Đề thi thử số 1

Ngày 10 tháng 11 năm 2011

Câu I (2 điểm) Cho hàm số $(I): y = \dfrac{2x}{x+2}$

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số (I),
2. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (I), biết rằng khoảng cách từ tâm đối xứng của đồ thị (I) đến tiếp tuyến là lớn nhất.

Câu II (2 điểm)

1. Giải phương trình $sinxsin2x + sin3x = 6cos^3x$.
2. Giải phương trình $\sqrt{4-x^2} + \sqrt{1+4x} + \sqrt{x^2+y^2-2y-3} = \sqrt{x^4-16} - y + 5$ $(x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R})$.

Câu III (1 điểm) Tính tích phân

$$I = \int_0^3 \frac{|x^2 - x|}{x^2+3} dx.$$

Câu IV (1 điểm) Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A. Gọi khoảng cách giữa AA' và mặt phẳng $(BCC'B')$ là a, khoảng cách từ điểm C đến mặt phẳng (ABC') là $2a$, góc giữa hai mặt phẳng (ABC') và (ABC) bằng φ. Tính thể tích khối lăng trụ đã cho theo a và φ.

Câu V (1 điểm) Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn: $9(a^4+b^4+c^4) - 25(a^2+b^2+c^2) + 48 = 0$. Tìm giá trị nhỏ nhất (GTNN) của biểu thức:

$$P = \frac{a^2}{b+2c} + \frac{b^2}{c+2a} + \frac{c^2}{a+2b}$$

Câu VI.a (2 điểm)

1. Trong mặt phẳng tọa độ $0xy$ cho hai điểm $A(5;0)$ và $B(1;2)$. Hãy tìm đường thẳng (d) sao cho khoảng cách từ A đến (d) bằng 3 và khoảng cách từ B đến (d) bằng 1.
2. Cho mặt cầu $(C): (x-1)^2 + (y+1)^2 + z^2 = 11$ và hai đường thẳng
$$(d_1): \frac{x}{1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-1}{2};\ (d_2): \frac{x+1}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{1}$$
Viết phương trình các mặt phẳng tiếp xúc với (C) đồng thời song song với (d_1) và (d_2).

Câu VI.b (1 điểm) Tính tổng gồm $2n$ số hạng :

$$S = \frac{1}{2}C_{2n}^1 - \frac{1}{3}C_{2n}^2 + \cdots + (-1)^k \frac{1}{k} C_{2n}^{k-1} + \ldots.. + (-1)^{2n+1} \frac{1}{2n+1} C_{2n}^{2n},$$

trong đó C_n^k là các hệ số của sự khai triển nhị thức Newton.

Đáp án đề thi thử số 1

Ngày 28 tháng 11 năm 2011

Câu I (2 điểm) Cho hàm số $(I): y = \dfrac{2x}{x+2}$

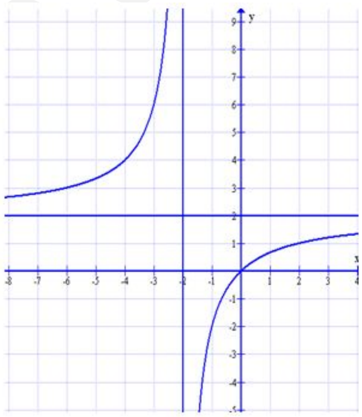
1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số (I).

Lời giải :

- Tập xác định : $\mathbb{R} \neq \{-2\}$
- Sự biến thiên :
  - Chiều biến thiên :
    - $y' = \dfrac{4}{(x+2)^2} > 0,\ \forall x \neq -2.$
    - Hàm số đồng biến trên từng khoảng $(-\infty; -2), (-2; +\infty)$.
  - Cực trị : hàm số không có cực trị.
  - Giới hạn: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} y = 2;\ \lim\limits_{x\to(-2)^+} y = -\infty;\ \lim\limits_{x\to(-2)^-} y = +\infty$. Đồ thị có tiệm cận đứng là $x = -2$, tiệm cận ngang là $y = 2$.
  - Bảng biến thiên :

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
y'		+	‖	+	
y	2	$\nearrow$	$+\infty$ ‖ $-\infty$	$\nearrow$	2

- Đồ thị đi qua $O(0;0)$ và có tâm đối xứng là $I(-2;2)$



$\square$

2. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (I), biết rằng khoảng cách từ tâm đối xứng của đồ thị (I) đến tiếp tuyến là lớn nhất.

   Lời giải : Tâm đối xứng $I(-2;2)$.
   Tiếp tuyến Δ của đồ thị (I) tại điểm có hoành độ $x_0 \neq -2$ có phương trình dạng :

$$y = \frac{4(x-x_0)}{(x_0+2)^2} + \frac{2x_0}{x_0+2}$$

   Hay $4x - (x_0+2)^2 y + 2x_0^2 = 0$

   Ta có :

$$\begin{aligned} d_{(I;\Delta)} &= \frac{|-8 - 2(x_0+2)^2 + 2x_0^2|}{\sqrt{16 + (x_0+2)^4}} \\ &= \frac{|8x_0 + 16|}{\sqrt{16 + (x_0+2)^4}} \\ &= \frac{8}{\sqrt{\dfrac{16}{(x_0+2)^2} + (x_0+2)^2}} \end{aligned}$$

   Áp dụng bất đẳng thức Cô-si cho hai số dương $\dfrac{16}{(x_0+2)^2}$ và $(x_0+2)^2$:

$$d_{(I;\Delta)} \leq 2\sqrt{2}$$

   Vậy $\max d_{(I;\Delta)} = 2\sqrt{2}$ khi $\left[\begin{array}{l} x_0 = 0 \\ x_0 = -4 \end{array}\right.$

   Do đó 2 tiếp tuyến cần tìm là $y = x$ và $y = x + 8$. □

Câu II.1 (1 điểm) Giải phương trình: $\sin x \sin 2x + \sin 3x = 6\cos^3 x$

Lời giải : Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} &\sin x\,(2\sin x\cos x) + 3\sin x - 4\sin^3 x = 6\cos^3 x \\ \Leftrightarrow &4\sin^3 x - 3\sin x - 2\sin^2 x\cos x + 6\cos^3 x = 0 \quad (\star) \end{aligned}$$

Nếu $\cos x = 0$ là nghiệm của $(\star)$ thì:

$$\begin{cases} \cos x = 0 \\ 4\sin^3 x - 3\sin x = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} \sin x = 1 \\ \sin x = -1 \end{array}\right. \qquad \text{(vô lí)} \\ 4\sin^3 x - 3\sin x = 0 \end{cases}$$

Vậy $\cos x \neq 0$. Ta chia hai vế của $(\star)$ cho $\cos^3 x$ ta được :

$$\begin{aligned}(\star) &\Leftrightarrow \tan^3 x - 2\tan^2 x - 3\tan x + 6 = 0\\ &\Leftrightarrow \left(\tan^2 x - 3\right)(\tan x - 2) = 0\\ &\Leftrightarrow \left[\begin{array}{c}\tan x = 2 = \tan\alpha\\ \tan x = \pm\sqrt{3} = \pm\tan\dfrac{\pi}{3}\end{array}\right.\\ &\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = \alpha + k\pi\\ x = \pm\dfrac{\pi}{3} + k\pi\end{array}\right. \quad (k \in \mathbb{Z})\end{aligned}$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm là $x = \left\{\alpha + k\pi,\ \pm\dfrac{\pi}{3} + k\pi\right\},\ \tan\alpha = 2, k \in \mathbb{Z}$. □

Câu II.2 (1 điểm) Giải phương trình

$$\sqrt{4 - x^2} + \sqrt{1 + 4x} + \sqrt{x^2 + y^2 - 2y - 3} = \sqrt{x^4 - 16} - y + 5 \ (x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R})$$

Lời giải : Điều kiện xác định của phương trình

$$\begin{aligned}&\begin{cases}4 - x^2 \geq 0\\ 1 + 4x \geq 0\\ x^2 + y^2 - 2y - 3 \geq 0\\ x^4 - 16 \geq 0\end{cases}\\ \Leftrightarrow &\begin{cases}|x| \leq 2\\ x \geq -\dfrac{1}{4}\\ x^2 + y^2 - 2y - 3 \geq 0\\ |x| \geq 2\end{cases}\\ \Leftrightarrow &\begin{cases}x = 2\\ (y-1)^2 \geq 0\end{cases}\end{aligned}$$

Vậy $x = 2$. Với $x = 2$ phương trình trở thành :

$$\begin{aligned}&\sqrt{(y-1)^2} = 2 - y\\ \Leftrightarrow\ &|y - 1| = 2 - y\\ \Leftrightarrow\ &y = \frac{3}{2}\end{aligned}$$

Kết luận : phương trình có một cặp nghiệm (x, y) duy nhất là $\left(2, \dfrac{3}{2}\right)$. □

Câu III (1 điểm) Tính tích phân

$$I = \int_0^3 \frac{|x^2 - x|}{x^2 + 3} dx.$$

Lời giải :

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \frac{|x^2-x|}{x^2+3}dx + \int_1^3 \frac{|x^2-x|}{x^2+3}dx \\ &= -\int_0^1 \frac{x^2-x}{x^2+3}dx + \int_1^3 \frac{x^2-x}{x^2+3}dx \end{aligned}$$

Xét

$$\begin{aligned} I_1 &= -\int_0^1 \frac{x^2-x}{x^2+3}dx \\ &= -\int_0^1 \left(1 - \frac{x}{x^2+3} - \frac{3}{x^2+3}\right)dx \\ &= -\int_0^1 dx + \int_0^1 \frac{x}{x^2+3}dx + \int_0^1 \frac{3}{x^2+3}dx \\ &= -\int_0^1 dx + \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{d(x^2+3)}{x^2+3} + \int_0^1 \frac{3}{x^2+3}dx \\ &= -1 + \frac{1}{2}\ln\frac{4}{3} + \int_0^1 \frac{3}{x^2+3}dx \end{aligned}$$

Đặt $x = \sqrt{3}\tan t$, thế thì $dx = \dfrac{\sqrt{3}}{\cos^2 t}dt$

Do đó :

$$\begin{aligned} I_1 &= -1 + \frac{1}{2}\ln\frac{4}{3} + \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{3}{3\tan^2 t + 3}.\frac{\sqrt{3}}{\cos^2 t}dt \\ &= -1 + \frac{1}{2}\ln\frac{4}{3} + \sqrt{3}\int_0^{\frac{\pi}{6}} dt \\ &= -1 + \frac{1}{2}\ln\frac{4}{3} + \sqrt{3}.\frac{\pi}{6} \end{aligned}$$

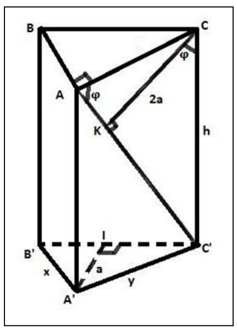
Hoàn toàn tương tự ta tính được :

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_1^3 \frac{x^2-x}{x^2+3}dx \\ &= 2 - \frac{1}{2}\ln 3 - \sqrt{3}\frac{\pi}{6} \end{aligned}$$

Kết luận : $I = I_1 + I_2 = 1 + \ln\dfrac{2}{3}$.

