

Bài giảng PHƯƠNG PHÁP TRÁI HÌNH TRÊN MẶT PHẪNG

Người soạn : *Trần Thị Hiền*
Tổ toán trường *THPT Chuyên Hạ Long*

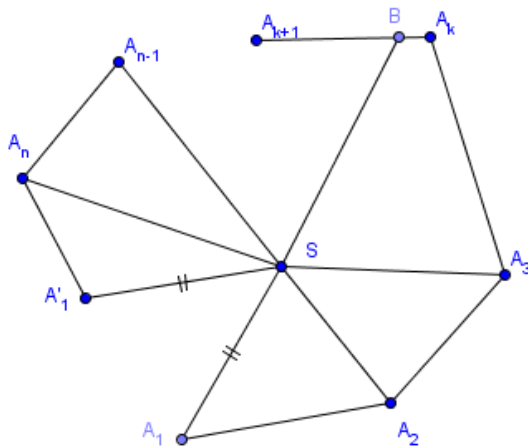
Khi giải một bài toán về tứ diện mà các dữ kiện của nó liên quan đến tổng các góc phẳng, hoặc tổng các cạnh...thì việc phẳng hoá tứ diện (tức là trải phẳng tứ diện đó lên một mặt phẳng) sao cho phù hợp sẽ cho ta một lời giải gọn gàng và dễ hiểu. Trong bài viết nhỏ này tôi xin trình bày một số bài toán áp dụng phương pháp này.

Các ví dụ

VD1.

CMR nếu tổng các góc phẳng tại đỉnh của một hình chóp lớn hơn 180° thì mỗi cạnh bên của nó nhỏ hơn nửa chu vi đáy.

Giải:



Giả sử hình chóp đã cho là $S.A_1A_2...A_n$. Ta cắt hình chóp theo các cạnh SA_i rồi trải các mặt bên như sau lên cùng một mặt phẳng chứa mặt SA_1A_2 . Như vậy, ta sẽ được đa giác $A_1A_2...A_nA_1'$ ($SA_1 = SA_1'$)

Do tổng các góc ở đỉnh lớn hơn 180° nên đỉnh S nằm trong đa giác, và A_1S kéo dài cắt một cạnh nào đó của đa giác ở B .

Gọi a là độ dài đường gấp khúc $A_1A_2...B$; b là độ dài đường gấp khúc $BA_{k+1}...A_1'$.

$\Rightarrow$ Chu vi đáy chính bằng $a + b$.

Mặt khác: $A_1S + SB < a$;

$$A_1'S < b + SB ;$$

$$\Rightarrow A_1S + A_1'S < a + b ;$$

$$\Rightarrow 2A_1S < a + b ;$$

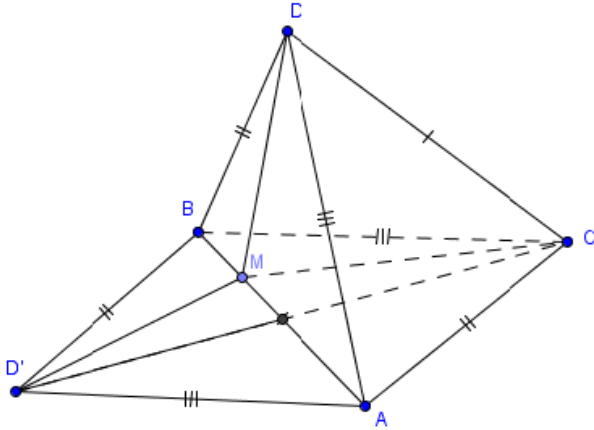
$$\Rightarrow A_1S < \frac{a+b}{2}.$$

Một cách tương tự ta suy ra mỗi cạnh bên của hình chóp đều nhỏ hơn một nửa chu vi đáy. (đpcm)

VD2.

Cho tứ diện gần đều $ABCD$ có $AB = CD = a$; $AC = BD$; $AD = BC$. Xác định vị trí của điểm M trên cạnh AB sao cho chu vi tam giác MCD nhỏ nhất. Xác định giá trị nhỏ nhất của chu vi đó.

Giải:



Trải tam giác DAB xuống mặt phẳng ABC thành tam giác $D'AB$ và giữ nguyên cạnh AB .

Khi đó ta có: $D'B = DB$; $D'A = DA$.

$$\Rightarrow D'M = DM;$$

Chu vi tam giác MDC là nhỏ nhất;

$$\Leftrightarrow MD + MC + DC \text{ là nhỏ nhất; nhưng do } DC \text{ không đổi}$$

$$\Leftrightarrow MD + MC \text{ là nhỏ nhất;}$$

$$\Leftrightarrow MD' + MC \text{ là nhỏ nhất. Áp dụng bất đẳng thức trong tam giác}$$

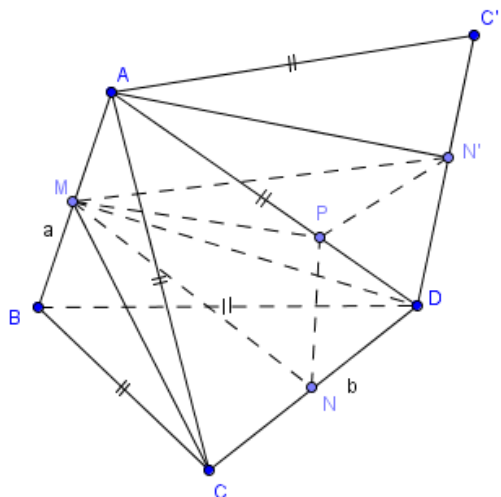
$$\Leftrightarrow D', M, C \text{ thẳng hàng}$$

$$\Rightarrow M \text{ là giao điểm của } D'C \text{ với } AB.$$

VD3:

Cho tứ diện $ABCD$ có: $AC = AD = BC = BD = 1$; $AB = a$; $CD = b$; M, N lần lượt là trung điểm của AB và CD . Tìm trên cạnh AD một điểm P sao cho $PM + PN$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính giá trị nhỏ nhất đó.

Giải:



Trải tam giác ACD theo trục AD lên mặt phẳng ABD :

$$C \rightarrow C'; \quad DC = DC' = b;$$

$$N \rightarrow N'; \quad PN = PN';$$

Yêu cầu bài toán sẽ tương đương với: Tìm $P \in AD$ sao cho $PM + PN'$ nhỏ nhất.

