2}{n}) - f(\frac{1}{n}) + ... + f(1) - f(\frac{n-1}{n})$$
$$= f(1) - f(0) = 0$$

Từ đó suy ra tồn tại i,j sao cho $g(\frac{i}{n}) \leq 0$; $g(\frac{j}{n}) \geq 0$ Vì g liên tục trên $\left[0; \frac{n-1}{n}\right]$nên

$\exists c \in \left(\frac{i}{n}, \frac{j}{n}\right): g(c) = 0$ .Vậy tồn tại $\exists c \in [0;1]: f(c) = f(c + \frac{1}{n})$

Bài 8: Ký hiệu x_n là nghiệm của phương trình

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} + ... + \frac{1}{x-n} = 0$$

thuộc khoảng (0, 1)

a) Chứng minh dãy (x_n) hội tụ;

b) Hãy tìm giới hạn đó.

Giải

a/ x_n được xác định duy nhất vì hàm số $f_n(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} + ... + \frac{1}{x-n}$ liên tục , giảm trên (0, 1) và $\lim_{x \to 0^+} f_n(x) = +\infty$; $\lim_{x \to 1^-} f_n(x) = -\infty$

Rõ ràng x_n được xác định duy nhất với $0 < x_n < 1$. Ta có

$f_{n+1}(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} + ... + \frac{1}{x-n} + \frac{1}{x-n-1} = f_n(x) + \frac{1}{x-n-1}$ suy ra:

$f_{n+1}(x_n) = f_n(x_n) + 1/(x_n-n-1) = 1/(x_n-n-1) < 0$, trong khi đó $\lim_{x \to 0^+} f_{n+1}(x) = +\infty$. Theo tính chất của hàm liên tục, trên khoảng $(0, x_n)$ có ít nhất 1 nghiệm của $f_{n+1}(x)$. Nghiệm đó chính là x_{n+1}. Vậy ta đã chứng minh được $x_{n+1} < x_n$. Tức là dãy số (x_n) giảm. Do dãy này bị chặn dưới bởi 0 nên dãy số có giới hạn.

b/Ta sẽ chứng minh giới hạn nói trên bằng 0. Để chứng minh điều này, ta cần đến kết quả quen thuộc sau:

$1 + 1/2 + 1/3 + … + 1/n > \ln(n)$

(Thật vậy ta có $\ln(1+1/n) < 1/n$ suy ra $1 + 1/2 + 1/3 + … + 1/n > \ln2+\ln3-\ln2+…+\ln(n+1)-\ln n=\ln(n+1) > \ln n$)

Thật vậy, giả sử $\lim x_n = a > 0$. Khi đó, do dãy số giảm nên ta có $x_n \geq a$ với mọi n.

Do $1 + 1/2 + 1/3 + … + 1/n \rightarrow +\infty$ khi $n \rightarrow +\infty$ nên tồn tại N sao cho với mọi $n \geq N$ ta có $1 + 1/2 + 1/3 + … + 1/n > 1/a$.

Khi đó với $n \geq N$ ta có

$$0=\frac{1}{x_n}+\frac{1}{x_n-1}+...+\frac{1}{x_n-n}<\frac{1}{x_n}+\frac{1}{-1}+\frac{1}{-2}+...+\frac{1}{-n}<\frac{1}{a}-\frac{1}{a}=0$$

Mâu thuẫn. Vậy ta phải có lim $x_n = 0$.

NX : * Có thể lập bảng biến thiên để thấy hàm số f_n giảm từ $+\infty$ xuống $-\infty$ trên (0 ;1)

* Áp dụng : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=+\infty \Leftrightarrow (\forall M>0, \exists N: n>N \Rightarrow u_n>M)$

* Dãy (u_n) giảm và bị chặn dưới thì tồn tại giới hạn hữu hạn $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

Bài 9 : Cho n là một số nguyên dương lớn hơn 1. Chứng minh rằng phương trình $x^n = x + 1$ có một nghiệm dương duy nhất, ký hiệu là x_n. Chứng minh rằng x_n dần về 1 khi n dần đến vô cùng và tìm $\lim\limits_{n\to\infty} n(x_n-1)$.

Giải : Đặt $f_n(x) = x^n - x - 1$ ta có $f_n(1) = -1< 0$,$f_n(3) > 0$ khi n>1và f tăng trên $(1 ; +\infty)$ nên $x_n > 1$ .Khi đó $f_{n+1}(1) = - 1 < 0$ và $f_{n+1}(x_n) = x_n^{n+1} - x_n - 1 > x_n^n - x_n - 1= f_n(x_n) = 0$. Từ đó ta suy ra $1 < x_{n+1} < x_n$. Suy ra dãy (x_n) có giới hạn hữu hạn a. Ta chứng minh

a = 1. Thật vậy, giả sử a > 1. Khi đó $x_n \geq a$ với mọi n và ta tìm được n đủ lớn sao cho: $x_n^n \geq a^n > 3$ và $x_n + 1 < 3$, mâu thuẫn vì $f_n(x_n) = 0$.

Đặt $x_n = 1 + y_n$ với lim $y_n = 0$. Thay vào phương trình $f_n(x_n) = 0$, ta được

$(1+y_n)^n = 2 + y_n$. Lấy logarith hai vế, ta được

$n\ln(1+y_n) = \ln(2+y_n)$

Từ đó suy ra

$\lim n\ln(1+y_n) = \ln 2$ $\Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} ny_n\frac{\ln(1+y_n)}{y_n}=\ln 2$

Nhưng $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\ln(1+y_n)}{y_n}=1$ nên từ đây ta suy ra lim $ny_n = \ln 2$, tức là

$\lim\limits_{n\to\infty} n(x_n-1)=\ln 2.$

NX: * (u_n) giảm và lim x_n = a thì $x_n \geq a$

* Với a >1 thì $\lim a^n=+\infty$ nên với n đủ lớn thì $a^n > 3$

* $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$

I.2.3.Dựa vào tính liên tục của hàm số để chứng minh một hàm số là hàm hằng

Ta thường áp dụng tính chất sau: Nếu hàm số f liên tục tại x_0 thì mọi dãy (x_n) có $\lim x_n = x_0$ thì $\lim f(x_n) = f(x_0) = f(\lim x_n)$.

Bài 10:Tìm hàm f liên tục trên R và thỏa mãn $f(x) = f(\frac{x}{2})$, $\forall x \in R$

Giải:Giả sử có hàm số f thỏa điều kiện bài toán , bằng quy nạp ta chứng minh

được : $f(x) = f(\frac{x}{2^n})$, $\forall n \in N$ .Cho $n \to +\infty$ thì $\frac{x}{2^n} \to 0$. Vì f liên tục nên $f(\frac{x}{2^n}) \to f(0)$

Vậy $f(x) = \lim f(\frac{x}{2^n}) = f(0) = c$.Thử lại f(x) = c thỏa yêu cầu.Vậy f là hàm số hằng.