□

Câu IV (1 điểm) Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A. Gọi khoảng cách giữa AA' và mặt phẳng $(BCC'B')$ là a, khoảng cách từ điểm C đến mặt phẳng (ABC') là $2a$, góc giữa hai mặt phẳng (ABC') và (ABC) bằng φ. Tính thể tích khối lăng trụ đã cho theo a và φ.



Lời giải :

Dựng $A'I \perp B'C'$.
Ta lại có $CC' \perp (A'B'C')$ nên $CC' \perp A'I$.
Do đó $A'I \perp (B'C'CB)$ hay $A'I = a$.

Dựng $CK \perp AC'$
Ta lại có $(BAC') \perp (CAA'C')$ và $(BAC') \bigcap (CAA'C') = AC'$
Do đó $CK \perp (BAC')$ hay $CK = 2a$

Mặt khác $(\widehat{ABC', ABC}) = \widehat{CAC'} = \varphi$

Đặt $A'B' = x$, $A'C' = y$ và $CC' = h$. Ta sẽ tính x, y, h theo a và φ.
Xét các tam giác ACK và CKC' ta có :

$$y = \frac{2a}{\sin\varphi}$$
$$h = \frac{2a}{\cos\varphi}$$

Tam giác $A'B'C'$ vuông tại A', do đó :

$$\frac{1}{a^2} = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2}$$
$$\Leftrightarrow x = \frac{2a}{\sqrt{4 - \sin^2\varphi}}$$

Thể tích hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$: $V = \frac{1}{2}xyh = \dfrac{4a^3}{\sin\varphi\cos\varphi\sqrt{4 - \sin^2\varphi}}$ □

Câu V(1 điểm) Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn: $9(a^4 + b^4 + c^4) - 25(a^2 + b^2 + c^2) + 48 = 0$. Tìm giá trị nhỏ nhất (GTNN) của biểu thức:

$$P = \frac{a^2}{b + 2c} + \frac{b^2}{c + 2a} + \frac{c^2}{a + 2b}$$

Lời giải : Áp dụng bất đẳng thức AM - GM ta có:

$$\frac{a^2}{b + 2c} + \frac{a^2(b + 2c)}{9} \geq 2\sqrt{\frac{a^2}{b + 2c}.\frac{a^2(b + 2c)}{9}} = \frac{2a^2}{3}$$

Tương tự:

$$\frac{b^2}{c + 2a} + \frac{b^2(c + 2a)}{9} \geq \frac{2b^2}{3}\ ;\quad \frac{c^2}{a + 2b} + \frac{c^2(a + 2b)}{9} \geq \frac{2c^2}{3}$$

Suy ra:

$$P \geq \frac{2}{3}\left(a^2 + b^2 + c^2\right) - \frac{1}{9}\left(a^2(b + 2c) + b^2(c + 2a) + c^2(a + 2b)\right) \qquad (1)$$

Lại áp dụng bất đẳng thức AM - GM, ta có:

$$a^2c + b^2a + c^2b \leq \frac{a^3 + a^3 + c^3}{3} + \frac{b^3 + b^3 + a^3}{3} + \frac{c^3 + c^3 + b^3}{3} = a^3 + b^3 + c^3 \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra:

$$P \geq \frac{2}{3}\left(a^2+b^2+c^2\right) - \frac{1}{9}\left(a+b+c\right)\left(a^2+b^2+c^2\right)$$
$$\Leftrightarrow P \geq \frac{2}{3}\left(a^2+b^2+c^2\right) - \frac{1}{9}\left(a^2+b^2+c^2\right)\sqrt{3\left(a^2+b^2+c^2\right)}$$

Đặt $t = \sqrt{3\left(a^2+b^2+c^2\right)}$. Từ giả thiết ta có:

$$25\left(a^2+b^2+c^2\right) - 48 = 9\left(a^4+b^4+c^4\right) \geq 3\left(a^2+b^2+c^2\right)^2$$
$$\Leftrightarrow 3\left(a^2+b^2+c^2\right)^2 - 25\left(a^2+b^2+c^2\right) + 48 \leq 0$$
$$\Leftrightarrow 3 \leqslant a^2+b^2+c^2 \leqslant \frac{16}{3}$$

Do đó $P \geq \frac{2}{9}t^2 - \frac{1}{27}t^3 = f\left(t\right)$ với $t \in [3;4]$. Mặt khác $\min\limits_{t\in[3;4]} f\left(t\right) = f\left(3\right) = 1$. Suy ra $P \geqslant 1$.

Vậy GTNN của P là 1, đạt được khi và chỉ khi $a = b = c = 1$. □

Câu VI.a (2 điểm)

1. Trong mặt phẳng tọa độ $0xy$ cho hai điểm $A(5;0)$ và $B(1;2)$. Hãy tìm đường thẳng (d) sao cho khoảng cách từ A đến (d) bằng 3 và khoảng cách từ B đến (d) bằng 1.

   Lời giải :

   - Trường hợp 1 $(d) : x = a$
     Theo đề bài ta có :

     $$\begin{cases} |5-a| = 3 \\ |1-a| = 1 \end{cases} \Leftrightarrow a = 2$$

   - Trường hợp 2 $(d) : y = ax + b$

Theo đề bài ta có :

$$\begin{cases} |5a+b| = 3\sqrt{a^2+1} \\ |a-2+b| = \sqrt{a^2+1} \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} |5a+b| = |3a+3b-6| \\ |a-2+b| = \sqrt{a^2+1} \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 2a+6 = 2b \\ |a-2+b| = \sqrt{a^2+1} \end{cases} \\ \begin{cases} 8a-6 = -4b \\ |a-2+b| = \sqrt{a^2+1} \end{cases} \end{array} \right.$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a+3 = b \\ |2a+1| = \sqrt{a^2+1} \end{cases} \\ \begin{cases} -2a+\dfrac{3}{2} = b \\ \left|a+\dfrac{1}{2}\right| = \sqrt{a^2+1} \end{cases} \end{array} \right.$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a+3 = b \\ 3a^2+4a = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} -2a+\dfrac{3}{2} = b \\ \left|a+\dfrac{1}{2}\right| = \sqrt{a^2+1} \end{cases} \end{array} \right.$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a = 0 \\ b = 3 \end{cases} \\ \begin{cases} a = -\dfrac{4}{3} \\ b = \dfrac{5}{3} \end{cases} \\ \begin{cases} a = \dfrac{3}{4} \\ b = 0 \end{cases} \end{array} \right.$$

Vậy có 4 đường thẳng thỏa mãn yêu cầu bài toán :

$$(d_1) : x = 2$$
$$(d_2) : y = 3$$
$$(d_3) : y = -\frac{4}{3}x + \frac{5}{3}$$
$$(d_4) : y = \frac{3}{4}x$$

□

2. Cho mặt cầu $(C) : (x-1)^2 + (y+1)^2 + z^2 = 11$ và hai đường thẳng

$$(d_1) : \frac{x}{1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-1}{2};\ (d_2) : \frac{x+1}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{1}$$

Viết phương trình các mặt phẳng tiếp xúc với (C) đồng thời song song với (d_1) và (d_2).

Lời giải : (d_1) qua $M_1(0;-1;1)$ có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{S_1} = \{1;1;2\}$

(d_2) qua $M_2(-1;0;0)$ có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{S_2} = \{1;2;1\}$

Mặt phẳng song song với (d_1) và (d_2) phải có vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{n} = \overrightarrow{S_1} \wedge \overrightarrow{S_2} = \{-3;1;1\}$ và mặt phẳng có dạng : $-3x+y+z+D=0$ (P).

Mặt khác để mặt phẳng (P) tiếp xúc với mặt cầu (C) thì khoảng cách từ tâm $I(1;-1;0)$ đến (P) phải bằng $\sqrt{11}$:

$$\left|\frac{-3-1+D}{\sqrt{11}}\right| = \sqrt{11} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} D=15 \\ D=-7 \end{array}\right.$$

Vậy có 2 mặt phẳng thỏa mãn yêu cầu bài toán :

$$(P_1) : -3x+y+z+15=0$$
$$(P_2) : -3x+y+z-7=0$$

□

Câu VI.b (1 điểm) Tính tổng gồm $2n$ số hạng :

$$S = \frac{1}{2}C_{2n}^1 - \frac{1}{3}C_{2n}^2 + \cdots + (-1)^k\frac{1}{k}C_{2n}^{k-1} + ... + (-1)^{2n+1}\frac{1}{2n+1}C_{2n}^{2n},$$

trong đó C_n^k là các hệ số của sự khai triển nhị thức Newton.

Lời giải : Nhận xét rằng với mọi $k = 2,3,...,2n+1$ ta có

$$\begin{aligned}\frac{1}{k}C_{2n}^{k-1} &= \frac{1}{k}.\frac{(2n)!}{(k-1)!(2n-k+1)!} \\ &= \frac{1}{2n+1}.\frac{(2n+1)!}{k!(2n+1-k)!} \\ &= \frac{C_{2n+1}^k}{2n+1}\end{aligned}$$

Do đó:

$$\begin{aligned}S &= \sum_{k=2}^{2n+1}(-1)^k.\frac{C_{2n+1}^k}{2n+1} \\ &= \frac{1}{2n+1}\left(\sum_{k=0}^{2n+1}(-1)^kC_{2n+1}^k - C_{2n+1}^0 + C_{2n+1}^1\right) \\ &= \frac{1}{2n+1}\left((1-1)^{2n+1} - 1 + 2n + 1\right) \\ &= \frac{2n}{2n+1}\end{aligned}$$

□

Đề thi thử số 2

Ngày 10 tháng 12 năm 2011

PHẦN CHUNG CHO TẤT CẢ CÁC THÍ SINH*(7,0 điểm)*

Câu I*(2,0 điểm)* Cho hàm số $y = -x^3 - 3x^2 + 4$ (1)

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số (1),
2. Với giá trị nào của m thì đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của hàm số (1) tiếp xúc với đường tròn $(C) : (x-m)^2 + (y-m-1)^2 = 5$.

Câu II*(2,0 điểm)*

1. Giải phương trình: $2\cos^2\left(\dfrac{\pi}{2}\cos^2 x\right) = 1 + \cos(\pi \sin 2x)$,
2. Giải phương trình: $\sqrt{2x+4} - 2\sqrt{2-x} = \dfrac{12x-8}{\sqrt{9x^2+16}}$.