$\Rightarrow P$ là giao điểm của MN' và AD

Khi đó $(PM + PN')_{\min} = MN'$.

+ Tính MN' :

Dễ thấy:

Tam giác ABD cân ở D và M là trung điểm của $AB \Rightarrow DM \perp AB$;

Tam giác $AC'D$ cân ở D và N' là trung điểm của $AB \Rightarrow AN' \perp DC$;

$\Rightarrow$ Tứ giác $AMDN'$ nội tiếp có $AM = \frac{a}{2}$; $DN' = \frac{b}{2}$;

$$AN' = \sqrt{1 - \frac{b^2}{4}}; \quad MD = \sqrt{1 - \frac{a^2}{4}};$$

Áp dụng định lý Ptoleme ta có:

$$MN' = \frac{DN'.AM + DM.AN'}{1};$$

$$\Rightarrow MN' = \frac{b}{2} \cdot \sqrt{1 - \frac{b^2}{4}} + \frac{a}{2} \cdot \sqrt{1 - \frac{a^2}{4}};$$

$$\Rightarrow MN' = \frac{b\sqrt{4 - b^2} + a\sqrt{4 - a^2}}{4}.$$

Vậy điểm P cần tìm trên cạnh AD là giao điểm của MN' và AD . Khi đó tổng

$$(PM + PN)_{\min} = (PM + PN')_{\min} = \frac{b\sqrt{4 - b^2} + a\sqrt{4 - a^2}}{4}.$$

VD4:

Cho hình chóp $S.ABC$ có các góc phẳng ở đỉnh S đều bằng 4α ($0 < \alpha < \frac{\pi}{3}$), còn cạnh bên SA bằng 1. Chứng minh: $AB + BC + AC \geq \sqrt{2(1 - \cos 3\alpha)}$.

Gợi ý: Trải các mặt SBA & SAC lên mặt phẳng SBC , sau đó dùng định lý hàm số $\cos$.

VD5:

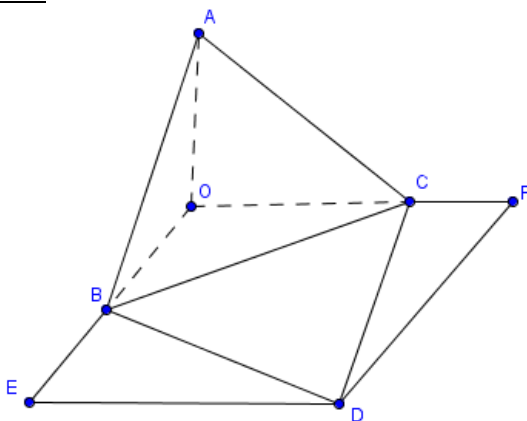
Cho góc tam diện vuông $Oxyz$; $A \in Ox$, $B \in Oy$; $C \in Oz$ sao cho $OA = OB + OC = 1$.

(1) a , Chứng minh rằng diện tích toàn phần của tứ diện $OABC$ không đổi khi B & C thay đổi nhưng vẫn thỏa mãn (1).

b , Tính $\widehat{OAB} + \widehat{OAC} + \widehat{BAC} = ?$

c , Tính $\widehat{OBA} + \widehat{ABC} + \widehat{OCB} = ?$

Giải:



a , Trải tứ diện $OABC$ xuống mặt phẳng OBC như sau:

$$\triangle OAB \rightarrow \triangle FDC;$$

$$\triangle OAC \rightarrow \triangle EDB;$$

$\Rightarrow$ Tứ giác $OEDF$ là hình vuông.

Vì $\triangle ABC = \triangle DCB$ (ccc)

$\Rightarrow$ dt tp của tứ diện $OABC$ = dt tp của hình vuông $OEDF$ = 1 không đổi. (đpcm)

b , $\widehat{OAB} + \widehat{OAC} + \widehat{BAC} = 90^\circ$;

c , $\widehat{OBA} + \widehat{ABC} + \widehat{OCB} = 90^\circ$;

VD6:

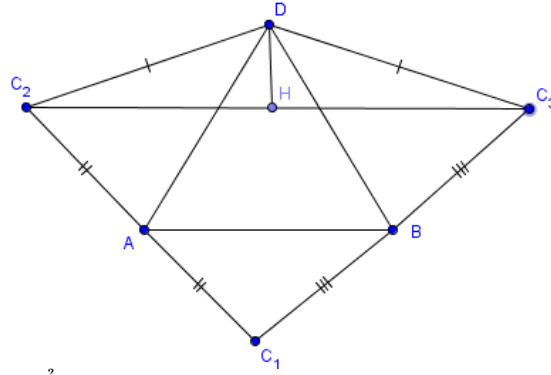
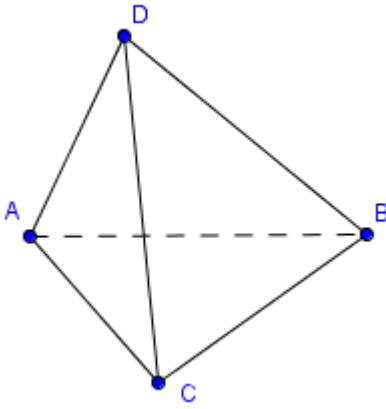
Cho tứ diện $ABCD$ thỏa mãn:

a , $\widehat{ACD} + \widehat{BCD} = 180^\circ$;

b , Tổng các góc phẳng ở đỉnh A bằng tổng các góc phẳng ở đỉnh B và bằng 180° .

Tính diện tích toàn phần của tứ diện theo $AC + CB = k$ & $\widehat{ACB} = \alpha$;

Giải:



Trải tứ diện $ABCD$ xuống mặt phẳng ABD như sau:

$$\triangle ACB \rightarrow \triangle AC_1B;$$

$$\triangle ACD \rightarrow \triangle AC_2B;$$

$$\triangle DCB \rightarrow \triangle DC_3B;$$

$$\Rightarrow \widehat{C_2} + \widehat{C_3} = 180^\circ;$$

Do tổng các góc ở đỉnh A = tổng các góc ở đỉnh B = 180°

$\Rightarrow C_2, A, C_1$ thẳng hàng và C_1, B, C_3 thẳng hàng.