Bài 11: Tìm hàm f liên tục trên R và thỏa mãn $f(x^2).f(x) = 1$ với $\forall x \in R$

Giải : Từ đề bài ta có $f(x) \neq 0$, $\forall x \in R$ và $f(0) = \pm 1$, $f(1) = \pm 1$

Ta lại có $f(x^2).f(x) = f(x^2).f(-x)$ $\forall x \in R$ nên $f(x) = f(-x)$ $\forall x \in R$,do đó ta chỉ cần xét với $x \geq 0$

- Với $0 \leq x < 1: f(x) = \frac{1}{f(x^2)} = f(x^4) = f(x^{16}) = ... = f(x^{4^n})$

Khi $n \to +\infty$ thì $x^{4^n} \to 0$ và do f liên tục nên $f(x) = \lim f(x^{4^n}) = f(0) = \pm 1$

- Với $x \geq 1: f(x) = \frac{1}{f(x^{\frac{1}{2}})} = f(x^{\frac{1}{4}}) = f(x^{\frac{1}{16}}) = ... = f(x^{\frac{1}{4^n}})$

Khi $n \to +\infty$ thì $x^{\frac{1}{4^n}} \to 0$ và do f liên tục nên $f(x) = \lim f(x^{\frac{1}{4^n}}) = f(1) = \pm 1$

Vì f liên tục nên có hai hàm hằng thỏa yêu cầu bài toán là f(x) = 1 và f(x) = -1 với mọi x

NX : $|x| < 1$ thì $\lim x^n = 0$

Bài 12: Tìm hàm f liên tục trên R và thỏa mãn $f(x) = f(x^2 + \frac{1}{4})$ với $\forall x \in R$

Giải: Giả sử f là hàm thỏa mãn điều kiện bài toán thì f là hàm số chẵn Ta xét hai trường hợp

*Với $0 \leq x_0 \leq \frac{1}{2}$ Xét dãy $x_0, x_1, \ldots, x_n, \ldots$ xác định bởi $x_{n+1} = x_n^2 + \frac{1}{4}$.Bằng quy nạp ta có

$0 \leq x_n \leq \frac{1}{2}$, $\forall n \in N$ .Mặt khác $x_{n+1} - x_n = x_n^2 - x_n + \frac{1}{4} = (x_n - \frac{1}{2})^2 \geq 0$ suy ra (x_n) là dãy đơn điệu tăng nên nó hội tụ .Gọi $\lim x_n = a$ thì $a^2 - a + \frac{1}{4} = 0$ suy ra $a = \frac{1}{2}$.

Vì f là hàm liên tục nên lim f(x_n) = f($\frac{1}{2}$), mặt khác $f(x_{n+1}) = f(x_n^2 + \frac{1}{4}) = f(x_n)$, $\forall n \in N$.

Vậy f(x_0) = f(x_1) =…= f(x_n) =… nên f(x_0) = f($\frac{1}{2}$) với mọi $x_0 \in [0;\frac{1}{2}]$

*Với $x_0 > \frac{1}{2}$ Xét dãy $x_0, x_1, \ldots, x_n, \ldots$ xác định bởi $x_{n+1} = \sqrt{x_n - \frac{1}{4}}$ Như trên (x_n) là dãy hội tụ

và limx_n = $\frac{1}{2}$ và f liên tục nên lim f(x_n) = f($\frac{1}{2}$), mặt

khác $f(x_{n+1}) = f(x_{n+1}^2 + \frac{1}{4}) = f(x_n)$, $\forall n \in N$.

Vậy f(x_0) = f(x_1) =…= f(x_n) =… nên f(x_0) = f($\frac{1}{2}$) với mọi $x_0 > \frac{1}{2}$.

Thử lại f(x) = C thỏa đề bài .Vậy f là hàm hằng với mọi x

Bài 13: Tìm hàm f liên tục trên R và thỏa mãn $f(x^2) + f(x) = x^2 + x$ với $\forall x \in R$

Giải Đặt g(x) = f(x)-x , g liên tục trên R và $g(x^2)+g(x) = 0$ với $\forall x \in R$ do đó g là hàm chẵn và

g(0) = g(1) = 0 .Với x > 0 ta có g(x)= -g(x^2) = g(x^4) suy ra g(x) = $g(x^{\frac{1}{4}})$

Với $x_0 > 0$ ta xét dãy $x_0, x_1, \ldots, x_n, \ldots$ với $x_{n+1} = x_n^{\frac{1}{4}}$,$\forall n \in N$.

Ta có $x_{n+1} = x_n^{\frac{1}{4}} = x_{n-1}^{\frac{1}{16}} = \ldots = x_0^{\frac{1}{4^{n+1}}} \to 1$ và $g(x_{n+1}) = g(x_n^{\frac{1}{4}}) = g(x_n) = g(x_{n-1}) = \ldots = g(x_0)$

Vì g liên tục nên g(x_0) = limg(x_n) = g(limx_n) = g(1) = 0.Vậy g(x) = 0 với $\forall x \in R$ do đó f(x) = x với $\forall x \in R$ .Hiển hiên hàm số này thỏa yêu cầu bài toán

Bài 14: Tìm hàm f liên tục trên [0;1] và thỏa mãn f(xf(x)) = f(x) , $\forall x \in [0;1]$

Giải:Giả sử $a \in (0;1]$ và b = f(a).Khi đó f xác định tại a và do đó xác định tại ab,ab^2,…,ab^n

Bằng quy nạp ta có f(ab^n) = b,$\forall n \in N$ .Thật vậy với n=1 ta có f(ab) = f(af(a))=f(a) = b và f(ab^{n+1}) = f(ab^nf(ab^n)) = f(ab^n) = b.Ta có $b \in [0;1]$ vì nếu b<0 thì ab<0 và nếu b>1 thì với n đủ lớn ta có ab^n>1 ,khi đó f sẽ không xác định tại ab và ab^n .Do f liên tục nên với 0 < b <1 thì f(a) = limf(ab^n) = f(limab^n) = f(0).Vậy f(a) chỉ nhận một trong 3 giá trị 0 ; f(0) ; 1 mà f liên tục nên f(x) = c $\forall x \in [0;1]$.Thử lại đúng .

I.2.4.Phương trình hàm liên tục

-Áp dụng phương trình hàm Côsi:Nếu hàm số liên tục trên R thỏa điều kiện $f(x+y)=f(x)+f(y)$ với mọi $x,y\in R$ thì $f(x) = ax$ với $a\in R$.

- Nếu hàm số liên tục trên R thỏa điều kiện $f(x+y) = f(x).f(y)$ với mọi $x,y\in R$ thì $f(x) = 0$ hoặc $f(x) = a^x$ (với $a > 0$)

Bài 15: Tìm hàm f liên tục trên R và thỏa mãn $f(x+y) = f(x)+f(y)+f(x).f(y)$ với mọi $x,y\in R$

Giải: Đặt $g(x) = f(x)+1$ thì g liên tục trên R và

$g(x+y)-1 = g(x)-1+g(y)-1+[g(x)-1][g(y)-1]$ suy ra $g(x+y) = g(x).g(y)$ với mọi $x,y\in R$ .Vậy $g(x) = 0$ hoặc $g(x) = a^x$ .Thử lại ta có $f(x) = a^x-1$ với mọi $x\in R$

Bài 16: Tìm hàm f liên tục trên R và thỏa mãn $f(x+y) = f(x)+f(y)+2x.y$ với mọi $x,y\in R$ và $f(1) = -1$

Giải:Thay $y = 0$ ta được $f(0) = 0$.theo đề bài ta có

$f(x+y)-(x+y)^2-2(x+y) = f(x)-x^2-2x+f(y)-y^2-2y$

Đặt $g(x) = f(x)-x^2-2x$ liên tục trên R và $g(x+y) = g(x)+g(y)$, g liên tục và cộng tính nên $g(x) = ax$ .Mặt khác $g(1) = f(1)-3 = -4 = a$ nên $g(x) = -4x$.Vậy $f(x) = x^2-2x$ với mọi $x\in R$.