Câu III*(1,0 điểm)* Tính tích phân

$$\int_0^\pi \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx$$

Câu IV*(1,0 điểm)*
Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành $ABCD$ với tâm O. Gọi p, q, u, v lần lượt là các khoảng cách từ O đến các mặt phẳng (SAB),(SBC),(SCD),(SDA). Chứng minh rằng nếu mặt phẳng (SAC) vuông góc với mặt phẳng (SBD) thì

$$\frac{1}{p^2} + \frac{1}{u^2} = \frac{1}{q^2} + \frac{1}{v^2}$$

.

Câu V*(1,0 điểm)* Cho $x, y, z \in [1; 3]$. Chứng minh rằng :

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x} + \frac{y}{x} + \frac{x}{z} + \frac{z}{y} \le \frac{26}{3}$$

PHẦN RIÊNG*(3,0 điểm)*
Thí sinh chỉ được làm một trong hai phần (phần A hoặc B)
A. Theo chương trình Chuẩn
Câu VI.a*(2,0 điểm)*

1. Trong mặt phẳng với hệ toạ độ Oxy cho tam giác ABC vuông tại A, phương trình đường thẳng chứa cạnh BC là $\sqrt{3}x - y - \sqrt{3} = 0$, hai điểm A và B thuộc trục hoành. Biết bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC bằng 2, tìm toạ độ trọng tâm G của tam giác ABC.

2. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho mặt phẳng (α) có phương trình $2x - y + z + 1 = 0$ và hai điểm $M(3; 1; 0)$, $N(-9; 4; 9)$. Tìm điểm I trên mặt phẳng (α) sao cho $|IM - IN|$ đạt giá trị lớn nhất.

Đáp án đề thi thử số 2

Ngày 29 tháng 12 năm 2011

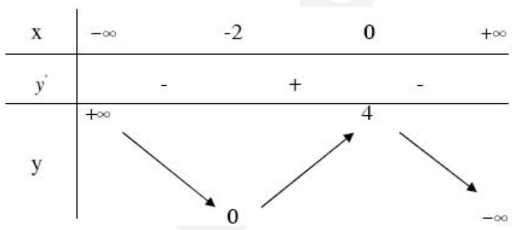
PHẦN CHUNG CHO TẤT CẢ CÁC THÍ SINH *(7,0 điểm)*

Câu I (2 điểm) Cho hàm số $y = -x^3 - 3x^2 + 4$ (1)

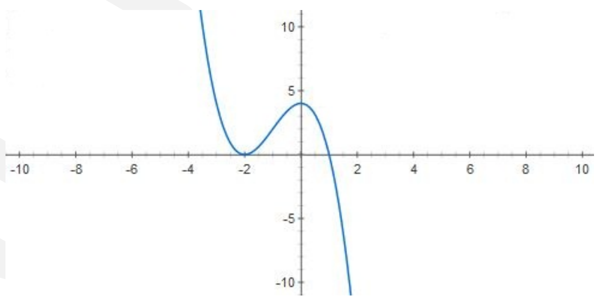
1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số (1).

   Lời giải :

   - Tập xác định : $\mathbb{R}$
   - Sự biến thiên :
     - Chiều biến thiên :
       * $y' = -3x^2 - 6x$
       * Hàm số nghịch biến trên từng khoảng $(-\infty; -2), (0; +\infty)$.
       * Hàm số đồng biến trên $(-2; 0)$.
     - Cực trị : $y' = 0 \Leftrightarrow x = 0$ hoặc $x = -2$. Hàm số đạt cực tiểu tại $(-2; 0)$ và đạt cực đại tại $(0; 4)$.
     - Giới hạn: $\lim\limits_{x \to \pm\infty} y = \mp\infty$. Đồ thị hàm số không có tiệm cận.
     - Bảng biến thiên :



   - Đồ thị hàm số :



□

2. Với giá trị nào của m thì đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của hàm số (1) tiếp xúc với đường tròn $(C) : (x-m)^2 + (y-m-1)^2 = 5$.

Lời giải :

- Hai cực trị của hàm số là $A(-2:0), B(0;4)$ nên đường thẳng (D) đi qua hai cực trị là: $2x - y + 4 = 0$
- Tâm và bán kính đường tròn (C): $I(m; m+1), R = \sqrt{5}$
- Để đường thẳng (D) tiếp xúc với (C) thì ta phải có: $d(I, D) = R$

$$\begin{aligned}
&\frac{|2m - m - 1 + 4|}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}\\
&\Leftrightarrow |m+3| = 5\\
&\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 2 \\ m = -8 \end{array}\right.
\end{aligned}$$

□

Câu II.1 (1 điểm) Giải phương trình: $2\cos^2\left(\frac{\pi}{2}\cos^2 x\right) = 1 + \cos(\pi \sin 2x)$

Lời giải : Phương trình đã cho tương đương

$$\begin{aligned}
&2\cos^2\left(\frac{\pi}{2}\cos^2 x\right) - 1 = \cos(\pi \sin 2x)\\
&\Leftrightarrow \cos\left(\pi \cos^2 x\right) = \cos(\pi \sin 2x)\\
&\Leftrightarrow \cos^2 x = \pm \sin 2x + 2k,\ (k \in \mathbb{Z})\\
&\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos 2x - 2\sin 2x = 4k - 1 \\ \cos 2x + 2\sin 2x = 4k - 1 \end{array}\right.
\end{aligned}$$

Phương trình có nghiệm khi

$$\begin{aligned}
&1^2 + 2^2 \geq 16k^2 - 8k + 1\\
&\Leftrightarrow 4k^2 - 2k - 1 \leq 0\\
&\Leftrightarrow \frac{1-\sqrt{5}}{4} \leq k \leq \frac{1+\sqrt{5}}{4}
\end{aligned}$$

Vì $k \in \mathbb{Z}$ nên $k = 0$. Do đó ta có

$$\begin{aligned}
&\left[\begin{array}{l} \cos 2x - 2\sin 2x = -1 \\ \cos 2x + 2\sin 2x = -1 \end{array}\right. \\
\Leftrightarrow &\left[\begin{array}{l} 2\cos^2 x - 4\sin x\cos x = 0 \\ 2\cos^2 x + 4\sin x\cos x = 0 \end{array}\right. \\
\Leftrightarrow &\left[\begin{array}{l} \cos x = 0 \\ \cos x \pm 2\sin x = 0 \end{array}\right. \\
\Leftrightarrow &\left[\begin{array}{l} \cos x = 0 \\ tgx = \pm\dfrac{1}{2} \end{array}\right. \\
\Leftrightarrow &\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{2} + n\pi \\ x = \pm arctg\left(\dfrac{1}{2}\right) + m\pi \end{array}\right. \quad (m, n \in \mathbb{Z})
\end{aligned}$$

Vậy phương trình đã cho có các họ nghiệm là $x = \left\{\dfrac{\pi}{2} + n\pi, \pm arctg\left(\dfrac{1}{2}\right) + m\pi\right\},\ (m, n \in \mathbb{Z})$ □

Câu II.2 (1 điểm) Giải phương trình: $\sqrt{2x+4} - 2\sqrt{2-x} = \dfrac{12x-8}{\sqrt{9x^2+16}}$

Lời giải : Điều kiện : $x \in [-2; 2]$ $(\star)$

Vì $12x - 8 = 2\left[2x + 4 - 4(2-x)\right] = 2\left[\left(\sqrt{2x+4}\right)^2 - \left(2\sqrt{2-x}\right)^2\right]$ nên phương trình đã cho tương đương với

$$\left(\sqrt{2x+4} - 2\sqrt{2-x}\right)\left(2\sqrt{2x+4} + 4\sqrt{2-x} - \sqrt{9x^2+16}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} \sqrt{2x+4} - 2\sqrt{2-x} = 0 & (1) \\ 2\sqrt{2x+4} + 4\sqrt{2-x} - \sqrt{9x^2+16} = 0 & (2) \end{array}\right.$$

Ta có : (1) $\Leftrightarrow 2x + 4 = 8 - 4x \Leftrightarrow x = \dfrac{2}{3}$, thỏa mãn $(\star)$.

Lại có :

$$\begin{aligned}
(2) &\Leftrightarrow 48 - 8x + 16\sqrt{8 - 2x^2} = 9x^2 + 16 \\
&\Leftrightarrow 4\left(8 - 2x^2\right) + 16\sqrt{8 - 2x^2} - x^2 - 8x = 0
\end{aligned}$$

Đặt $t = 2\sqrt{8 - 2x^2}, t \geq 0$, ta được:

$$t^2 + 8t - x^2 - 8x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = x \\ t = -x - 8 \end{array}\right.$$

- $t = x \Leftrightarrow 2\sqrt{8 - 2x^2} = x \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 0 \leq x \leq 2 \\ 32 - 8x^2 = x^2 \end{array}\right. \Leftrightarrow x = \dfrac{4\sqrt{2}}{3}$.

- $t = -x - 8 \Leftrightarrow 2\sqrt{8 - 2x^2} + x + 8 = 0$, phương trình này vô nghiệm do $(\star)$.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm là $x = \left\{\dfrac{2}{3}, \dfrac{4\sqrt{2}}{3}\right\}$ □

Câu III (1 điểm) Tính tích phân

$$\int_0^{\pi} \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx$$

Lời giải : Đặt $x = \pi - t$, khi đó

- $dx = -dt;\ \sin x = \sin t;\ \cos^2 x = \cos^2 t.$
- $x = 0 \Rightarrow t = \pi;\ x = \pi \Rightarrow t = 0.$

Ta có:

$$I = \int_0^{\pi} \frac{(\pi - t)\sin t}{1+\cos^2 t}dt = \pi\int_0^{\pi} \frac{\sin t}{1+\cos^2 t}dt - \int_0^{\pi} \frac{t\sin t}{1+\cos^2 t}dt = \pi\int_0^{\pi} \frac{\sin t}{1+\cos^2 t}dt - I$$

Do đó:

$$I = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} \frac{\sin t}{1+\cos^2 t}dt$$

Đặt: $\tan u = \cos t, u \in \left(-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right)$, ta có :

- $\dfrac{du}{\cos^2 u} = -\sin t dt$
- $t = 0 \Rightarrow u = \dfrac{\pi}{4};\ t = \pi \Rightarrow u = -\dfrac{\pi}{4}$

Khi đó:

$$\begin{aligned} I &= \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} \frac{\sin t}{1+\cos^2 t}dt \\ &= \frac{\pi}{2}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{du}{(1+\tan^2 u)\cos^2 u} \\ &= \frac{\pi}{2}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} du \\ &= \frac{\pi}{2}.\frac{\pi}{2} \\ &= \frac{\pi^2}{4} \end{aligned}$$