Sau khi trải các mặt của tứ diện xuống mặt phẳng ABD , ta được tứ giác nội tiếp $C_1C_2DC_3$, và dt tp của tứ diện $ABCD = dt C_1C_2DC_3$.

Ta có: $dt C_1C_2DC_3 = dt \triangle C_2C_1C_3 + dt \triangle DC_2C_3$

$$= \frac{1}{2} \cdot 2x \cdot 2y \cdot \sin \alpha + \frac{1}{2} C_2C_3 \cdot DH = 2xy \cdot \sin \alpha + \frac{1}{4} C_2C_3^2 \cdot \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$$

$$= 2xy \cdot \sin \alpha + \frac{1}{4} (4x^2 + 4y^2 - 8xy \cdot \cos \alpha) \cdot \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = (x + y)^2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$$

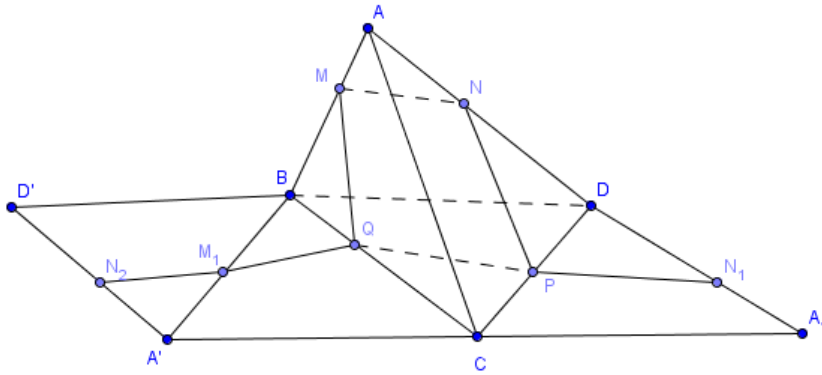
$$= k^2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}.$$

Các bài tập tương tự:

Bài 1.

Cho tứ diện đều $ABCD$ cạnh bằng a . Một mặt phẳng cắt 4 cạnh tứ diện tại M, N, P, Q . Chứng minh rằng chu vi p của thiết diện $MNPQ$ không nhỏ hơn $2a$ và không lớn hơn $3a$.

Giải:



*Chứng minh $p \geq 2a$

Không mất tính tổng quát, giả sử $M \in AB; N \in AD; P \in CD; Q \in BC$;

Trải tứ diện $ABCD$ xuống mặt phẳng BCD như sau:

$$\triangle ABC \rightarrow \triangle A'BC;$$

$$\triangle ACD \rightarrow \triangle A_1CD;$$

$$\triangle ABD \rightarrow \triangle A'BD';$$

Do $ABCD$ là tứ diện đều nên các tam giác trên đều là tam giác đều

$$\Rightarrow \widehat{DBC} = \widehat{CBA'} = \widehat{A'BD'} = 60^\circ.$$

$$\Rightarrow \widehat{DBD'} = \widehat{DBC} + \widehat{CBA'} + \widehat{A'BD'} = 3.60^\circ = 180^\circ.$$

$$\Rightarrow D, B, D' \text{ thẳng hàng.}$$

Tương tự: A', C, A_1 thẳng hàng.

$$\Rightarrow DD' = BD + BD' = 2a; A'A_1 = A'C + CA_1 = 2a;$$

Theo như cách trải thì: $A_1D = A'D' = a$;

Xét tứ giác $DA_1A'D'$ có $A'A_1 = D'D = 2a; A_1D = A'D' = a$

$$\Rightarrow DA_1A'D' \text{ là hình bình hành.}$$

Theo cách trải hình như trên:

$$\left. \begin{array}{l} M \rightarrow M_1 \\ N \rightarrow N_1; N \rightarrow N_2 \end{array} \right\} \Rightarrow MQ = M_1Q; PN = PN_1; MN = M_1N_2; DN_1 = D'N_2;$$

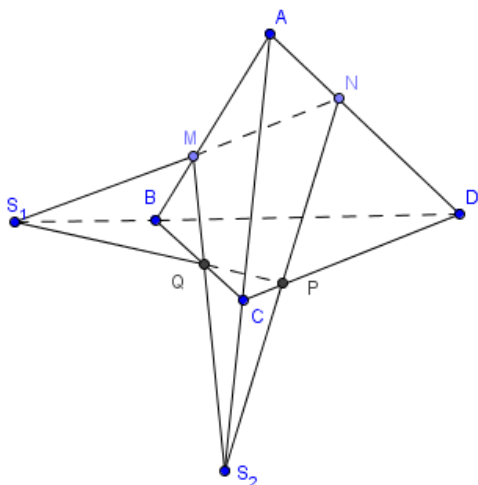
$$\Rightarrow N_1N_2 \parallel D'D; N_1N_2 = 2a;$$

Ta có:

$$p = MN + NP + PQ + QM = N_1P + PQ + QM_1 + M_1N_2 \geq N_1N_2 = 2a. (\text{đpcm})$$

$$\text{Dấu “=” xảy ra} \Leftrightarrow \begin{cases} MN \parallel BD \parallel PQ \\ MQ \parallel AC \parallel NP \end{cases}$$

*Chứng minh $p \leq 3a$



+ Nếu $MN \cap BD \equiv S_1$

$$\Rightarrow \begin{cases} S_1 \in MN \Rightarrow S_1 \in (MNPQ) \\ S_1 \in BD \Rightarrow S_1 \in (CBD) \end{cases}$$

Mà $(MNPQ) \neq (CBD)$

$\Rightarrow S_1$ nằm trên giao tuyến của $(MNPQ)$ và (CBD) ;

Mà PQ là giao tuyến của $(MNPQ)$ và (CBD)

$\Rightarrow S_1 \in PQ$;

Do $\widehat{ANM}$ là góc ngoài của tam giác S_1ND

$\Rightarrow \widehat{ANM} > \widehat{NDS_1}$;

Mà $\widehat{NDS_1} = 60^\circ = \widehat{DAB} \Rightarrow \widehat{ANM} > \widehat{NAM} \Rightarrow MN < AM$;