Bài 17 : Tìm hàm f liên tục trên R và thỏa mãn $f(2x-y)=2f(x)-f(y)$ với mọi $x,y\in R$

HD : Đặt $g(x) = f(x)-f(0)$ liên tục trên R ta có $g(0) = 0$ và $g(2x-y) = 2g(x)-g(y)$

Cho $x = 0$ ta có $g(-y) = -g(y)$; cho $y = 0$ ta có $g(2x) = 2g(x)$.Từ đó suy ra :

$g(2x-y) = g(2x)+g(-y)$ suy ra $g(x) = ax$.Vậy $f(x) = ax+b$.

Bài 18 : Tìm hàm f liên tục trên R và thỏa mãn $f(x)+f(y)- f(x+y) = x.y$ với mọi $x,y\in R$

HD : Ta có $xy = \dfrac{(x+y)^2-(x^2+y^2)}{2}$ và PT được viết :

$f(x)+\dfrac{x^2}{2}+f(y)+\dfrac{y^2}{2} = f(x+y)+\dfrac{(x+y)^2}{2}$. Đặt $g(x) = f(x)+\dfrac{x^2}{2}$ ta có

$g(x+y) = g(x)+g(y)$ với mọi $x,y\in R$ suy ra $g(x) = ax$ v à $f(x) = ax-\dfrac{x^2}{2}$

Bài 19: Tìm hàm f liên tục trên R và thỏa mãn $f(x+y)+f(z) = f(x)+f(y+z)$ với mọi $x,y,z\in R$.

HD: Đặt $f(0) = c$ .Thay $z = 0$ ta có $f(x+y)+c = f(x)+f(y) \Leftrightarrow f(x+y)-c = f(x)-c+f(y)-c \Leftrightarrow$ $g(x+y) = g(x)+g(y)$ .Suy ra $g(x) = ax$ và $f(x) = ax+c$

CHƯƠNG II. ÁP DỤNG ĐỊNH LÍ LAGRANGE, ĐỊNH LÍ ROLLE ĐỂ GIẢI TOÁN :

II.1.CÁC ĐỊNH LÍ :

1.Định lí Lagrange : Cho hàm số f liên tục trên [a;b] có đạo hàm trên (a;b) khi đó tồn tại $x_0 \in (a;b)$ sao cho $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f^{/}(x_0)$

Ý nghĩa của định lí Lagrange : Lấy hai điểm A(a;f(a)) và B(b;f(b)) với y=f(x) là hàm số liên tục trên [a;b] và có đạo hàm trên (a;b) . Lúc đó trên cung AB của đồ thị có ít nhất một điểm C mà tiếp tuyến tại đó của đồ thị song song với đường thẳng AB

2.Định lí Rolle : Cho hàm số f liên tục trên [a;b] có đạo hàm trên (a;b) và f(a) = f(b) khi đó tồn tại $x_0 \in (a;b)$ sao cho $f^{/}(x_0) = 0$

Ý nghĩa của định lí Rolle: Lấy hai điểm A(a;f(a)) và B(b;f(b)) với y = f(x) là hàm số liên tục trên [a;b] và có đạo hàm trên (a;b) . Lúc đó trên cung AB của đồ thị có ít nhất một điểm C mà tiếp tuyến tại đó của đồ thị cùng phương với trục hoành.

Hệ quả : Cho hàm số y = f(x) liên tục trên [a;b] có đạo hàm trên (a;b).Nếu phương trình $f^{/}(x) = 0$ có k nghiệm phân biệt trên (a;b) thì phương trình f(x) = 0 có không quá k+1 nghiệm trên khoảng đó.

3.Định lí Côsi : Cho hàm số f và g liên tục trên [a;b] có đạo hàm trên (a;b) khi đó tồn tại $c \in (a;b)$ sao cho: $[f(b)-f(a)]g^{/}(c) = [g(b)-g(a)]f^{/}(c)$

4.Tính chất : Nếu đa thức P(x) với hệ số thực có n nghiệm thực phân biệt thì đa thức $P^{/}(x)$ có ít nhất n-1 nghiệm thực.

II.2.CÁC BÀI TẬP ÁP DỤNG:

II.2.1. Áp dụng định lí Lagrange, định lí Rolle để chứng minh phương trình có nghiệm:

Ta xác định hàm số y = F(x) liên tục trên [a;b] có đạo hàm trên (a;b) và F(a) = F(b)

Bài 20 : Cho m > 0 , a,b,c thỏa $\frac{a}{m+2} + \frac{b}{m+1} + \frac{c}{m} = 0$.

CMR phương trình $ax^2+bx+c = 0$ có nghiệm thuộc khoảng (0;1)

HD: Hàm số F(x)=$\frac{a}{m+2}x^{m+2}+\frac{b}{m+1}x^{m+1}+\frac{c}{m}x^{m}$ liên tục trên [0;1] có đạo hàm trên (0;1) và F(0) = F(1) = 0 nên tồn tại $x_0 \in (0;1)$ sao cho:

$$F'(x_0)=x_0^{m-1}(ax_0^2+bx_0+c)=0 \Rightarrow ax_0^2+bx_0+c=0$$

Bài 21:Cho $a_0+\frac{a_1}{2}+\frac{a_2}{3}+...+\frac{a_n}{n+1}=0$ .CMR phương trình :

$a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} +\ldots+ a_1x + a_0 = 0$ ($a_n \neq 0$) có nghiệm thuộc khoảng (0;1)

HD :Xét hàm số F(x)=$\sum_{k=0}^{n}\frac{a_k}{k+1}x^{k+1}$ liên tục trên [0;1] có đạo hàm trên (0;1) và

F(0) = F(1) = 0 sau đó áp dụng định lý Rolle

Bài 22: Cho các số thực a,b,c và số nguyên dương n thỏa $c=\frac{-6(a+b)}{5(n+2)}$ .CMR phương trình $a\sin^n x+b\cos^n x+c\sin x+c=0$ có nghiệm thuộc $(0;\frac{\pi}{2})$

HD: Xét hàm số f(x) = $\frac{2a}{n+2}\sin^{n+2}x-\frac{2b}{n+2}\cos^{n+2}x+\frac{2c}{3}\sin^3 x-c\cos^2 x$ có

$f'(x)=\sin 2x(a\sin^n x+b\cos^n x+c\sin x+c)$ và $f(\frac{\pi}{2})-f(0)=\frac{2a+2b}{n+2}+\frac{5c}{3}=0$ sau đó áp dụng định lí Rolle

Bài 23: Cho n là số nguyên dương và các số thực a_k,b_k (k=1,2,…,n) .

CMR phương trình

$x+\sum_{k=1}^{n}(a_k\sin kx+b_k\cos kx)=0$ có nghiệm trong $(-\pi;\pi)$

HD: Xét hàm số $f(x)=\frac{x^2}{2}+\sum_{k=1}^{n}(-\frac{1}{k}a_k\cos kx+\frac{1}{k}b_k\sin kx)$ liên tục trên $[-\pi;\pi]$ có đạo hàm trên $(-\pi;\pi)$ và $f(-\pi)=f(\pi)$

Bài 24: Cho $c_0+\frac{c_1}{2}+\frac{c_2}{3}+...++\frac{c_n}{n+1}=2c_0+2c_1+\frac{c_2.2^3}{3}+...+\frac{c_n.2^n}{n+1}=0$.