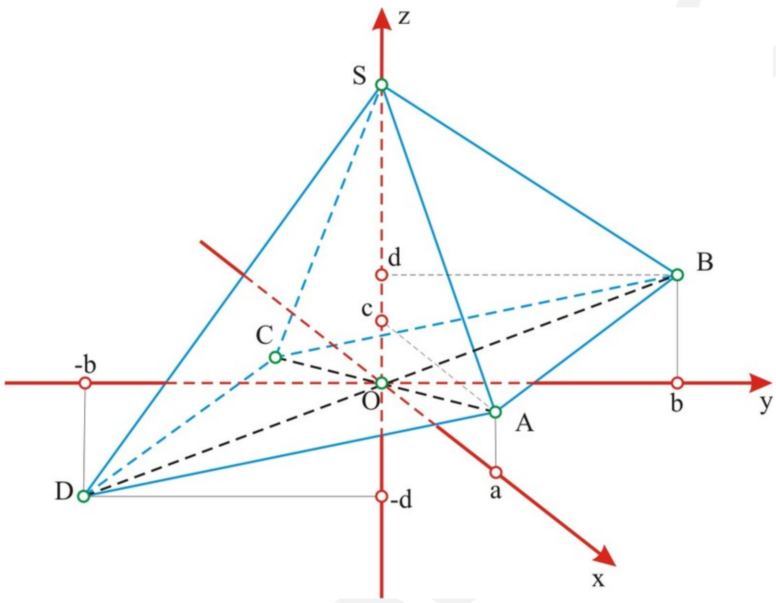
□

Câu IV (1 điểm)

Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành $ABCD$ với tâm O. Gọi p, q, u, v lần lượt là các khoảng cách từ O đến các mặt phẳng (SAB),(SBC),(SCD),(SDA). Chứng minh rằng nếu mặt phẳng (SAC) vuông góc với mặt phẳng (SBD) thì

$$\frac{1}{p^2}+\frac{1}{u^2}=\frac{1}{q^2}+\frac{1}{v^2}.$$

Lời giải :



Mặt phẳng qua O vuông góc với SO cắt (SAC) và (SBD) theo các giao tuyến $x'Ox$ và $y'Oy$. Khi $(SAC)\perp(SBD)$ thì $x'x\perp y'y$.

Chọn hệ trục $Oxyz$ sao cho tia Oz trùng với tia OS. Lúc đó $S(0;0;h)\,,A(a;0;c)\,,B(0;b;d)$. C và D đối xứng của A và B qua O nên $C(-a;0;-c)\,,D(0;-b;-d)\,.$

Ta có $\overrightarrow{SA}=(a;0;c-h)\,,\overrightarrow{SB}=(0;b;d-h)\,,$ mp$(SAB):b(c-h)x+a(d-h)y-ab(z-h)=0.$

Khoảng cách từ O đến (SAB)

$$p=\frac{|abh|}{\sqrt{b^2(c-h)^2+a^2(d-h)^2+a^2b^2}}\Rightarrow\frac{1}{p^2}=\frac{b^2(c-h)^2+a^2(d-h)^2+a^2b^2}{a^2b^2h^2}$$

Cũng có

$$\frac{1}{u^2}=\frac{b^2(c+h)^2+a^2(d+h)^2+a^2b^2}{a^2b^2h^2}$$

Do đó

$$\frac{1}{p^2}+\frac{1}{u^2}=2\frac{(a^2b^2+b^2c^2+a^2d^2)+h^2\left(a^2+b^2\right)}{a^2b^2h^2}$$

Tương tự

$$\frac{1}{q^2}+\frac{1}{v^2}=2\frac{(a^2b^2+b^2c^2+a^2d^2)+h^2\left(a^2+b^2\right)}{a^2b^2h^2}=\frac{1}{p^2}+\frac{1}{u^2}$$

Từ đó suy ra điều phải chứng minh.

□

Câu V(1 điểm) Cho $x, y, z \in [1; 3]$. Chứng minh rằng :

$$\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}+\frac{y}{x}+\frac{x}{z}+\frac{z}{y} \leq \frac{26}{3}$$

Lời giải : Không giảm tính tổng quát giả sử $1 \leq x \leq y \leq z \leq 3$

Vậy $\frac{y}{z}; \frac{x}{y} \leq 1$

Do đó :

$$\left(1-\frac{x}{y}\right)\left(1-\frac{y}{z}\right) \geq 0$$
$$\Leftrightarrow 1+\frac{x}{z}-\frac{y}{z}-\frac{x}{y} \geq 0 \quad (1)$$

Mặt khác :

$$\left(1-\frac{y}{x}\right)\left(1-\frac{z}{y}\right) \geq 0$$
$$\Leftrightarrow 1+\frac{z}{x}-\frac{z}{y}-\frac{y}{x} \geq 0 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra :

$$\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}+\frac{y}{x}+\frac{x}{z}+\frac{z}{y} \leq 2+2\left(\frac{x}{z}+\frac{z}{x}\right)$$

Đặt $\frac{z}{x}=t$ thế thì $1 \leq t \leq 3$ Khảo sát hàm $f(t)=t+\frac{1}{t}$ ta dễ dàng thấy $f(t)$ tăng trên khoảng $[1; 3]$. Suy ra $\max f(t)=f(3)=\frac{10}{3}$

Vậy

$$\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}+\frac{y}{x}+\frac{x}{z}+\frac{z}{y} \leq 2+2\frac{10}{3}=\frac{26}{3}$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $(x, y, z)=(1,1,3)$ và các hoán vị. □

PHẦN RIÊNG *(3,0 điểm)*

Câu VI.a (2 điểm)

1. Trong mặt phẳng với hệ toạ độ Oxy cho tam giác ABC vuông tại A, phương trình đường thẳng chứa cạnh BC là $\sqrt{3}x-y-\sqrt{3}=0$, hai điểm A và B thuộc trục hoành. Biết bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC bằng 2, tìm toạ độ trọng tâm G của tam giác ABC.

   Lời giải : Ta có $B=BC \cap Ox \Rightarrow B(1; 0)$. Gọi $A(a; 0)$, $(a \neq 1)$.

   $AC \perp AB \Rightarrow AC \perp Ox \Rightarrow C\left(a; \sqrt{3}a-\sqrt{3}\right) \quad (do\ C \in BC)$

Vì G là trọng tâm tam giác ABC nên $\begin{cases} x_G = \dfrac{2a+1}{3} \\ y_G = \dfrac{\sqrt{3}(a-1)}{3} \end{cases}$

Ta có: $AB = |a-1|, AC = \sqrt{3}|a-1|, BC = 2|a-1|$

Gọi p là nửa chu vi và r là bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC thì

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}AB.AC = \frac{\sqrt{3}}{2}(a-1)^2 = pr = AB + BC + CA = \left(\sqrt{3}+3\right)|a-1|$$

Suy ra:

$$|a-1| = 2\left(\sqrt{3}+1\right) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 2\sqrt{3}+3 \\ a = -2\sqrt{3}-1 \end{array}\right.$$

Vậy toạ độ trọng tâm G của tam giác ABC là

$$G\left(\frac{4\sqrt{3}+7}{3}; \frac{6+2\sqrt{3}}{3}\right)$$

hoặc

$$G\left(\frac{-4\sqrt{3}-1}{3}; \frac{-6-2\sqrt{3}}{3}\right)$$

□

2. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho mặt phẳng (α) có phương trình $2x - y + z + 1 = 0$ và hai điểm $M(3;1;0), N(-9;4;9)$. Tìm điểm I trên mặt phẳng (α) sao cho $|IM - IN|$ đạt giá trị lớn nhất.

Lời giải : Ta có $T = 6(-12) < 0$ nên M, N nằm về hai phía của mp (α).

Gọi R là điểm đối xứng của M qua $mp(\alpha)$, khi đó đường thẳng MR qua $M(3;1;0)$ vuông góc với mp (α) có phương trình:

$$\frac{x-3}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z}{1}$$

Gọi $H = MR \cap \text{mp}(\alpha) \Rightarrow H(3+2t; 1-t; t) \in MR$.

Vì $H \in \text{mp}(\alpha)$ nên $H(1;2;-1) \Rightarrow R(-1;3;-2)$

Ta có: $|IM - IN| = |IR - IN| \leq RN$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi I, N, R thẳng hàng.

Lại có: $\overrightarrow{RN} = (-8;1;11)$ do đó RN có phương trình tham số $\begin{cases} x = -1-8t \\ y = 3+t \\ z = -2+11t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$

Điểm I cần tìm là giao điểm của RN với mp (α). Do đó $I(-1-8t; 3+t; -2+11t)$ thuộc mp (α).

Kết luận : $I\left(7;2;-13\right)$.

$\square$

Câu VII.a (1 điểm) Xác định tập hợp các điểm biểu diễn số phức z thoả mãn $|z-i|+|z+i|=4$.

Lời giải : Giả sử $z=x+yi\ \ (x,y\in R)$ suy ra $M\left(x;y\right)$ biểu diễn số phức z. Khi đó

$$\begin{aligned}&|z-i|+|z+i|=4\\ \Leftrightarrow&\left|x+\left(y-1\right)i\right|+\left|x+\left(y+1\right)i\right|=4\\ \Leftrightarrow&\sqrt{x^2+\left(y-1\right)^2}+\sqrt{x^2+\left(y+1\right)^2}=4\ \ (\star)\end{aligned}$$

Đặt $F_1\left(0;-1\right),\ F_2\left(0;1\right)$ thì $(\star)\Leftrightarrow MF_2+MF_1=4>F_1F_2=2$.
Suy ra tập hợp điểm M là elip (E) có hai tiêu điểm là F_1F_2.
Ta viết phương trình elip (E):
Lưu ý ở đây tiêu điểm nằm trên trục tung. Do đó phương trình chính tắc của (E) có dạng:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ \ \left(b>a>0;\ a^2=b^2-c^2\right)$$

Ta có:

$$\begin{cases}MF_1+MF_2=2b=4\\ F_1F_2=2c=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b=2\\ c=1\end{cases}\Rightarrow a^2=b^2-c^2=3$$

Vậy tập hợp điểm M là elip (E) có phương trình chính tắc $\dfrac{x^2}{3}+\dfrac{y^2}{4}=1$.

$\square$

Câu VI.b (2 điểm)

1. Trong mặt phẳng với hệ toạ độ Oxy cho hai đường tròn $(C_1):x^2+\left(y+1\right)^2=4$ và $(C_2):\left(x-1\right)^2+y^2=2$. Viết phương trình đường thẳng Δ biết Δ tiếp xúc với (C_1) và cắt (C_2) tại hai điểm A,B sao cho $AB=2$.

   Lời giải : Đường tròn (C_1) có tâm $I_1\left(0;-1\right)$, bán kính $R_1=2$, (C_2) có tâm $I_2\left(1;0\right)$, bán kính $R_2=\sqrt{2}$.

   Xét đường thẳng $\Delta\perp Ox$, khi đó phương trình của Δ có dạng $x=m$.