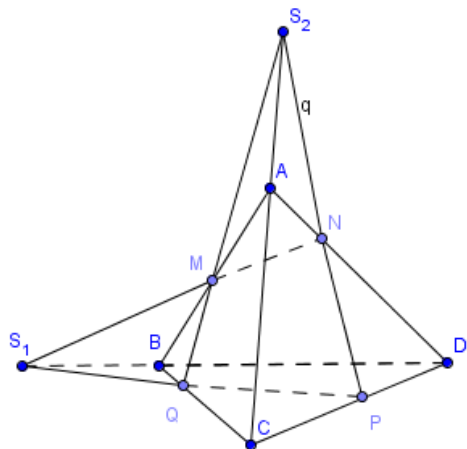
+ Nếu MQ cắt tia CA tại S_2 : Chứng minh tương tự ta có $MQ < MB$

$\Rightarrow MN + MQ < AM + MB = AB = a$;

Lại có: $PQ \leq BD = a$;

$NP \leq AC = a$;

$\Rightarrow MN + NP + PQ + QM \leq 3a$;



Nếu MQ cắt tia AC tại S_2 : Chứng minh tương tự ta có :

$$MQ \leq BQ$$

$$PQ \leq QC$$

$$\Rightarrow MQ + PQ \leq BC = a$$

$$MN \leq BD = a$$

$$NP \leq AC = a$$

$$\Rightarrow p \leq 3a;$$

$$\text{Nếu } MN \parallel BD \Rightarrow PQ \parallel BD$$

$$\Rightarrow \triangle MAN \text{ là tam giác đều } \Rightarrow MN = AM;$$

$$\text{Tương tự: } PQ = QC;$$

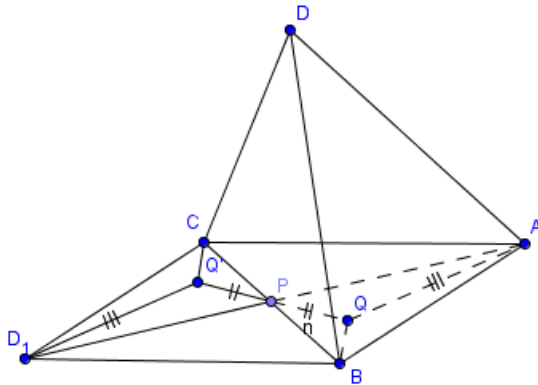
Chứng minh như trên ta suy ra $p \leq 3a$. (đpcm)

Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow MNPQ$ trùng với một mặt bên của tứ diện.

Bài 2.

Trên bề mặt của một tứ diện đều mà độ dài cạnh bằng 1, ta chọn một tập hợp hữu hạn các đoạn thẳng sao cho có thể nối hai đỉnh bất kì của tứ diện bằng một đường gấp khúc thuộc tập hợp các đoạn thẳng đó. Có thể chọn được hay không một tập hợp như vậy mà tổng độ dài tất cả các đoạn nhỏ hơn $1 + \sqrt{3}$?

Giải:



Trải mặt DBC xuống mặt phẳng ABC : $\triangle DBC \rightarrow \triangle D_1BC$.

Do tứ diện $ABCD$ là tứ diện đều cạnh a nên ABD_1C là hình thoi cạnh a ; $\hat{A} = 60^\circ$. Ta sẽ chỉ ra một tập hợp thỏa mãn điều kiện đề bài.

Thật vậy, gọi P là trung điểm của BC

$$\Rightarrow \triangle ABP \text{ vuông ở } P \text{ và } PB = \frac{1}{2}; AB = 1; AP = \frac{\sqrt{3}}{2};$$

$\Rightarrow \exists Q: \widehat{BQA} = \widehat{PQB} = \widehat{PQA} = 120^\circ$ (Thực ra Q chính là điểm Torixenri trong tam giác đều, do đó luôn tồn tại Q)

$$\text{Đặt } PQ = x; BQ = y; AQ = z;$$

Áp dụng định lý cosin:

$$x^2 + y^2 + xy = PB^2 = \frac{1}{4};$$

$$x^2 + z^2 + xz = PA^2 = \frac{3}{4};$$

$$z^2 + y^2 + zy = AB^2 = 1;$$

$$\Rightarrow 2(x^2 + y^2 + z^2) + xy + yz + xz = 2. \quad (1)$$

Lại có:

$$dt\Delta APB = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{8} = \frac{1}{2}xy \sin 120^\circ + \frac{1}{2}yz \sin 120^\circ + \frac{1}{2}xz \sin 120^\circ$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{8} = \frac{\sqrt{3}}{4}(xy + yz + xz) \Leftrightarrow xy + yz + xz = \frac{1}{2}; \quad (2)$$

$$\text{Cộng vế với vế của (1) và (2) ta có: } x^2 + y^2 + z^2 + xy + yz + xz = \frac{3}{4} \quad (3)$$

$$\text{Cộng vế với vế của (2) và (3) ta được: } (x + y + z)^2 = \frac{7}{4} \Rightarrow x + y + z = \frac{\sqrt{7}}{2}.$$

Gọi Q' là điểm đối xứng của Q qua P (Trong (ABD_1C))

$$\Rightarrow CQ' = BQ = y; D_1Q' = AQ = z; PQ' = PQ = x;$$

$\Rightarrow$ Tập hợp các đường gấp khúc thỏa mãn đề bài ở đây ta chọn là: $\{AQ; BQ; PQ; PQ'; Q'C; DQ'\}$ (hay D_1Q').

$$\text{Rõ ràng } AQ + BQ + PQ + PQ' + Q'C + DQ' = \sqrt{7} < 1 + \sqrt{3}$$

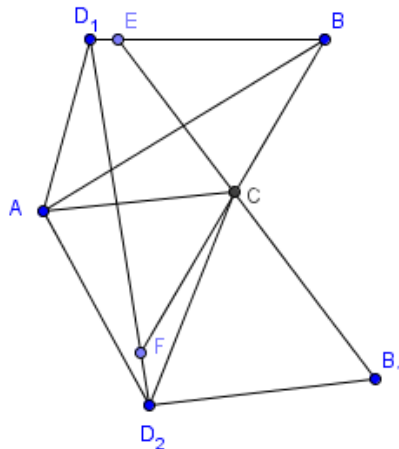
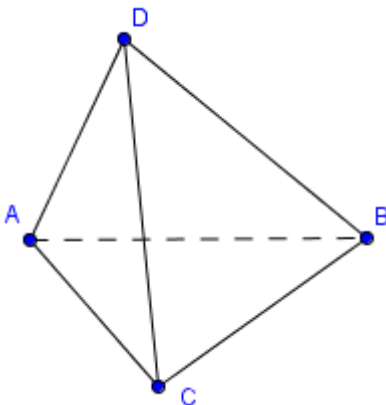
Và hai đỉnh bất kì của tứ diện đều được nối bởi một đường gấp khúc thuộc tập hợp các đoạn thẳng đó.