CMR phương trình $c_1+2c_2x+\ldots+nc_nx^{n-1} = 0$ có nghiệm thuộc khoảng (0;2)

HD:Xét hàm số $F(x) = c_0x + \frac{1}{2}c_1x^2 + \frac{1}{3}c_2x^3 + ... + \frac{1}{n+1}c_nx^{n+1}$ có F(0) = F(1) = F(2) = 0 nên $F^/$ có ít nhất 2 nghiệm x_1, x_2 thỏa $0<x_1<1<x_2<2$.Từ $F^/(x_1) = F^/(x_2) = 0$ suy ra phương trình $F^{//}(x)=0$ có nghiệm thuộc khoảng (0;2)

Bài 25: Cho đa thức P(x) với hệ số thực có n nghiệm thực phân biệt .CMR đa thức $P^/(x)$ có ít nhất n-1 nghiệm thực.

HD:Giả sử P(x) có n nghiệm thực phân biệt $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$ .Khi đó $P(x_i) = 0$ với i=1,2,…,n .Áp dụng định lí Rolle trên n-1 đoạn $[x_i;x_{i+1}]$ với i =1,2,…,n-1 ta có kết quả .

Bài 26: Cho $a \neq 0$, $ax^2+bx+c = 0$ có 2 nghiệm thực và đa thức P(x) hệ số thực có 3 nghiệm thực.CMR đa thức $Q(x) = aP(x)+bP^/(x)+cP^{//}(x)$ cũng có ít nhất 3 nghiệm thực

HD: Gọi α, β là nghiệm của phương trình $ax^2+bx+c = 0$.

Đặt $f(x) = e^{-\frac{x}{\alpha}}P(x) \Rightarrow f^/(x) = -\frac{1}{\alpha}e^{-\frac{x}{\alpha}}\left[P(x) - \alpha P^/(x)\right]$. f có 3 nghiệm thực (do P có 3 nghiệm) thì $f^/$ có 2 nghiệm thực nên $Q(x) = P(x) - \alpha P^/(x)$ có ít nhất 2 nghiệm thực .Ta chứng minh Q(x) có ít nhất 3 nghiệm thực

i/Nếu P(x) có bậc lẻ thì Q(x) có bậc lẻ , Q có 2 nghiệm thực a,b thì $Q(x)=(x-a)(x-b)Q_1(x)$, $Q_1(x)$ có bậc lẻ nên có ít nhất 1 nghiệm thực , vậy Q có ít nhất 3 nghiệm thực.

ii/Nếu P(x) có bậc chẵn , P có 3 nghiệm thực c,d,e thì $P(x) = (x-c)(x-d)(x-e)P_1(x)$, $P_1(x)$ có bậc lẻ nên có ít nhất 1 nghiệm thực , vậy P(x) có ít nhất 4 nghiệm thực suy ra $P^/(x)$ có 3 nghiệm nên Q(x) có ít nhất 3 nghiệm thực.Khi đó T(x) =$Q(x) - \beta Q^/(x)$ cũng có ít nhất 3 nghiệm thực , mà $T(x) = \frac{1}{a}(aP(x) + bP^/(x) + cP^{//}(x))$

NX: Đa thức bậc lẻ có ít nhất 1 nghiệm thực

Tổng quát : Đa thức $f(x) = t^m+a_1t^{m-1}+\ldots+a_m$ có các nghiệm đều thực thì $Q(x) = P(x)+a_1P^/(x)+ a_2P^{//}(x)+\ldots a_mP^{(m)}(x)$ có số nghiệm thực không ít hơn số nghiệm thực của P(x)

II.2.2. Áp dụng định lí Lagrange, định lí Rolle chứng minh đẳng thức ,bất đẳng thức :

Bài 27(Định lí Côsi): Cho hàm số f và g liên tục trên [a;b] có đạo hàm trên (a;b) khi đó tồn tại c $\in$(a;b) sao cho: [f(b)-f(a)]g/(c) = [g(b)-g(a)]f/(c)

HD:Xét $h(x) = f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}[g(x)-g(a)]$ $\quad (g(b) \neq g(a) \ )$

Ta có h(a) = h(b) = f(a) suy ra tồn tại c $\in$(a;b): h/(c) =0 suy ra đpcm

Nếu g(a) = g(b) thì tồn tại c $\in$(a;b): g/(c) = 0

Chú ý : Nếu g(x) = x thì ta có định lí Lagrange

Bài 28: Cho hàm số f và g liên tục trên [a;b] có đạo hàm trên (a;b) khi đó tồn tại c $\in$(a;b) sao cho: $\frac{1}{a-b}\left(af(b)-bf(a)\right) = f(c) - cf^{/}(c)$

HD: Áp dụng định lí Côsi cho các hàm số $h(x) = \frac{f(x)}{x}$, $g(x) = \frac{1}{x}$

Bài 29:Cho hàm số $f:[0;1] \to [0;1]$ liên tục và có đạo hàm trên (0;1) ,f(0)=0 , f(1)=1 .CMR $\exists a,b \in (0;1)$ $a \neq b$ sao cho $f^{/}(a)f^{/}(b) = 1$

HD: Xét hàm số g(x) = f(x)+x-1 liên tục trên [0;1] có đạo hàm trên (0;1) và g(0) = -1,g(1) = 1.

Vì g liên tục trên [0;1] và g(0).g(1) < 0 nên $\exists c \in (0;1); g(c) = 0$.Áp dụng định lý Lagrange trên [0;c] và trên [c;1] ta có $a \neq b$ và $g^{/}(a) = \frac{g(c)-g(0)}{c} = \frac{1}{c}$; $g^{/}(b) = \frac{g(1)-g(c)}{1-c} = \frac{1}{1-c} \Rightarrow$

$f^{/}(a).f^{/}(b) = (g^{/}(a)-1).(g^{/}(b)-1) = 1$.

Bài 30: Cho $f:[a;b] \to R^{+}$ liên tục trên [a;b] và có đạo hàm trên (a;b) .

CMR tồn tại c $\in$(a;b):

$$\frac{f(a)}{f(b)} = e^{(b-a)\frac{f^{/}(c)}{f(c)}}$$

HD:Áp dụng định lí Lagrange cho hàm số g(x) = lnf(x) trên [a;b]

Bài 31: Cho $f,g:[a;b] \to R$ liên tục trên [a;b] và có đạo hàm trên (a;b) và $g(x)+g^{/}(x) \neq 0$,$\forall x \in (a;b)$ và $\frac{f(a)}{g(a)} = \frac{f(b)}{g(b)}$ .CMR tồn tại c $\in$(a;b) sao cho:

$$\frac{f(c)}{g(c)}=\frac{f^{/}(c)}{g^{/}(c)} \ .$$

HD:Áp dụng định lí Cô si cho hai hàm số $h(x)=\ln\left|f(x)\right|$, $k(x)=\ln\left|g(x)\right|$

Bài 32: Cho $f:[a;b]\to R$ liên tục trên [a;b] và có đạo hàm trên (a;b) .và $f(x)\neq 0$,$\forall x\in(a;b)$. CMR tồn tại c $\in$(a;b) sao cho:

$$\frac{f^{/}(c)}{f(c)}=\frac{1}{a-c}+\frac{1}{b-c}$$

*HD:*Áp dụng định lí Rolle cho hàm số g(x)=(a-x)(b-x)f(x) trên [a;b]

Sau đây là một số áp dụng tính chất : Nếu đa thức bậc n P(x) có n nghiệm phân biệt (có thể trùng nhau) thì $P^{/}(x)$ có n-1 nghiệm.