   Suy ra:

   $$\begin{cases}d\left(I_1,\Delta\right)=2\\ d\left(I_2,\Delta\right)=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}|m|=2\\ |1-m|=1\end{cases}\Leftrightarrow m=2\Leftrightarrow\Delta:x=2$$

   Xét đường thẳng Δ không vuông góc với Ox, phương trình của Δ có dạng $kx-y+a=0$.

Tương tự, ta có hệ:

$$\begin{cases} \dfrac{|1+a|}{\sqrt{k^2+1}} = 2 \\ \dfrac{|k+a|}{\sqrt{k^2+1}} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |1+a| = 2\sqrt{k^2+1} \quad (\star) \\ |k+a| = \sqrt{k^2+1} \end{cases} \Rightarrow |1+a| = 2|k+a| \Rightarrow \left[\begin{array}{l} a = 1-2k \\ a = -\dfrac{2k+1}{3} \end{array} \right.$$

Với $a = 1-2k$, thay vào $(\star) : (2-2k)^2 = 4(k^2+1) \Leftrightarrow k = 0$. Do đó $a = 1$. Suy ra $\Delta : y = 1$.

Với $a = -\dfrac{2k+1}{3}$, thay vào $(\star) : \left(1 - \dfrac{2k+1}{3}\right)^2 = 4(k^2+1) \Leftrightarrow (1-k)^2 = 9(k^2+1)$ (vô nghiệm).

Vậy $\Delta : x = 2$ hoặc $\Delta : y = 1$. □

2. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, hãy viết phương trình đường vuông góc chung của 2 đường thẳng $d : \begin{cases} x = 3+t \\ y = -1+2t \\ z = 4 \end{cases}$ và $d' : \begin{cases} x = -2+2t' \\ y = 2t' \\ z = 2+4t' \end{cases}$.

Lời giải : Dễ thấy $\vec{u} = (1;2;0), \vec{v} = (1;1;2)$lần lượt là vectơ chỉ phương của d và d'. Giả sử đường thẳng vuông góc chung cắt d và d' lần lượt tại M và N. Khi đó:

$$M(3+t; -1+2t; 4), N(-2+2t'; 2t'; 2+4t').$$

Ta có:

$$\begin{cases} \overrightarrow{MN} \perp \overrightarrow{n} \\ \overrightarrow{MN} \perp \overrightarrow{u} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{MN}.\overrightarrow{n} = 0 \\ \overrightarrow{MN}.\overrightarrow{u} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6t' - 5t = 3 \\ 12t' - 3t = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t' = \dfrac{31}{42} \\ t = \dfrac{2}{7} \end{cases}$$

Vậy đường thẳng cần tìm đi qua $M\left(\dfrac{23}{7}; -\dfrac{3}{7}; 4\right)$ có vectơ chỉ phương $\vec{n} = (4; -2; -1)$ nên có phương trình: $\begin{cases} x = \dfrac{23}{7} + 4t \\ y = -\dfrac{3}{7} - 2t \\ z = 4 - t \end{cases}$. □

Câu VII.b (1 điểm) Cho tập $A = \{0, 1, 2, 5, 7, 8\}$. Có bao nhiêu số tự nhiên chia hết cho 6 có 5 chữ số được chọn từ tập A.

Lời giải : Chia tập A thành 3 tập: $A_0 = \{0\}$; $A_1 = \{1, 7\}$; $A_2 = \{2, 5, 8\}$ tương ứng các phần tử chia 3 dư $0, 1, 2$.

Gọi $x = \overline{a_1a_2a_3a_4a_5}$ là một số thoả mãn yêu cầu đề bài, $x \vdots 6 \Leftrightarrow \Big(x \vdots 2\Big) \& \Big(x \vdots 3\Big)$.

Như vậy $a_1 \neq 0$ có 5 cách chọn, còn $a_5 \in \{0, 2, 8\}$ có 3 cách chọn, trong đó:

- $\overline{a_1a_5} \in \{12, 18, 72, 78\}$ thì phải chọn $\overline{a_2a_3a_4}$ sao cho $(a_2 + a_3 + a_4) \equiv 0 \pmod 3$
- $\overline{a_1a_5} \in \{20, 50, 80\}$ thì phải chọn $\overline{a_2a_3a_4}$ sao cho $(a_2 + a_3 + a_4) \equiv 1 \pmod 3$
- $\overline{a_1a_5} \in \{10, 22, 28, 52, 58, 70, 82, 88\}$ thì phải chọn $\overline{a_2a_3a_4}$ sao cho $(a_2 + a_3 + a_4) \equiv 2 \pmod 3$

1. Tính các số $\overline{a_2a_3a_4}$ mà $(a_2 + a_3 + a_4) \equiv 0 \pmod 3$

- $$\begin{array}{ccl} & \nearrow & (a_3 \in A_0)\,\&\,(a_4 \in A_0) \to 1.1.1 = 1 \text{ số} \\ a_2 \in A_0 & \to & (a_3 \in A_1)\,\&\,(a_4 \in A_2) \to 1.2.3 = 6 \text{ số} \\ \text{(1 cách)} & \searrow & (a_3 \in A_2)\,\&\,(a_4 \in A_1) \to 1.3.2 = 6 \text{ số} \end{array}$$

- $$\begin{array}{ccl} & \nearrow & (a_3 \in A_0)\,\&\,(a_4 \in A_2) \to 2.1.3 = 6 \text{ số} \\ a_2 \in A_1 & \to & (a_3 \in A_2)\,\&\,(a_4 \in A_0) \to 2.3.1 = 6 \text{ số} \\ \text{(2 cách)} & \searrow & (a_3 \in A_1)\,\&\,(a_4 \in A_1) \to 2.2.2 = 8 \text{ số} \end{array}$$

- $$\begin{array}{ccl} & \nearrow & (a_3 \in A_0)\,\&\,(a_4 \in A_1) \to 3.1.2 = 6 \text{ số} \\ a_2 \in A_2 & \to & (a_3 \in A_1)\,\&\,(a_4 \in A_0) \to 3.2.1 = 6 \text{ số} \\ \text{(3 cách)} & \searrow & (a_3 \in A_2)\,\&\,(a_4 \in A_2) \to 3.3.3 = 27 \text{ số} \end{array}$$

Tổng cộng có $1 + 6 + 6 + 6 + 6 + 8 + 6 + 6 + 27 = 72$ số

2. Tính các số $\overline{a_2a_3a_4}$ mà $(a_2 + a_3 + a_4) \equiv 1 \pmod 3$

- $$\begin{array}{ccl} & \nearrow & (a_3 \in A_0)\,\&\,(a_4 \in A_1) \to 1.1.2 = 2 \text{ số} \\ a_2 \in A_0 & \to & (a_3 \in A_1)\,\&\,(a_4 \in A_0) \to 1.2.1 = 2 \text{ số} \\ \text{(1 cách)} & \searrow & (a_3 \in A_2)\,\&\,(a_4 \in A_2) \to 1.3.3 = 9 \text{ số} \end{array}$$

- $$\begin{array}{ccl} & \nearrow & (a_3 \in A_0)\,\&\,(a_4 \in A_0) \to 2.1.1 = 2 \text{ số} \\ a_2 \in A_1 & \to & (a_3 \in A_1)\,\&\,(a_4 \in A_2) \to 2.2.3 = 12 \text{ số} \\ \text{(2 cách)} & \searrow & (a_3 \in A_2)\,\&\,(a_4 \in A_1) \to 2.3.2 = 12 \text{ số} \end{array}$$

- $$\begin{array}{ccl} & \nearrow & (a_3 \in A_0)\,\&\,(a_4 \in A_2) \to 3.1.3 = 9 \text{ số} \\ a_2 \in A_2 & \to & (a_3 \in A_1)\,\&\,(a_4 \in A_1) \to 3.2.2 = 12 \text{ số} \\ \text{(3 cách)} & \searrow & (a_3 \in A_2)\,\&\,(a_4 \in A_0) \to 3.3.1 = 9 \text{ số} \end{array}$$

Tổng cộng có $2 + 2 + 9 + 2 + 12 + 12 + 9 + 12 + 9 = 69$ số

3. Tính các số $\overline{a_2a_3a_4}$ mà $(a_2 + a_3 + a_4) \equiv 2 \pmod 3$

- $$\begin{array}{ccl} & \nearrow & (a_3 \in A_0)\,\&\,(a_4 \in A_2) \to 1.1.3 = 3 \text{ số} \\ a_2 \in A_0 & \to & (a_3 \in A_1)\,\&\,(a_4 \in A_1) \to 1.2.2 = 4 \text{ số} \\ \text{(1 cách)} & \searrow & (a_3 \in A_2)\,\&\,(a_4 \in A_0) \to 1.3.1 = 3 \text{ số} \end{array}$$

- $$\begin{array}{ccl} & \nearrow & (a_3 \in A_0)\,\&\,(a_4 \in A_1) \to 2.1.2 = 4 \text{ số} \\ a_2 \in A_1 & \to & (a_3 \in A_1)\,\&\,(a_4 \in A_0) \to 2.2.1 = 4 \text{ số} \\ \text{(2 cách)} & \searrow & (a_3 \in A_2)\,\&\,(a_4 \in A_2) \to 2.3.3 = 18 \text{ số} \end{array}$$

$$\begin{array}{lcl} & \nearrow & (a_3 \in A_0)\,\&\,(a_4 \in A_0) \to 3.1.1 = 3 \text{ số} \\ \bullet \quad a_2 \in A_2 & \to & (a_3 \in A_1)\,\&\,(a_4 \in A_2) \to 3.2.3 = 18 \text{ số} \\ \quad (3 \text{ cách}) & \searrow & (a_3 \in A_2)\,\&\,(a_4 \in A_1) \to 3.3.2 = 18 \text{ số} \end{array}$$

Tổng cộng có $3 + 4 + 3 + 4 + 4 + 18 + 3 + 18 + 18 = 75$ số

Kết luận : số các số tự nhiên chia hết cho 6 có 5 chữ số hình thành từ $A = \{0, 1, 2, 5, 7, 8\}$ là S

$$S = 4.72 + 3.69 + 8.75 = 1095 \text{ số.}$$

$\square$

Đề thi thử số 3

Ngày 6 tháng 1 năm 2012

PHẦN CHUNG CHO TẤT CẢ CÁC THÍ SINH (*7,0 điểm*)

Câu I *(2,0 điểm)* Cho hàm số $y = x^4 + 2(2m+1)x^2 - 3m$ có đồ thị là (C).

1. Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số trên với $m = \dfrac{3}{2}$.
2. Tìm m để (C) cắt trục hoành tại 4 điểm tạo thành 3 đoạn thẳng bằng nhau.