Như vậy ta có thể chọn được một tập hợp các đoạn thẳng thỏa mãn đề bài với cách chọn như trên.

Bài 3.

Giả sử $S_A; S_B; S_C$ là tổng các góc phẳng tại các đỉnh $A; B; C; D$ của tứ diện $ABCD$. Chứng minh rằng: Nếu $S_A = S_B; S_C = S_D$ thì $\Delta ABC = \Delta BAD$ và $\Delta ACD = \Delta BDC$.

Giải:



Ta có: $S_A + S_B + S_C + S_D = 4.180^\circ$

$$\Rightarrow S_A + S_C = 360^\circ \quad (S_A = S_B; S_C = S_D)$$

Trải tứ diện lên mặt phẳng ABC như sau:

$$\triangle ABD \rightarrow \triangle ABD_1 \Rightarrow \triangle ABD = \triangle ABD_1;$$

$$\triangle ACD \rightarrow \triangle ACD_2 \Rightarrow \triangle ACD = \triangle ACD_2;$$

$$\triangle BCD \rightarrow \triangle B_1CD_2 \Rightarrow \triangle BCD = \triangle B_1CD_2;$$

+ Nếu $S_A = S_C = 180^\circ$

$\Rightarrow$ Tứ diện $ABCD$ là tứ diện gần đều

$$\Rightarrow \begin{cases} \triangle ABC = \triangle BAD \\ \triangle ACD = \triangle BDC \end{cases}$$

+ Nếu $S_A \neq S_C$. Không mất tính tổng quát giả sử $S_A < 180^\circ$. Ta có:

$$S_A = \widehat{D_1AD_2} = 360^\circ - \widehat{BCB_1}(\text{lớn}) = \widehat{BCB_1}(\text{nhỏ}) = S_B;$$

Kéo dài B_1C cắt BD_1 tại E .

$$\text{Ta có: } \widehat{BCB_1}(\text{nhỏ}) = \widehat{CBE} + \widehat{CEB} = S_B = \widehat{CB_1D_2} + \widehat{CBE};$$

$$\Rightarrow \widehat{CEB} = \widehat{CB_1D_2} \Rightarrow BD_1 \parallel B_1D_2$$

Mà $BD_1 = B_1D_2$

$$\Rightarrow BB_1D_2D_1 \text{ là hình bình hành} \Rightarrow BB_1 \parallel D_1D_2; BB_1 = D_1D_2$$

Xét hai tam giác D_1AD_2 và BCB_1 :

$$\triangle D_1AD_2 \text{ cân tại } A; \triangle BCB_1 \text{ cân tại } C;$$

$$\widehat{D_1AD_2} = \widehat{BCB_1}; BB_1 = D_1D_2;$$

$$\Rightarrow \triangle D_1AD_2 = \triangle BCB_1 \Rightarrow AD_1 = BC \Rightarrow AD = BC$$

Kéo dài BC cắt D_1D_2 tại F .

Ta có:

$$\text{Do } \triangle D_1AD_2 = \triangle BCB_1 \Rightarrow \widehat{CBB_1} = \widehat{AD_1D_2} = \widehat{AD_1F};$$

$$BB_1 \parallel D_1D_2 \Rightarrow \widehat{CFD_1} = \widehat{CBB_1};$$

$$\Rightarrow \widehat{CFD_1} = \widehat{CBB_1} = \widehat{AD_1F} \Rightarrow AD_1 \parallel BC$$

Mà $AD_1 = BC \Rightarrow AD_1BC$ là hình bình hành $\Rightarrow BD_1 = AC \Rightarrow BD = AC$;

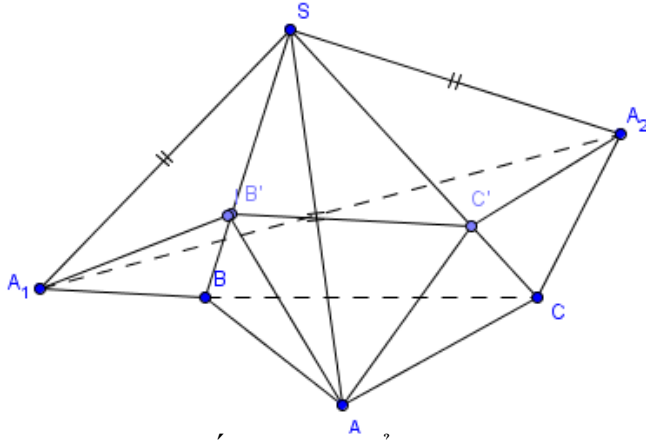
Xét hai tam giác $\triangle ABC$ và $\triangle BAD$, ta có: AB chung; $BD = AC$; $AD = BC$
 $\Rightarrow \triangle ABC = \triangle BAD$ (ccc)

Chứng minh tương tự: $\triangle ACD = \triangle BDC$ (đpcm).

Bài 4.

Cho hình chóp đều $S.ABC$ có $\widehat{ASB} = 30^\circ$; $AB = a$. Lấy B', C' lần lượt thuộc cạnh SB, SC . Xác định vị trí của B', C' sao cho chu vi $\triangle AB'C'$ là nhỏ nhất. Tính giá trị nhỏ nhất đó.