Bài 33: Cho P(x) là đa thức bậc n có n nghiệm thực phân biệt $x_1,x_2,\ldots,x_n$.

CMR: $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{P^{//}(x_k)}{P^{/}(x_k)}=0$

HD: Ta có P(x)=$a\displaystyle\prod_{i=1}^{n}(x-x_i)$ $\quad (a\neq 0)$ và $P^{/}(x)=P(x)(\frac{1}{x-x_1}+\frac{1}{x-x_2}+...+\frac{1}{x-x_n})$ (1)

P (x) có n nghiệm phân biệt nên $P^{/}$ (x) có n-1 nghiệm phân biệt $y_1,y_2,\ldots,y_{n-1}$ với

$x_1<y_1<x_2<y_2<\ldots<x_{n-1}<y_{n-1}<x_n$ .Ta có $P^{//}(x)=P^{/}(x)(\frac{1}{x-y_1}+\frac{1}{x-y_2}+...+\frac{1}{x-y_{n-1}})$

Thay x = y_k vào (1) ta có $0=P^{/}(y_k)=P(y_k)(\frac{1}{y_k-x_1}+\frac{1}{y_k-x_2}+...+\frac{1}{y_k-x_n})$ với

$P(y_k)\neq 0$ suy ra $\frac{1}{y_k-x_1}+\frac{1}{y_k-x_2}+...+\frac{1}{y_k-x_n}=0 \quad \forall k\in\{1,2,...,n-1\}$

Ta có $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{P^{//}(x_k)}{P^{/}(x_k)}=\sum_{i=1}^{n}(\frac{1}{x_k-y_1}+\frac{1}{x_k-y_2}+...+\frac{1}{x_k-y_{n-1}})=0$

Bài 34: Cho a,b,c,d > 0.

CMR: $\sqrt[3]{\dfrac{abc+abd+acd+bcd}{4}}\leq\sqrt{\dfrac{ab+ac+ad+bc+bd+cd}{6}}$

Dấu bằng xảy ra khi nào ?

HD:Giả sử $a \le b \le c \le d$ và F(x)=(x-a).(x-b).(x-c).(x-d) Ta có F(a)=F(b)=F(c)=F(d)=0 nên $F^{/}(x)$ có 3 nghiệm y_1,y_2,y_3 trên các đoạn [a;b],[b;c],[c;d] và $a \le y_1 \le b \le y_2 \le c \le y_3 \le d$

Ta có $F(x) = x^4-T_1x^3+T_2x^2-T_3x+T_4$ với $T_1 = a+b+c+d$, $T_2 = ab+ac+ad+bc+bd+cd$,

$T_3 = abc+abd+acd+bcd$, $T_4=abcd$

$F^{/}(x)= 4x^3-3T_1x^2+2T_2x-T_3$ có 3 nghiệm dương y_1,y_2,y_3 . Theo định lí Viét ta :

$y_1y_2 + y_2y_3 + y_3y_1 = \frac{T_2}{2}$; $y_1y_2y_3 = \frac{T_3}{4}$.Áp dụng BĐT Côsi ta có :

$$\frac{1}{3}(y_1y_2 + y_2y_3 + y_3y_1) \ge \sqrt[3]{(y_1y_2y_3)^2} \Rightarrow \frac{T_2}{6} \ge \sqrt[3]{\left(\frac{T_3}{4}\right)^2} \Rightarrow \sqrt[3]{\frac{T_3}{4}} \le \sqrt{\frac{T_2}{6}}$$

Bài 35: Cho $a,b,c,d \ge 0$ thỏa 2(ab+ac+ad+bc+bd+cd)+abc+abd+acd+bcd=16 .CMR: $a+b+c+d \ge \frac{2}{3}(ab+ac+ad+bc+bd+cd)$ (Thi QG năm 1996)

HD:Đặt F(x) , T_i (i=1,2,3,4) như bài 34 ta có $F^{/}(x)$ có 3 nghiệm không âm x_1,x_2,x_3 .Theo định lí Viet ta có : $x_1 + x_2 + x_3 = \frac{3T_1}{4}$, $x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = \frac{T_2}{2}$, $x_1x_2x_3 = \frac{T_3}{4}$

Từ giả thiết ta có $2T_2+T_3=16$ suy ra $x_1 x_2+ x_2 x_3+ x_3 x_1+ x_1 x_2 x_3 = 4$ (1)

Ta lại có $T_1 \ge \frac{2}{3}T_2 \Leftrightarrow x_1 + x_2 + x_3 \ge x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1$ (*)

D0 (1) nên trong 3 số x_1 ,x_2 ,x_3 có nhiều nhất một số bằng 0 ,giả sử $x_1,x_2 >0$ từ (1) suy ra

$$x_3 = \frac{4 - x_1x_2}{x_1 + x_2 + x_1x_2}$$

Từ (*) ta có

$$(*) \Leftrightarrow x_1 + x_2 + \frac{4 - x_1x_2}{x_1 + x_2 + x_1x_2} \ge 4 - x_1x_2 \frac{4 - x_1x_2}{x_1 + x_2 + x_1x_2} \Leftrightarrow$$

$(x_1 + x_2 - 2)^2 \ge x_1x_2(1 - x_1)(1 - x_2)$ (**)

Nếu $(1-x_1)(1-x_2) \le 0$ thì (**) đúng

Nếu $(1-x_1)(1-x_2) > 0$ thì từ $0 < (1-x_1)(1-x_2) \le \frac{1}{4}(2 - x - y)^2$ và $0 < xy \le 4$ suy ra (**) đúng.

Sau đây ta sẽ chứng minh bài tổng quát của bài 34

Bài 36: Cho $x_i > 0$ và $T_k = \sum_{1 \le i_1 < i_2 < ... < i_k \le n} x_{i_1}x_{i_2}...x_{i_k}$.