Câu II (*2 điểm*)

1. Giải phương trình: $\cos^2 2x + 2\cos 2x - \sin x + 4 = 2\sqrt{2 - \sin x}$.
2. Giải hệ bất phương trình: $\begin{cases} 6x^2\sqrt{x^3 - 6x + 5} = (x^2 + 2x - 6)(x^3 + 4) \\ x + \dfrac{2}{x} \geq 1 + \dfrac{2}{x^2} \end{cases}$

Câu III (*1 điểm*) Tính tích phân

$$I = \int_{-2}^{-1} \frac{dx}{1 + \sqrt{1 - 2x - x^2}}.$$

Câu IV (*1 điểm*) Cho hình chóp tam giác đều có cạnh đáy bằng a, góc giữa hai mặt bên bằng α. Tính thể tích khối chóp.

Câu V (1 điểm) Cho các số thực dương a, b, c thoả mãn $abc = 1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$P = \frac{\sqrt{a^2+1} + \sqrt{b^2+1} + \sqrt{c^2+1}}{a+b+c}.$$

PHẦN RIÊNG (*3 điểm*) Thí sinh chỉ được chọn một trong hai phần (A hoặc B)

A. Theo chương trình Chuẩn
Câu VI.a (*2 điểm*)

1. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy cho hai đường tròn $(C_1) : x^2 + (y-2)^2 = 1$ và $(C_2) : (x-6)^2 + (y-4)^2 = 4$. Tìm điểm A trên (C_1), điểm B trên (C_2) và điểm C trên trục Ox sao cho tổng $AC + CB$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Đáp án đề thi thử số 3

Ngày 19 tháng 1 năm 2012

PHẦN CHUNG CHO TẤT CẢ CÁC THÍ SINH *(7,0 điểm)*

Câu I (2 điểm) Cho hàm số $y = x^4 + 2(2m+1)x^2 - 3m$ có đồ thị là (C).

1. Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số trên với $m = \dfrac{3}{2}$.

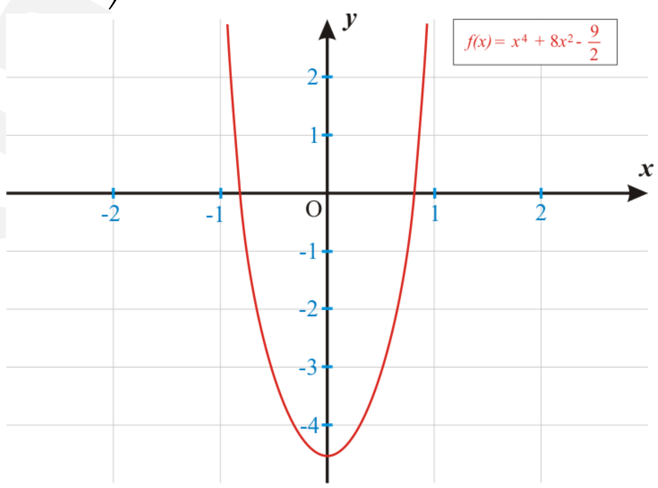
Lời giải : Với $m = \dfrac{3}{2}$, ta có : $y = x^4 + 8x^2 - \dfrac{9}{2}$

- Tập xác định : $\mathbb{R}$
- Sự biến thiên :
  + Chiều biến thiên :
    - Ta có : $y' = 4x^3 + 16x = 4x(x^2+4)$. Do đó $y' = 0 \Leftrightarrow x = 0$.
    - Trong $(-\infty; 0)$, $y' < 0$ nên hàm số nghịch biến.
    - Trong $(0; +\infty)$, $y' > 0$ nên hàm số đồng biến.
  + Cực trị : Hàm số đạt cực tiểu tại $x_{\min} = 0$; $y_{\min} = -\dfrac{3}{2}$
  + Giới hạn : $\lim\limits_{x \to \pm\infty} y = +\infty$. Đồ thị hàm số không có tiệm cận.
  + Bảng biến thiên :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$y'(x)$		$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	$-\frac{9}{2}$	$\nearrow$	$+\infty$

- Đồ thị hàm số :
  + Đồ thị nhận trục Oy là trục đối xứng.
  + Đồ thị cắt trục Oy tại $\left(0; -\dfrac{9}{2}\right)$ và cắt trục Ox tại 2 điểm $\left(\sqrt{-4+\sqrt{\dfrac{41}{2}}}; 0\right)$

  và $\left(-\sqrt{-4+\sqrt{\dfrac{41}{2}}}; 0\right)$.



□

2. Tìm m để (C) cắt trục hoành tại 4 điểm tạo thành 3 đoạn thẳng bằng nhau.

Lời giải : Hoành độ giao điểm của (C) và Ox là nghiệm của phương trình : $x^4 + 2(2m+1)x^2 - 3m = 0$
Đặt $t = x^2$ ta có :

$$t^2 + 2(2m+1)t - 3m = 0 \tag{1}$$

Điều kiện cần và đủ để (C) cắt trục Ox tại 4 điểm phân biệt là phương trình (1) có 2 nghiệm dương. Điều này tương đương với :

$$\begin{cases} (2m+1)^2 + 3m & > 0 \\ -3m & > 0 \\ -(2m+1) & > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m < -\frac{7+\sqrt{33}}{8} \tag{2}$$

Với điều kiện (2), đồ thị (C) cắt Ox tại 4 điểm $(-a;0)$,$(-b;0)$,$(b;0)$,$(a;0)$ $(0 < b < a)$. Vì (C) nhận Oy là trục đối xứng nên yêu cầu của bài toán được thỏa mãn khi và chỉ khi

$$a = 3b \Leftrightarrow a^2 = 9b^2 \tag{3}$$

Dễ thấy : $a^2 = -(2m+1) + \sqrt{4m^2+7m+1}; b^2 = -(2m+1) - \sqrt{4m^2+7m+1}$
Do đó : (3) $\Leftrightarrow 8(2m+1) = -10\sqrt{4m^2+7m+1} \Rightarrow 36m^2 + 111m + 9 = 0$
$\Rightarrow m = -3; m = -\dfrac{1}{12}$
Kết hợp với điều kiện (2) ta có $m = -3$. □

Câu II ***(2,0 điểm)***

1. Giải phương trình :

$$\cos^2 2x + 2\cos 2x - \sin x + 4 = 2\sqrt{2 - \sin x} \tag{4}$$

Lời giải : (4) $\Leftrightarrow (\cos 2x + 1)^2 = -\left(\sqrt{2-\sin x} - 1\right)^2$
$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos 2x + 1 = 0 \\ \sqrt{2-\sin x} - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \sin x = 1$
$\Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi;\quad k \in \mathbb{Z}.$ □

2. Giải hệ bất phương trình :

$$\begin{cases} 6x^2\sqrt{x^3-6x+5} = (x^2+2x-6)(x^3+4) \\ x + \dfrac{2}{x} \geq 1 + \dfrac{2}{x^2} \end{cases} \tag{5}$$

Lời giải : Ta có $x + \dfrac{2}{x} \geq 1 + \dfrac{2}{x^2}$, do đó $x + \dfrac{2}{x} \geq 1$. Ta dẫn đến các bước kéo theo liên tiếp :

$$\begin{aligned} & x > 0 \\ \Rightarrow & x^3 + 4 > 0 \\ \Rightarrow & x^2 + 2x - 6 > 0 \\ \Rightarrow & x > \sqrt{7} - 1. \end{aligned}$$

Khi đó ta lần lượt có các nhận xét sau :

$$\sqrt{x^3 - 6x + 5} = \sqrt{(x-1)(x^2+x-5)} \leq \frac{1}{2}(x - 1 + x^2 + x - 5) = \frac{1}{2}(x^2 + 2x - 6)$$
$$x^2 = \sqrt[3]{x^6} = \sqrt[3]{\frac{x^3}{2}.\frac{x^3}{2}.4} \leq \frac{1}{3}(\frac{x^3}{2} + \frac{x^3}{2} + 4) = \frac{1}{3}(x^3 + 4)$$

Từ đó suy ra : $6x^2\sqrt{x^2 - 6x + 5} \leq (x^2 + 2x - 6)(x^3 + 4)$.

Đẳng thức xảy ra khi : $x - 1 = x^2 + x - 5$ và $\dfrac{x^3}{2} = 4$, hay $x = 2$ $\left(\text{thỏa mãn } x + \dfrac{2}{x} \geq 1 + \dfrac{2}{x^2}\right)$.

Vậy nghiệm của hệ bất phương trình là $x = 2$. □

Câu III (1 điểm) Tính tích phân

$$I = \int_{-2}^{-1} \frac{dx}{1 + \sqrt{1 - 2x - x^2}}$$

Lời giải : Đặt $\sqrt{1 - 2x - x^2} = tx - 1$ suy ra :

$$\begin{aligned} x = -2 &\Rightarrow t = -1 \\ x = -1 &\Rightarrow t = -1 - \sqrt{2} \end{aligned}$$

Mặt khác $\Rightarrow x = \dfrac{2(t-1)}{1+t^2}$ nên $dx = \dfrac{-2(t^2 - 2t - 1)}{(1+t^2)^2}dt$.

Ta có :

$$I = \int\limits_{-1}^{(-1-\sqrt{2})} \frac{-2(t^2-2t-1)}{(1+t^2)^2}.\frac{1+t^2}{2t(t-1)}dt$$

$$\Leftrightarrow I = \int\limits_{(-1-\sqrt{2})}^{-1} \frac{(t^2-2t-1)}{t(t-1)(t^2+1)}dt$$

$$\Leftrightarrow I = \int\limits_{(-1-\sqrt{2})}^{-1} \frac{dt}{t} - \int\limits_{(-1-\sqrt{2})}^{-1} \frac{dt}{t-1} + \int\limits_{(-1-\sqrt{2})}^{-1} \frac{2dt}{t^2+1}$$

$$\Leftrightarrow I = \ln|t|\Big|_{(-1-\sqrt{2})}^{-1} - \ln|t-1|\Big|_{(-1-\sqrt{2})}^{-1} + 2J \quad \left(\text{Với : } J = \int\limits_{(-1-\sqrt{2})}^{-1} \frac{dt}{t^2+1}\right)$$

$$\Leftrightarrow I = 0 - \ln(1+\sqrt{2}) - \ln 2 + \ln(4+2\sqrt{2}) + 2J$$

$$\Leftrightarrow I = -\frac{1}{2}\ln 2 + 2J$$

Xét tích phân

$$J = \int\limits_{(-1-\sqrt{2})}^{-1} \frac{dt}{t^2+1}$$

Đặt $t = \tan y$. Ta có :

$$dt = \frac{dy}{\cos^2 y}$$

$$\frac{1}{1+t^2} = \frac{1}{1+\tan^2 y} = \cos^2 y$$

$$\tan\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -1$$

$$\tan\left(-\frac{3\pi}{8}\right) = \frac{\sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right)}{\cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right)+1} = \frac{-\frac{\sqrt{2}}{2}}{-\frac{\sqrt{2}}{2}+1} = -1-\sqrt{2}$$

Do đó :