Giải:



Trải tứ diện xuống mặt phẳng SBC như sau:

$$\triangle ABS \rightarrow \triangle A_1BS;$$

$$\triangle ACS \rightarrow \triangle A_2CS;$$

Khi đó, với các điểm: $B' \in SB$

$$C' \in SC$$

$$\text{Thì: } P_{AB'C'} = AB' + B'C' + C'A = A_1B' + B'C' + C'A_2 \geq A_1A_2;$$

Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow B', C' \in A_1A_2$;

Do A_1, A_2 cố định $\Rightarrow A_1A_2$ cố định

SB, SC cố định $\Rightarrow$ Ta luôn xác định được B', C' thỏa mãn chu vi $\triangle AB'C'$ là nhỏ nhất. Khi đó, ta có:

$$\widehat{A_1SA_2} = \widehat{A_1SB} + \widehat{BSC} + \widehat{CSA_2} = 3.30^\circ = 90^\circ;$$

$$\Rightarrow A_1A_2 = \sqrt{2}.SA_1 = \sqrt{2}.SA_2 = \sqrt{2}.SA$$

Xét $\triangle SAB$ có $AB = a$; $\widehat{ASB} = 30^\circ$

$$\Rightarrow \widehat{SBA} = 75^\circ \quad (\text{Vì } \triangle SAB \text{ cân tại } S)$$

$$SA = \frac{AB}{\sin 30^\circ} \cdot \sin 75^\circ = \frac{a}{\sin 30^\circ} \cdot \cos 15^\circ = \frac{a}{2\sin 15^\circ}$$

$$\text{Vì } \sin^2 15^\circ = \frac{1 - \cos 30^\circ}{2} = \frac{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{2 - \sqrt{3}}{4};$$

$$\text{Do } 0^\circ < 15^\circ < 90^\circ \Rightarrow \sin 15^\circ > 0 \Rightarrow \sin 15^\circ = \sqrt{\frac{2 - \sqrt{3}}{4}}$$

$$\Rightarrow SA = \frac{a}{2 \frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2}} = \frac{a}{\sqrt{2 - \sqrt{3}}} \Rightarrow A_1A_2 = \sqrt{2} \cdot \frac{a}{\sqrt{2 - \sqrt{3}}} = \frac{2a}{\sqrt{3} - 1};$$

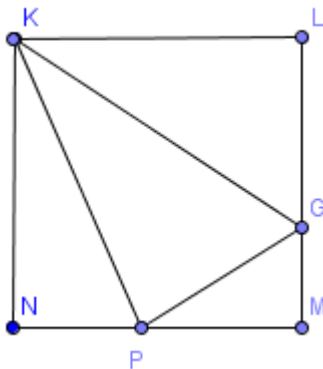
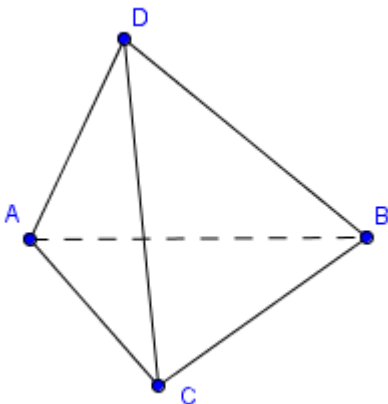
Vậy, giá trị nhỏ nhất của chu vi $\triangle AB'C'$ là $\frac{2a}{\sqrt{3} - 1}$ tại B', C' là giao điểm của SB, SC với

A_1A_2 .

Bài 5.

Cho tứ diện $ABCD$ có các góc ở đỉnh A bằng 90° và $AB = AC + AD$. Tính tổng các góc phẳng ở đỉnh B .

Giải:



Dựng $KLMN$ là hình vuông cạnh $AB \Rightarrow \widehat{LMN} = 90^\circ$.

Trên LM lấy P sao cho:

$$MP = AD \Rightarrow LP = ML - MP = AB - AD = AC$$

Trên MN lấy Q sao cho:

$$MQ = AC \Rightarrow NQ = MN - MQ = AB - AC = AD$$

Xét hai tam giác ACD và MQP :

$$\widehat{PMQ} = \widehat{LMN} = \widehat{CAD} = 90^\circ$$

$$MP = AD; MQ = AC;$$

$$\Rightarrow \triangle ACD = \triangle MQP \text{ (cgc)} \Rightarrow DC = PQ;$$

Chứng minh tương tự: $\triangle KLP = \triangle BAC$; $\triangle KNQ = \triangle BAD$

$$\Rightarrow KP = BC; KQ = BD; \widehat{ABC} = \widehat{LKP}; \widehat{ABD} = \widehat{NKQ};$$

Xét hai tam giác BCD và KPQ : $DC = PQ$; $KP = BC$; $KQ = BD$;

$$\Rightarrow \triangle BCD = \triangle KPQ \text{ (ccc)}; \Rightarrow \widehat{DBC} = \widehat{QKP};$$

Như vậy, ta có:

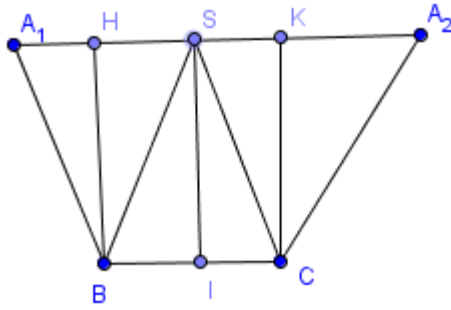
$$S_B = \widehat{ABD} + \widehat{ABC} + \widehat{CBD} = \widehat{NKQ} + \widehat{QKP} + \widehat{LKP} = \widehat{LKN} = 90^\circ$$

Tổng các góc phẳng ở đỉnh B là $1v$.

Bài 6.

Cho tứ diện $SABC$ có các mặt SAB, SBC, SCA tương đương và tổng các góc phẳng ở đỉnh S bằng 180° . Chứng minh rằng $SABC$ là tứ diện gần đều.

Giải:



Trải tứ diện lên mặt phẳng SBC như sau:

$$\Delta SBC \rightarrow \Delta SBC;$$

$$\Delta SAB \rightarrow \Delta SA_1B;$$

$$\Delta SAC \rightarrow \Delta SA_2C;$$

Do tổng các góc phẳng tại đỉnh S bằng 180° nên

$$\widehat{A_1SB} + \widehat{BSC} + \widehat{CSA_2} = \widehat{A_1SA_2} = 180^\circ$$

$\Rightarrow A_1, S, A_2$ thẳng hàng.

Hạ SI, BH, CK lần lượt vuông góc với BC, SA_1, SA_2 .