CMR: $\frac{T_1}{C_n^1} \geq \sqrt{\frac{T_2}{C_n^2}} \geq \sqrt[3]{\frac{T_3}{C_n^3}} \geq ... \geq \sqrt[n]{\frac{T_n}{C_n^n}}$

HD: Ta chứng minh bằng quy nạp

Với n=2 BĐT đúng

Giả sử BĐT đúng với n-1 và $0<x_1<x_2<\ldots<x_n$

Xét $P(x)=(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n) = x^n-T_1x^{n-1}+T_2x^{n-2}+\ldots+(-1)^nT_n$ có n nghiệm suy ra

$P'(x)= nx^{n-1}-(n-1)T_1x^{n-2}+(n-2)T_2x^{n-3}+\ldots+(-1)^{n-1}T_{n-1}$ có n-1 nghiệm $y_1,y_2,\ldots,y_{n-1}$ với $x_1<y_1<x_2<y_2<\ldots<x_{n-1}<y_{n-1}<x_n$ Khi đó $\frac{n-1}{n}T_1, \frac{n-2}{n}T_2,..., \frac{1}{n}T_{n-1}$ là các hàm cơ bản của $y_1,y_2,\ldots,y_{n-1}$ (theo định lí Viet)

Nên theo giả thiết quy nạp (cho $y_1,y_2,\ldots,y_n$)

$$\frac{n-1}{n}.\frac{T_1}{C_{n-1}^1} \geq \sqrt{\frac{n-2}{n}\frac{T_2}{C_{n-1}^2}} \geq \sqrt[3]{\frac{n-3}{n}\frac{T_3}{C_{n-1}^3}} \geq ... \geq \sqrt[n-1]{\frac{T_{n-1}}{nC_{n-1}^{n-1}}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{T_1}{C_n^1} \geq \sqrt{\frac{T_2}{C_n^2}} \geq ... \geq \sqrt[n-1]{\frac{T_{n-1}}{C_n^{n-1}}} \quad (do \ \ \frac{n}{n-k}C_{n-1}^k = C_n^k \ )$$

Cuối cùng $\sqrt[n-1]{\frac{T_{n-1}}{C_n^{n-1}}} \geq \sqrt[n]{\frac{T_n}{C_n^n}} \Leftrightarrow \frac{T_{n-1}}{n} \geq \sqrt[n]{(T_n)^{n-1}}$

Theo BĐT Côsi $\frac{1}{n}T_{n-1} = \frac{1}{n}(x_1x_2...x_n)(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+...+\frac{1}{x_n}) \geq \frac{x_1x_2...x_n}{\sqrt[n]{x_1x_2...x_n}} = \sqrt[n]{T_n^{n-1}}$ (đpcm)

Bài 37: Cho p là số nguyên tố và a,b,c,d là các số nguyên dương phân biệt sao cho $a^p + b^p = c^p + d^p$. CMR: $|a-c|+|b-d| \geq p$

*HD:*Theo định lí Fermat ta có : $a+b-c-d \equiv a^p + b^p - c^p - d^p (\bmod p) \Rightarrow a+b-c-d \,\vdots\, p$

i/ $a+b-c-d \neq 0 \Rightarrow |a+b-c-d| \geq p \Rightarrow |a-c|+|b-d| \geq |a+b-c-d| \geq p$

ii/ $a+b-c-d = 0 \Rightarrow a-c = d-b \Rightarrow \frac{a^p-c^p}{a-c} = \frac{b^p-d^p}{b-d}$

Ta có thể giả sử a < c < b < d

Áp dụng định lí Lagrange ta có $pt_1^{p-1} = pt_2^{p-1} \Rightarrow t_1 = t_2$ (vô lí vì $t_1 \in (a;c), t_2 \in (b;d)$)

II.2.3. Áp dụng định lí Lagrange, định lí Rolle để giải phương trình,hệ phương trình:

Bài 38: Giải phương trình $2^x+5^x = 3^x+4^x$ (1)

HD:x=0 là nghiệm phương trình .Xét f(t)=t^x liên tục trên [2;3] và [4;5] có đạo hàm trên (2;3) và (4;5).theo định lí Lagrange tồn tại $t_1 \in (2;3)$ và $t_2 \in (4;5)$ sao cho

$f(3)-f(2) = f^/(t_1)$; $f(5)-f(4) = f^/(t_2)$

suy ra $3^x - 2^x = xt_1^{x-1}; 5^x - 4^x = xt_2^{x-1}$.Từ (1) suy ra $3^x - 2^x = 5^x - 4^x \Rightarrow t_1^{x-1} = t_2^{x-1} \Rightarrow x = 1$(vì $t_1 \neq t_2$).Vậy phương trình có 2 nghiệm x=0;x=1

Bài 39:Giải phương trình $3^{x+2} = 26x+29$

HD: Rõ ràng PT có 2 nghiệm x = -1,x =2.Ta CM PT chỉ có 2 nghiệm

Xét hàm số f(x) = 3^{x+2} - 26x-29 với $x \in R$

Ta có $f^/(x) = 3^{x+2}\ln 3 - 26$, $f^/(x)=0 \Leftrightarrow 3^{x+2} = \dfrac{26}{\ln 3} \Leftrightarrow x = \log_3 \dfrac{26}{\ln 3} - 2$

Như vậy PT $f^/(x) = 0$ chỉ có một nghiệm nên PT f(x) = 0 không có quá 2 nghiệm.Vậy PT chỉ có 2 nghiệm là x = -1, x = 2.

Bài 40:Cho u,v > 0 .Giải hệ phương trình : $\begin{cases} x^2 + y^2 = u^2 + v^2 \\ x^3 + y^3 = u^3 + v^3 \end{cases}$

HD: (u,v) , (v,u) là nghiệm của hệ .Hệ tương đương với $\begin{cases} x^2 - u^2 = y^2 - v^2 \\ x^3 - u^3 = y^3 - v^3 \end{cases}$

Giả sử $x \geq u \geq v \geq y$ ($u \geq x \geq y \geq v$ xét tương tự)

Đặt X=x^2 , Y=y^2 , U=u^2 , V=v^2 ($X \geq U \geq V \geq Y$)

Hệ tương đương với $\begin{cases} X - U = Y - V \\ X^{\frac{3}{2}} - U^{\frac{3}{2}} = Y^{\frac{3}{2}} - V^{\frac{3}{2}} \end{cases}$

Gọi $f(t) = t^{\frac{3}{2}}$ liên tục trên [U;X] và [Y,V], có đạo hàm trên (U;X) và (Y,V) nên theo định lí Lagrange tồn tại $t_1 \in (U;X)$ và $t_2 \in (Y,V)$ sao cho

$\dfrac{f(X) - f(U)}{X - U} = f^/(t_1)$; $\dfrac{f(Y) - f(V)}{Y - V} = f^/(t_2) \Rightarrow \dfrac{3}{2}t_1^{\frac{1}{2}} = \dfrac{3}{2}t_2^{\frac{1}{2}} \Rightarrow t_1 = t_2$ (vô lí)

II.2.4. Áp dụng định lí Lagrange để giải bất phương trình :

Bài 41 :Giải bất phương trình $3^{x^2-4} + (x^2 - 4)3^{x-2} \geq 1$

HD: Đặt f(x) = 3^x ta có $f^/(x) = 3^x\ln 3$.BPT tương đương với

$f(x^2-4)-f(0)+(x^2-4)3^{x-2}\ge 0$

$\Leftrightarrow f^{/}(c)(x^2-4)+(x^2-4)3^{x-2}\ge 0$ (với c nằm giữa 0 và x^2-4)

$\Leftrightarrow (x^2-4)(3^c\ln 3+3^{x-2})\ge 0$

$\Leftrightarrow x^2-4\ge 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x\le -2 \\ x\ge 2 \end{array}\right.$

II.2.5. Áp dụng định lí Lagrange để tìm giới hạn dãy số:

Bài 42: Cho số thực a > 2 và $f_n(x) = a^{10}x^{n+10} + x^n + \ldots + x + 1$.

a) Chứng minh rằng với mỗi số nguyên dương n, phương trình $f_n(x) = a$ luôn có đúng một nghiệm dương duy nhất.

b) Gọi nghiệm đó là x_n, chứng minh rằng dãy (x_n) có giới hạn hữu hạn khi n dần đến vô cùng. Tìm lim x_n (HSG QG 2007)

Giải: Kết quả của câu a) là hiển nhiên vì hàm $f_n(x)$ tăng trên $(0, +\infty)$ và $0 < x_n < 1$. Ta sẽ chứng minh dãy x_n tăng, tức là $x_{n+1} > x_n$.