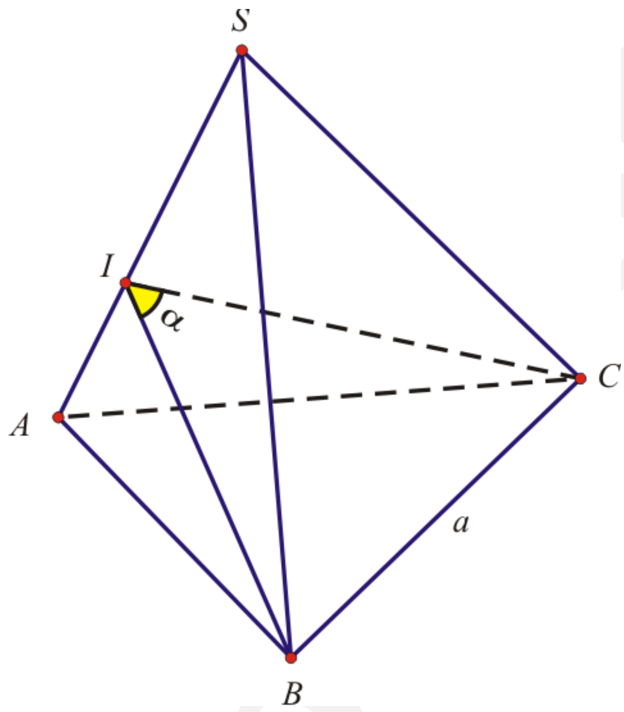
$$J = \int\limits_{-\frac{3\pi}{8}}^{-\frac{\pi}{4}} \cos^2 y.\frac{dy}{\cos^2(y)} = \int\limits_{-\frac{3\pi}{8}}^{-\frac{\pi}{4}} dy$$

$$\Leftrightarrow J = y\Bigg|_{-\frac{3\pi}{8}}^{-\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{8}$$

Vậy $I = -\dfrac{1}{2}\ln 2 + 2J = \dfrac{\pi}{4} - \dfrac{1}{2}\ln 2.$ □

Câu IV (1 điểm) Cho hình chóp tam giác đều có cạnh đáy bằng a, góc giữa hai mặt bên bằng α. Tính thể tích khối chóp.

Lời giải : Giả sử khối chóp $S.ABC$ thỏa mãn yêu cầu bài toán. Mặt phẳng chứa cạnh BC và vuông góc với SA cắt SA ở I. Theo giả thiết $\widehat{BIC} = \alpha$.



Ta có :

$$V_{S.ABC} = V_{S.IBC} + V_{A.IBC} = \frac{1}{3}.S_{BIC}(SI + IA) = \frac{1}{3}.S_{BIC}.SA$$

Áp dụng định lý sin cho tam giác BIC cân tại I, ta có :

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{BI}{\sin C} \Rightarrow BI = \frac{a.\sin C}{\sin\alpha} = \frac{a.\sin\left(\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\alpha}{2}\right)}{\sin\alpha} = \frac{a}{2\sin\dfrac{\alpha}{2}}$$

Vậy :

$$S_{BIC} = \frac{1}{2}IB.IC.\sin\alpha = \frac{1}{2}.\frac{a^2}{4.\sin^2\dfrac{\alpha}{2}}.2\sin\frac{\alpha}{2}.\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{a^2}{4}\cot\frac{\alpha}{2}$$

Xét tam giác SAB cân ở S, ta có :

$$\frac{1}{2}SA^2.\sin(\pi - 2\widehat{A}) = \frac{1}{2}SA.BI$$

$$\Rightarrow SA = \frac{BI}{\sin 2\widehat{SAB}} = \frac{BI}{2\dfrac{BI}{AB}.\sqrt{1-\dfrac{BI^2}{AB^2}}} = \frac{a\sin\dfrac{\alpha}{2}}{\sqrt{4\sin^2\dfrac{\alpha}{2}-1}}$$

Do đó :

$$V_{S.ABC} = \frac{1}{3}.\frac{a^2}{4}.\cot\frac{\alpha}{2}.\frac{a\sin\dfrac{\alpha}{2}}{\sqrt{4\sin^2\dfrac{\alpha}{2}-1}} = \frac{a^3\cos\dfrac{\alpha}{2}}{12\sqrt{4\sin^2\dfrac{\alpha}{2}-1}}$$

□

Câu V(1 điểm) Cho các số thực dương a, b, c thoả mãn điều kiện : $abc = 1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức :

$$P = \frac{\sqrt{a^2+1}+\sqrt{b^2+1}+\sqrt{c^2+1}}{a+b+c}$$

Lời giải : Dự đoán giá trị lớn nhất xảy ra khi $a = b = c = 1$. Dựa vào đó ta sẽ chứng minh một "ước lượng" sau :

$$f(x) = \sqrt{x^2+1} - \sqrt{2}x + g(x) \le 0 \ \forall x > 0,$$

trong đó $g(x)$ là hàm thoả mãn điều kiện $f(1) = 0$ và $f'(1) = 0$ (điều kiện cần để cho hàm $f(x)$ đạt max tại $x = 1$).

Ta có :

$$f(1) = g(1) = 0$$
$$f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} - \sqrt{2} + g'(x) \Rightarrow f'(1) = \frac{1}{\sqrt{2}} - \sqrt{2} + g'(1) = 0 \Rightarrow g'(1) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Dễ thấy $g(x) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\ln x$ thoả mãn cả hai điều kiện trên. Như vậy, ta sẽ chứng minh bổ đề :

$$f(x) = \sqrt{x^2+1} - \sqrt{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}\ln x \le 0 \ \forall x > 0 \tag{6}$$

Thật vậy, ta có : $f'(x) = \dfrac{2x^2 - (2x-1)\sqrt{2x^2+2}}{2x\sqrt{x^2+1}}$

Do đó

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 = (2x-1)\sqrt{2x^2+2} \\ x > 0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x^4 = (2x-1)^2(x^2+1) \\ x > \dfrac{1}{2} \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 4x + 1 = 0 \\ x > \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)\left((2x-1)\left(\left(x-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{19}{16}\right)+\frac{1}{4}\right)=0 \\ x>\frac{1}{2} \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow x=1$$

Nhận xét về dấu của $f'(x)$:

- Nếu $0 < x \leq \frac{1}{2}$ thì $2x^2-(2x-1)\sqrt{2x^2+2} > 0$. Điều này kéo theo $f'(x) > 0,\ \forall x \in \left(0;\frac{1}{2}\right]$.
- Nếu $\frac{1}{2} < x < 1$ thì $(x-1)\left((2x-1)\left(\left(x-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{19}{16}\right)+\frac{1}{4}\right) < 0$. Điều này kéo theo $2x^4 > (2x-1)^2(x^2+1)$ hay $f'(x) > 0,\ \forall x \in \left(\frac{1}{2};1\right)$.
- $f'(1) = 0$.
- Nếu $x > 1$ thì $(x-1)\left((2x-1)\left(\left(x-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{19}{16}\right)+\frac{1}{4}\right) > 0$. Điều này kéo theo $2x^4 < (2x-1)^2(x^2+1)$ hay $f'(x) < 0,\ \forall x \in (1;+\infty)$.

Từ nhận xét trên ta có bảng biến thiên của $f(x)$ như sau :

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$f(1)$	$\searrow$	$-\infty$

Suy ra $f(x) \leq f(1) = 0,\ \forall x > 0$ (bổ đề được chứng minh).

Áp dụng bổ đề (6) ở trên ta có :

$$\begin{aligned}\sqrt{a^2+1}+\sqrt{b^2+1}+\sqrt{c^2+1} &\leq \sqrt{2}(a+b+c)-\frac{\sqrt{2}}{2}(\ln a+\ln b+\ln c)\\ &= \sqrt{2}(a+b+c)-\frac{\sqrt{2}}{2}\ln abc\\ &= \sqrt{2}(a+b+c)\end{aligned}$$

$$\Rightarrow P=\frac{\sqrt{a^2+1}+\sqrt{b^2+1}+\sqrt{c^2+1}}{a+b+c} \leq \sqrt{2}.$$

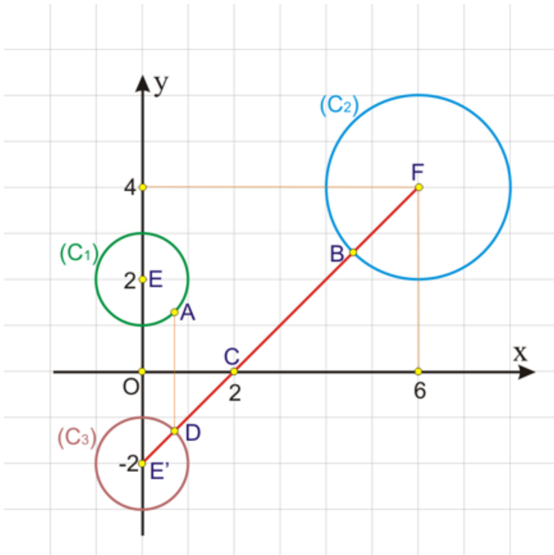
Vậy $\max P = \sqrt{2}$, đạt được khi và chỉ khi $a=b=c=1$. □

PHẦN RIÊNG *(3,0 điểm)*

Câu VI.a (2 điểm)

1. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy cho hai đường tròn $(C_1) : x^2+(y-2)^2=1$ và $(C_2) : (x-6)^2+(y-4)^2=4$. Tìm điểm A trên (C_1), điểm B trên (C_2) và điểm C trên trục Ox sao cho tổng $AC+CB$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Lời giải :



Ta có : (C_1) là đường tròn có tâm $E\,(0;2)$ bán kính 1. (C_2) là đường tròn có tâm $F\,(6;4)$ bán kính 2.

Gọi D là điểm đối xứng của A qua trục Ox thì $AC + CB = DC + CB$.

Gọi (C_3) là đường tròn đối xứng với đường tròn (C_1) qua Ox thì D nằm trên (C_3) tâm $E'\,(0;-2)$ có phương trình là $(C_3) : x^2 + (y+2)^2 = 1$.

Dễ thấy rằng $DC + CB$ ngắn nhất khi và chỉ khi D và B là giao điểm của đoạn $E'F$ với (C_3) và (C_2).

Do $\overrightarrow{E'F} = (6;6)$ nên đường thẳng $E'F$ có phương trình $\begin{cases} x = t \\ y = -2+t \end{cases}$

Thay vào phương trình (C_3), chú ý $x_D > x_{E'}$, ta được $D\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}; -2 + \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$. Suy ra :

$$A\left(\frac{1}{\sqrt{2}}; 2 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right), C\,(2;0)\,.$$

Thay vào phương trình (C_2), chú ý $x_B < x_F$, thu được $B\left(6-\sqrt{2}; 4-\sqrt{2}\right)$.