Do A_1, S, A_2 thẳng hàng nên BH, CK đều vuông góc với A_1A_2

$\Rightarrow BH \parallel CK$; (1)

Theo đề bài: $dtSAB = dtSAC = dtSBC$

$$\Rightarrow dtSA_1B = dtSA_2C = dtSBC$$

$$\Rightarrow \frac{BH \cdot A_1S}{2} = \frac{CK \cdot A_2S}{2} = \frac{BC \cdot SI}{2}$$

$$\Rightarrow BH \cdot A_1S = CK \cdot A_2S = BC \cdot SI; (*)$$

Mà $SA_1 = SA_2 = SA$

$\Rightarrow BH = CK$; (2)

Xét tứ giác $BHCK$: Từ (1) và (2) $\Rightarrow BHCK$ là hình chữ nhật

$\Rightarrow BC \parallel HK$ hay $BC \parallel SA_1, BC \parallel SA_2$;

Ta có $BC \parallel SA_2$, mà $SI \perp BC, CK \perp SA_2$

$\Rightarrow SI = CK \Rightarrow BC = SA_2 = SA$; (Kết hợp với *)

Xét tứ giác SA_2CB : $BC \parallel SA_2, BC = SA_2$

$\Rightarrow SA_2CB$ là hình bình hành $\Rightarrow SB = A_2C = AC$

Chứng minh tương tự: $SC = A_1B = AB$

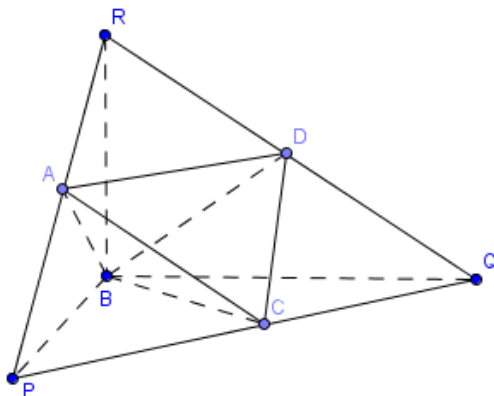
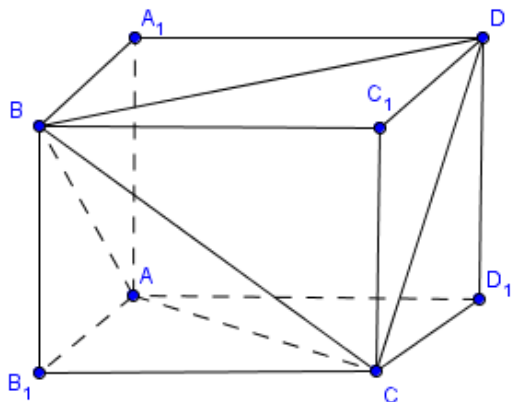
Xét tứ diện $SABC$: $SA = BC, SC = AB, SB = AC$;

$\Rightarrow SABC$ là tứ diện gần đều. (đpcm)

Bài7.

Cho tứ diện $ABCD$ có các cạnh $AD = BC = a; AC = BD = b; AB = CD = c$. Tính thể tích tứ diện theo a, b, c .

Giải:



Trải tứ diện lên mặt phẳng DAC như sau:

$$\triangle BAD \rightarrow \triangle RAD;$$

$$\triangle BCD \rightarrow \triangle QCD;$$

$$\triangle BAC \rightarrow \triangle PAC;$$

Dễ thấy $\widehat{RDQ} = \widehat{QCP} = \widehat{RAP} = 180^\circ$

$$\text{Và } V_{ABCD} = \frac{1}{4} V_{BPQR};$$

Xét tứ diện $BPQR$ có:

$$\triangle PBQ : BC = CP = CQ$$

$$\Rightarrow \widehat{PBQ} = 90^\circ;$$

$$\triangle RBQ : \text{Tương tự: } \widehat{RBQ} = 90^\circ;$$

$$\triangle RBP : \text{Tương tự: } \widehat{RBP} = 90^\circ;$$

$\Rightarrow$ Tứ diện $BPQR$ có góc B là góc tam diện vuông.

$$\Rightarrow V_{BPQR} = \frac{1}{6} \cdot BR \cdot BQ \cdot BP;$$

Đặt: $BR = x, BP = y, BQ = z;$

$$\text{Ta có: } \begin{cases} x^2 + z^2 = (2b)^2 = 4b^2; \\ x^2 + y^2 = (2c)^2 = 4c^2; \\ y^2 + z^2 = (2a)^2 = 4a^2; \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \sqrt{2(b^2 + c^2 - a^2)} \\ y = \sqrt{2(c^2 + a^2 - b^2)}; \\ z = \sqrt{2(b^2 + a^2 - c^2)} \end{cases}$$

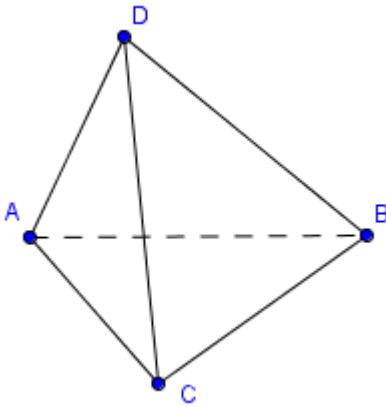
Vậy thể tích tứ diện là:

$$\begin{aligned} V_{ABCD} &= \frac{1}{4} V_{BPQR} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{6} \cdot xyz \\ &= \frac{1}{3} \sqrt{\frac{(b^2 + c^2 - a^2)(c^2 + a^2 - b^2)(b^2 + a^2 - c^2)}{2}} \end{aligned}$$

Bài 8.

Cho tứ diện $ABCD$, biết rằng tổng các góc phẳng ở mỗi đỉnh đều bằng nhau. Chứng minh rằng bán kính đường tròn nội tiếp của các mặt của tứ diện đều bằng nhau.

Giải:



Gọi: S_A là tổng các góc phẳng tại đỉnh A ;

S_B là tổng các góc phẳng tại đỉnh B ;

S_C là tổng các góc phẳng tại đỉnh C ;

S_D là tổng các góc phẳng tại đỉnh D ;

Ta có: $S_A + S_B + S_C + S_D = 4 \cdot 180^\circ$;

Mà $S_A = S_B = S_C = S_D \Rightarrow S_A = S_B = S_C = S_D = 180^\circ$;

$\Rightarrow ABCD$ là tứ diện gần đều.

$\Rightarrow \triangle ABC = \triangle DCB = \triangle CDA = \triangle BAD$;

$\Rightarrow$ Bán kính đường tròn nội tiếp của các mặt tứ diện đều bằng nhau. (đpcm).