Ta có $f_{n+1}(x_n) = a^{10}x_n^{n+11} + x_n^{n+1} + x_n^{n} + \ldots + x_n + 1 = x_nf_n(x_n) + 1 = ax_n + 1$

Vì ta đã có $f_{n+1}(1) = a^{10} + n + 1 > a$ nên ta chỉ cần chứng minh $ax_n + 1 < a$ là sẽ suy ra $x_n < x_{n+1} < 1$(do $ax_n+1=f_{n+1}(x_n)<a<f_{n+1}(1)$). Ta cần chứng minh $x_n < (a-1)/a$. Thật vậy, nếu $x_n \ge (a-1)/a$ thì

$$f_n(x_n)\ge a^{10}\left(\frac{a-1}{a}\right)^{n+10}+\frac{1-\left(\frac{a-1}{a}\right)^{n+1}}{1-\frac{a-1}{a}}=(a-1)^{10}\left(\frac{a-1}{a}\right)^{n}+a-(a-1)\left(\frac{a-1}{a}\right)^{n}>a$$

(do a – 1 > 1). Vậy dãy số tăng (x_n) tăng và bị chặn bởi 1 nên hội tụ.

Ta CM:lim $x_n = (a-1)/a$. Thật vậy, đặt $c = (a-1)/a < 1$

Ta c ó $f_n(c)$= $(a-1)^{10}\left(\frac{a-1}{a}\right)^{n}+a-(a-1)\left(\frac{a-1}{a}\right)^{n}$ suy ra

$f_n(c) – f_n(x_n) = kc^n$ (với $k = (a-1)((a-1)^9 – 1) > 0$)

Theo định lý Lagrange thì

$f_n(c) – f_n(x_n) = f^{/}(\xi)(c – x_n)$ với ξ thuộc (x_n, c)

Nhưng $f^{/}(\xi) = (n+10)a^{10}\xi^{n+9} + n\xi^{n-1} + \ldots + 1 > 1$ nên từ đây suy ra

$kc^n > c - x_n$

Từ đó ta có $c - kc^n < x_n < c$ .Vậy $\lim x_n = c$.

Bài 43 : Cho n là một số nguyên dương. Chứng minh rằng phương trình $\frac{1}{x-1}+\frac{1}{4x-1}+...+\frac{1}{n^2x-1}=\frac{1}{2}$ có một nghiệm duy nhất $x_n > 1$. Chứng minh rằng khi n dần đến vô cùng, x_n dần đến 4. (HSG QG 2002)

Giải:

Đặt $f_n(x)=\frac{1}{x-1}+\frac{1}{4x-1}+...+\frac{1}{n^2x-1}-\frac{1}{2}$ Ta có $\lim\limits_{x\to 1^+} f_n(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x) = -\frac{1}{2}$ và f_n giảm trên $(1;+\infty)$ nên gọi x_n là nghiệm lớn hơn 1 duy nhất của phương trình $f_n(x) = 0$.

Ta có

$$f_n(4)=\frac{1}{4-1}+\frac{1}{16-1}+...+\frac{1}{4n^2-1}-\frac{1}{2}=\frac{1}{1.3}+\frac{1}{3.5}+...+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}-\frac{1}{2}$$
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+...+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}\right)-\frac{1}{2}=-\frac{1}{4n}$$

Áp dụng định lý Lagrange, ta có

$$\frac{1}{4n} = |f_n(x_n) - f(4)| = |f'(c)||x_n-4|$$

với c thuộc $(x_n, 4)$ (chú ý rằng $f_n(4) < 0$)

Nhưng do $|f_n'(c)|=\frac{1}{(c-1)^2}+\frac{4}{(4c-1)^2}+...>\frac{1}{9}$ (Vì $1 < c < 4$)

nên $|x_n - 4| < \frac{9}{4n}$ suy ra $\lim x_n = 4$.

Bài 44: Cho hàm số f liên tục trên [a;b] có đạo hàm trên (a;b) thỏa f(a) = f(b) =0 v à $f(x)\neq 0$,$\forall x\in(a;b)$. k là số thực cho trước ,CMR tồn tại dãy (x_n) với $x_n\in(a;b)$ sao cho

$$\lim\frac{f'(x_n)}{(\sqrt[n]{e}-1)f(x_n)}=k$$

*HD:*Xét hàm số $F_n(x)=e^{-\frac{kx}{n}}f(x), x\in[a;b], n\in N$ .F_n liên tục trên [a;b] có đạo hàm trên (a;b) và $F_n(a) = F_n(b)$ theo định lí Rolle tồn tại $x_n\in(a;b)$ sao cho $F_n'(x_n)=0$

Ta có

$$F_n^{/}(x_n) = -\frac{k}{n}e^{-\frac{kx_n}{n}}f(x_n) + e^{-\frac{kx_n}{n}}f^{/}(x_n) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{f^{/}(x_n)}{f(x_n)} = \frac{k}{n} \Rightarrow \lim \frac{f^{/}(x_n)}{\sqrt[n]{e}f(x_n)} = \lim \frac{k}{n(e^{\frac{1}{n}} - 1)} = k$$

Bài 45: Cho hàm số $f: R \to R$ có đạo hàm. Giả sử $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = a$ và $\lim\limits_{x\to+\infty} xf^{/}(x)$ tồn tại. Tìm giới hạn $\lim\limits_{x\to+\infty} xf^{/}(x)$.

HD: Giả sử n < N là hai số tự nhiên. Áp dụng định lí Lagrange cho hàm số g(x)=xf(x) trên [n;N], khi đó tồn tại $c_n \in (n;N)$ sao cho $g^{/}(c_n) = \frac{Nf(N) - nf(n)}{N - n}$.

Vì $\lim\limits_{N\to+\infty} \frac{Nf(N) - nf(n)}{N - n} = a$ nên với n đủ lớn $\left|g^{/}(c_n) - a\right| < \frac{1}{n}$. Ta lại có $\lim\limits_{n\to+\infty} c_n = +\infty$

$g^{/}(x) = f(x) + xf^{/}(x)$ có giới hạn hữu hạn nên $\lim\limits_{x\to+\infty} g^{/}(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} g^{/}(c_n) = a$.

Vậy $\lim\limits_{x\to+\infty} xf^{/}(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} g^{/}(x) - \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = a - a = 0$.