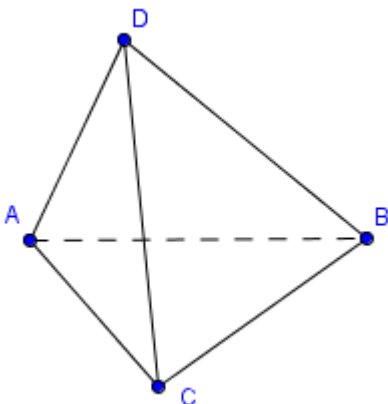
Bài 9.

Cho tứ diện $ABCD$ có tất cả các mặt đều là các tam giác nhọn. Lấy các điểm tùy ý X, Y, Z, T tương ứng nằm bên trong các đoạn AB, BC, CD, AD .

a, Giả sử $\widehat{DAB} + \widehat{BCD} \neq \widehat{CDA} + \widehat{ABC}$. Chứng minh rằng không thể có một đường gấp khúc $XYZTX$ nào có chiều dài cực tiểu.

b, Giả sử $\widehat{DAB} + \widehat{BCD} = \widehat{CDA} + \widehat{ABC}$. Khi đó hãy chứng minh rằng có vô số đường gấp khúc khép kín $XYZTX$ có chiều dài bé nhất là $2AC \sin k$, trong đó $2k = \widehat{BAC} + \widehat{CAD} + \widehat{DAB}$.

Giải:



Trải tứ diện lên 1 mặt phẳng (α) như sau:

$$\triangle ABC \rightarrow \triangle ABC;$$

$$\triangle BCD \rightarrow \triangle BCD;$$

$$\triangle CDA \rightarrow \triangle CDA';$$

$$\triangle DAB \rightarrow \triangle DA'B';$$

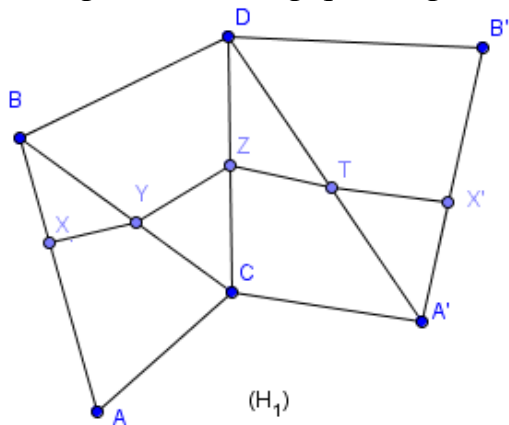
$$\Rightarrow AB = A'B' \text{ và } BX = B'X';$$

Khi đó đường gấp khúc khép kín $XYZTX$ trở thành đường gấp khúc $XYZTX'$ nằm trong lục giác $ABDB'A'C$.

Rõ ràng $XYZTX'$ ngắn nhất khi các điểm X, Y, Z, T, X' thẳng hàng.

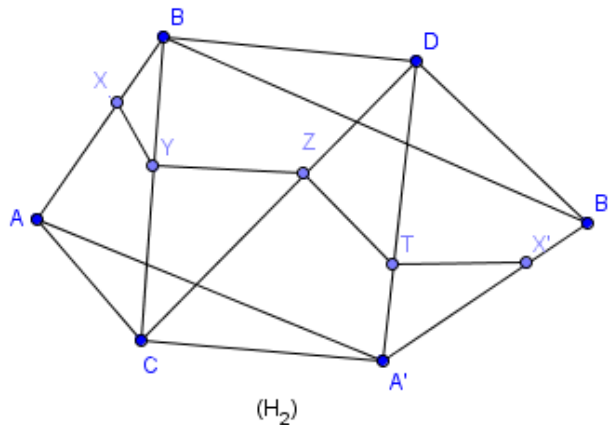
Trường hợp 1: $AB \parallel A'B' \Leftrightarrow AA' \neq BB'$.

Không mất tính tổng quát ta giả sử $AA' < BB'$



Nếu $\widehat{ACA'}$ nằm trong lục giác lớn hơn 180° (hình vẽ 1)

$\Rightarrow$ Độ dài đường gấp khúc $XYZTX'$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow Y \equiv Z \equiv C$ - Trái giả thuyết các điểm X, Y, Z, T tương ứng nằm bên trong các đoạn AB, BC, CD, AD . $\Rightarrow$ Không có gtnn.



Nếu $\widehat{ACA'}$ nằm trong lục giác nhỏ hơn 180° (hình vẽ 2)

$\Rightarrow$ Độ dài đường gấp khúc $XYZTX'$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow X' \equiv A' \& X \equiv A$ - Trái giả thiết $\Rightarrow$ Không có min

$\Rightarrow AA' \neq BB'$.

Không có min có nghĩa là muốn có min của đường gấp khúc $\Leftrightarrow AB \parallel A'B'$

$$\Leftrightarrow \widehat{B'A'A} + \widehat{A'AB} = 180^\circ \Leftrightarrow \widehat{B'A'C} + \widehat{A'CA} + \widehat{CAB} = 2.180^\circ$$

$$\Leftrightarrow \widehat{B'A'D} + (\widehat{DA'C} + \widehat{A'CD}) + \widehat{DCB} + (\widehat{BCA} + \widehat{CAB}) = 2.180^\circ$$

$$\Leftrightarrow \widehat{B'A'D} + 180^\circ - \widehat{A'DC} + \widehat{DCB} + 180^\circ - \widehat{CBA} = 2.180^\circ$$

$$\Leftrightarrow \widehat{B'A'D} + \widehat{DCB} = \widehat{A'DC} + \widehat{CBA}$$

$$\Leftrightarrow \widehat{BAD} + \widehat{DCB} = \widehat{CBA} + \widehat{ADC}$$

Khi đó độ dài đường gấp khúc đạt min là $XX' = AA'$ (Do $XX' \parallel BB' \parallel AA'$; $XX' = BB' = AA'$;))

Áp dụng định lý hàm số $\cos$ vào tam giác cân ACA' ta có:

$$AA' = XX' = \sqrt{2AC^2 - 2AC \cdot \sin \widehat{A'CA}}$$

$$= 2AC \cdot \sin k \text{ trong đó } 2k = \widehat{BAC} + \widehat{CAD} + \widehat{DAB}. \text{ (đpcm).}$$

Bài 10

Cho tứ diện có 4 mặt tương đương .

Chứng minh rằng :Tứ diện này là tứ diện gần đều.

Lời giải bài toán quen thuộc này xin dành cho bạn đọc