Bài 46: Tính giới hạn :

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n}\left[(1 + \frac{1}{n+1})^{n+1} - (1 + \frac{1}{n})^n\right]$$

HD: Xét hàm số $f(x) = (1 + \frac{1}{x})^x$ trên $(0;+\infty)$. Với $n \in N$, áp dụng định lí Lagrang cho hàm số f trên [n;n+1] thì tồn tại $c_n \in (n;n+1): f(n+1) - f(n) = f^{/}(c_n)$. Ta cần tính $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n}f^{/}(c_n)$. Mà $f^{/}(c_n) = (1 + \frac{1}{c_n})^{c_n}(\ln(\frac{1}{c_n} + 1) - \frac{1}{c_n + 1})$, vì $n < c_n < n + 1$ suy ra

$f^{/}(c_n) < (1 + \frac{1}{c_n})^{c_n}(\ln(\frac{1}{n} + 1) - \frac{1}{n+2})$. Do đó :

$0 \le \lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n}f^{/}(c_n) \le \lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n}(1 + \frac{1}{c_n})^{c_n}(\ln(\frac{1}{n} + 1) - \frac{1}{n+2}) = 0$ vì $\lim\limits_{n\to+\infty}(1 + \frac{1}{c_n})^{c_n} = e$ và

$\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{n}}{n+2}(\ln(\frac{1}{n} + 1)^{n+2} - 1) = 0$

Vậy $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt{n}\left[(1+\dfrac{1}{n+1})^{n+1}-(1+\dfrac{1}{n})^{n}\right]$=0.

Bài 47: Cho n là một số nguyên dương lớn hơn 1. Chứng minh rằng phương trình $x^n = x^2 + x + 1$ có một nghiệm dương duy nhất, ký hiệu là x_n. Hãy tìm số thực a sao cho giới hạn $\lim\limits_{n\to\infty} n^a(x_n - x_{n+1})$ tồn tại, hữu hạn và khác 0.

Giải. Đặt $P_n(x) = x^n - x^2 - x - 1$. $P_n(1)<0$, $P_n(2)=2^n-3>0$ và P_n tăng trên $(1;+\infty)$ nên P_n có nghiệm duy nhất $x_n \in (1;2)$

Ta có $P_{n+1}(x) = x^{n+1} - x^2 - x - 1 = x^{n+1} - x^n + P_n(x) = x^n(x-1) + P_n(x)$.

Từ đó $P_{n+1}(x_n) = x_n^n(x_n-1) + P_n(x_n) = (x_n^2+x_n+1)(x_n-1) = x_n^3 - 1$.

Ta có $P_{n+1}(1)<0$ và $P_{n+1}(x_n)>0$ nên $1< x_{n+1} < x_n$.Suy ra (x_n) hội tụ

Áp dụng định lý Lagrange, ta có

$$(x_n^2+x_n+1)(x_n - 1) = P_{n+1}(x_n) - P_{n+1}(x_{n+1}) = (x_n - x_{n+1})P_{n+1}'(c)$$

với c thuộc (x_{n+1}, x_n), $P_{n+1}'(x) = (n+1)x^n - 2x - 1$.

Ta có $x_{n+1}^{n+1} - x_{n+1}^2 - x_{n+1} - 1 = 0 \Rightarrow x_{n+1}^n = \dfrac{x_{n+1}^2 + x_{n+1} + 1}{x_{n+1}} = x_{n+1} + 1 + \dfrac{1}{x_{n+1}}$

Từ đó

$(n+1)(x_{n+1}+1+1/x_{n+1}) - 2x_{n+1} - 1 = P_{n+1}'(x_{n+1}) < P_{n+1}'(c)$

$< P_{n+1}'(x_n)= (n+1)(x_n^2+x_n+1) - 2x_n - 1$. (Do $P^{/}_{n+1}$ tăng)

Ta CM $\lim x_n = 1$

Giả sử $\lim x_n = a>1$ v ới n đ ủ l ớn ta c ó $x_n^n > a^n > 7$

$f_n(x_n) = 0 \Rightarrow x_n^n = x_n^2 + x_n + 1 < 7$ (vô lí).Vậy $\lim x_n = 1$, ta suy ra

$$\lim_{n\to\infty}\frac{P'_{n+1}(c)}{n} = 3$$

Tiếp tục ta CM $\lim n(x_n - 1) = \ln 3$.Ta có

$$x_n^n = x_n^2 + x_n + 1 \Rightarrow n\ln x_n = \ln(x_n^2 + x_n + 1) \Rightarrow n(x_n - 1) = \frac{\ln(x_n^2 + x_n + 1)}{\ln x_n}(x_n - 1)$$

Đặt $y_n = x_n - 1 \to 0$; $ny_n = \dfrac{y_n}{\ln(y_n + 1)}\ln(y_n^2 + 3y_n + 3) \to \ln 3$ .Vậy $\lim n(x_n - 1) = \ln 3$.

Từ đó suy ra

$$\lim_{n\to\infty} nP'_{n+1}(c)(x_n - x_{n+1}) = \lim_{n\to\infty} n(x_n^2 + x_n + 1)(x_n - 1) = 3\ln 3$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} n^a(x_n - x_{n+1}) = \lim_{n\to\infty} n^{a-2}.nP'_{n+1}(c)(x_n - x_{n+1}).\frac{n}{P'_{n+1}(c)} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} n^{a-2}.\lim_{n\to\infty} nP'_{n+1}(c)(x_n - x_{n+1}).\lim_{n\to\infty}\frac{n}{P'_{n+1}(c)}$$

Với a=2 thì $\lim\limits_{n\to\infty} n^a(x_n - x_{n+1}) = \ln 3$

Với a > 2 thì $\lim\limits_{n\to\infty} n^a(x_n - x_{n+1}) = +\infty$

Với a < 2 thì $\lim\limits_{n\to\infty} n^a(x_n - x_{n+1}) = 0$.Vậy a=2 là đáp số của bài toán.

Bài 48: (Đề dự bị VMO 2008) Cho số thực a và dãy số thực (x_n) xác định bởi:

$$x_1 = a \text{ và } x_{n+1} = \ln(3+\cos x_n + \sin x_n) - 2008 \text{ với mọi } n = 1, 2, 3, \ldots$$

Chứng minh rằng dãy số (x_n) có giới hạn hữu hạn khi n tiến đến dương vô cùng.
Giải. Đặt f(x) = ln(3+sinx+cosx) – 2008 thì

$$f'(x) = \frac{\cos x - \sin x}{3 + \sin x + \cos x}$$

Ta có: $|\cos x - \sin x| \le \sqrt{2}, \quad |\sin x + \cos x| \le \sqrt{2}$ ta suy ra

$$|f'(x)| \le \frac{\sqrt{2}}{3-\sqrt{2}} = q < 1.$$

Áp dụng định lý Lagrange cho x, y thuộc R, ta có

$$f(x) - f(y) = f'(z)(x-y)$$

Từ đó suy ra $|f(x) - f(y)| \le q|x - y|$ với mọi x, y thuộc R.
Áp dụng tính chất này với $m > n \ge N$, ta có

$$|x_m - x_n| = |f(x_{m-1}) - f(x_{n-1})| \le q|x_{m-1} - x_{n-1}| \le \ldots \le q^{n-1}|x_{m-n+1} - x_1| \le q^{N-1}|x_{m-n+1} - x_1|.$$

Do dãy (x_n) bị chặn và q < 1 nên với mọi ε > 0 tồn tại N đủ lớn để $q^{N-1}|x_{m-n+1} - x_1| < \varepsilon$. Như vậy dãy (x_n) thoả mãn điều kiện Cauchy do đó hội tụ.
NX : Tiêu chuẩn Cô-si: Dãy (x_n) có giới hạn hữu hạn khi và chỉ khi với mọi ε > 0, tồn tại số tự nhiên N sao cho với mọi m, n ≥ N ta có $|x_m - x_n| < \varepsilon$.