Vậy $A\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}; 2 - \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right),\;\; B\left(6-\sqrt{2}; 4-\sqrt{2}\right),\;\; C\,(2;0)$. □

2. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(P_1), (P_2)$ có các phương trình tương ứng là $(P_1) : 2x - y + 2z - 1 = 0$; $(P_2) : 2x - y + 2z + 5 = 0$ và điểm $A(-1;1;1)$ nằm trong khoảng giữa hai mặt phẳng đó. Gọi S là mặt cầu bất kì qua A và tiếp xúc với cả hai mặt phẳng $(P_1), (P_2)$. Gọi I là tâm của mặt cầu S. Chứng tỏ rằng I thuộc một đường tròn cố định. Xác định toạ độ của tâm và tính bán kính của đường tròn đó.

Lời giải : Ta có $(P_1), (P_2)$ có cùng vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{n}\,(2;-1;2)$ suy ra $(P_1) \,//\, (P_2)$. Theo giả thiết thì $I\,(x;y;z)$ thuộc $mp\,(\alpha)$ cố định cách đều hai mặt phẳng $(P_1), (P_2)$.

Khi đó : $d(I,(P_1)) = d(I,(P_2))$. Suy ra $\dfrac{|2x-y+2z-1|}{\sqrt{4+1+4}} = \dfrac{|2x-y+2z+5|}{\sqrt{4+1+4}} \Leftrightarrow$ $mp(\alpha): 2x-y+2z+2=0$.

Gọi r là bán kính mặt cầu (S) thì $r = IA = d(I,(P_1))$ suy ra $\sqrt{(x+1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2} = \dfrac{|2x-y+2z-1|}{3} = 1$.

hay I thuộc mặt cầu $(S'): (x+1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2 = 1$.

Mặt khác A là tâm của mặt cầu (S') và $d(A,(\alpha)) = \dfrac{|2(-1)-1.1+2.1|}{\sqrt{4+1+4}} = \dfrac{1}{3} < 1$, do đó I thuộc giao của $mp(\alpha)$ và mặt cầu (S') là đường tròn cố định (C) : $\begin{cases} 2x-y+2z+2=0 \\ (x+1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=1 \end{cases}$

Gọi K và R lần lượt là tâm và bán kính của đường tròn (C) thì $AK \perp mp(\alpha), AK = d(A,(\alpha)) = \dfrac{1}{3}$

Từ đó $R = \sqrt{AI^2 - AK^2} = \sqrt{1-\dfrac{1}{9}} = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}$.

Phương trình đường thẳng AK nhận $\overrightarrow{n}(2;-1;2)$ làm vectơ chỉ phương là

$$(AK): \begin{cases} x = -1+2t \\ y = 1-t \\ z = 1+2t \end{cases}$$

Suy ra $K(-1+2t; 1-t; 1+2t)$.

Mặt khác $K \in mp(\alpha) \Rightarrow 2(-1+2t) - (1-t) + 2(1+2t) + 2 = 0 \Leftrightarrow t = -\dfrac{1}{9}$.

Do đó $K\left(-\dfrac{11}{9}; \dfrac{10}{9}; \dfrac{7}{9}\right)$. $\square$

Câu VII.a (1 điểm) Có bao nhiêu số tự nhiên chẵn có 5 chữ số, trong số đó có mặt đúng hai chữ số 0.

Lời giải : Gọi số cần lập là $x = \overline{abcde}$. Vì x là số chẵn nên $e \in \{0,2,4,6,8\}$. Ta xét hai trường hợp :

- $e = 0$
  - Chọn $a \neq 0$ có 9 cách.
  - Trong 3 chữ số $\overline{bcd}$ có đúng 1 chữ số 0 và 2 chữ số bất kỳ khác 0. Nên :
    - Có 3 cách chọn vị trí cho chữ số 0.
    - Có 9^2 cách chọn 2 chữ số bất kỳ khác 0.

  Vậy trường hợp này chọn được tổng cộng : $9.3.9^2 = 2187$ số thoả mãn.
- $e \in \{2,4,6,8\}$
  - Có 4 cách chọn e.
  - Chọn $a \neq 0$ có 9 cách.
  - Trong 3 chữ số $\overline{bcd}$ có đúng 2 chữ số 0 và 1 chữ số bất kỳ khác 0. Nên :
    - Có $C_3^2 = 3$ cách chọn vị trí cho 2 chữ số 0.
    - Có 9 cách chọn 1 chữ số bất kỳ khác 0.

Vậy trường hợp này chọn được tổng cộng : $4.9.3.9 = 972$ số thoả mãn.
Tổng cộng có tất cả : $2187 + 972 = 3159$ số chẵn có 5 chữ số mà trong số đó có mặt đúng 2 chữ số 0.

□

Câu VI.b (2 điểm)

1. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy cho điểm $M(-1, 0)$ và đường tròn (C) : $x^2+(y+1)^2 = 1$. Viết phương trình đường thẳng (d) qua M cắt đường tròn (C) tại hai điểm A, B sao cho diện tích $\triangle OAB$ đạt giá trị lớn nhất.

   Lời giải : Xét đường thẳng đi qua $M(-1, 0)$ và song song Oy : $x = -1$ rõ ràng đây không phải là đường thẳng (d) cần tìm vì nó chỉ cắt (C) tại duy nhất một điểm có toạ độ là $(-1, -1)$.
   Đường thẳng (d) đi qua $M(-1, 0)$ (không song song với Oy) có phương trình là : (d) : $y = -kx - k$; $k \neq 0$.
   Ta có : $(d) \cap (C)$ tại các điểm A, B có toạ độ thoả mãn hệ phương trình :

$$\begin{aligned} &\begin{cases} x^2 + (y+1)^2 = 1 \\ y = -kx - k \end{cases} \\ \Leftrightarrow &\begin{cases} x^2 + (-kx - k + 1)^2 = 1 \\ y = -kx - k \end{cases} \\ \Leftrightarrow &\begin{cases} (1 + k^2)x^2 + 2(k^2 - k)x + k^2 - 2k = 0 \\ y = -kx - k \end{cases} \end{aligned}$$

   Xét phương trình $(1 + k^2)x^2 + 2(k^2 - k)x + k^2 - 2k = 0$, ta có :
   $\Delta' = (k^2 - k)^2 - (1 + k^2)(k^2 - 2k) = 2k > 0 \Rightarrow k > 0$
   $\Rightarrow x_{A;B} = \dfrac{k - k^2 \pm \sqrt{2k}}{1 + k^2}$; $\quad y_{A;B} = \dfrac{-k - k^2 \pm \sqrt{2k}}{1 + k^2}$
   Suy ra diện tích $\triangle OAB$ là S_{OAB} :

$$\begin{aligned} S_{OAB} &= \frac{1}{2}\left|x_A y_B - x_B y_A\right| \\ &= \frac{1}{2}\left|\frac{k - k^2 + \sqrt{2k}}{1 + k^2}.\frac{-k - k^2 - \sqrt{2k}}{1 + k^2} - \frac{k - k^2 - \sqrt{2k}}{1 + k^2}.\frac{-k - k^2 + \sqrt{2k}}{1 + k^2}\right| \\ &= \frac{k\sqrt{2k}}{1 + k^2} = f(k) \end{aligned}$$

   Để tìm giá trị lớn nhất của $f(k)$, ta có hai cách giải quyết :
   – Cách 1
   Ta có : $f^2(k) = \dfrac{2k^3}{1 + 2k^2 + k^4}$ Mặt khác theo bất đẳng thức Cauchy (AM-GM) ta có : $9\dfrac{k^4}{9} + 6\dfrac{k^2}{3} + 1 \geq 16\sqrt[16]{\dfrac{k^{36}.k^{12}}{3^{18}.3^6}} = \dfrac{16k^3}{\sqrt{27}} \Rightarrow f(k) \leq \dfrac{\sqrt[4]{27}}{2\sqrt{2}}$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $1 = \dfrac{k^2}{3} = \dfrac{k^4}{9} \Rightarrow k = \sqrt{3}$

– Cách 2

Khảo sát hàm $f(k)$ với $k > 0$, ta có :

$f\,'(k) = \dfrac{\sqrt{k}(3-k^2)}{\sqrt{2}(1+k^2)^2} \Rightarrow f\,'(k) = 0 \Rightarrow k = \sqrt{3}$

Lập bảng xét dấu $f\,'(k)$ trong khoảng $(0, +\infty)$ suy ra $\max\limits_{(0,+\infty)} f(k) = f(\sqrt{3})$.

Vậy phương trình của đường thẳng cần tìm là

$$(d) : y = -\sqrt{3}x - \sqrt{3}.$$

□

2. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d : \dfrac{x-3}{2} = \dfrac{y+2}{1} = \dfrac{z+1}{-1}$, điểm $M(1;-3;0)$ và mặt phẳng $(P) : x+y+z+2 = 0$. Viết phương trình đường thẳng d' nằm trong (P) sao cho d' vuông góc với d và M cách d' một khoảng bằng $\sqrt{42}$.

Lời giải : Dễ thấy : $M = (d) \cap (P)$. Gọi $\overrightarrow{u}; \overrightarrow{n}; \overrightarrow{v}$ lần lượt là vector chỉ phương của (d), vector pháp tuyến của (P), vector chỉ phương của (d').

Ta có : $\overrightarrow{u} = (2;1;-1)$; $\overrightarrow{n} = (1;1;1)$ và

$$\overrightarrow{v} = [\overrightarrow{u};\overrightarrow{n}] = (2;-3;1).$$

Gọi M' là hình chiếu của M lên (d'). Khi đó, M' thuộc đường thẳng Δ nằm trong (P) và vuông góc với (d'). vector chỉ phương của Δ là :

$$\overrightarrow{w} = [\overrightarrow{n};\overrightarrow{v}] = (4;1;-5)$$

Vậy : $\overrightarrow{MM'} = (4t;t;-5t), t \in \mathbb{R}$.

Ta có

$$M'M = \sqrt{42} \Leftrightarrow \sqrt{16t^2 + t^2 + 25t^2} = \sqrt{42} \Leftrightarrow |t| = 1$$

Với $t = -1$ ta có đường thẳng :

$$(d') : \quad \frac{x-5}{2} = \frac{y+2}{-3} = \frac{z+5}{1}.$$

Với $t = 1$ ta có đường thẳng :

$$(d') : \quad \frac{x+3}{2} = \frac{y+4}{-3} = \frac{z-5}{1}.$$

□

Câu VII.b (1 điểm) Một người đàn ông có 5 cái áo trắng, 7 cái áo đen, 6 cái quần trắng, 5 cái quần đen, 8 cái cà vạt trắng, 7 cái cà vạt đen và 4 cái cà vạt vàng. Ông ta chọn ngẫu nhiên mỗi thứ ra 2 cái (2 cái áo, 2 cái quần và 2 cái cà vạt). Tính xác suất để 6 thứ chọn ra đó tìm được ít nhất một bộ (áo, quần, cà vạt) cùng màu.

Lời giải : Ta quy ước các ký hiệu viết tắt sau : $AT \rightarrow$ Áo trắng ; $AD \rightarrow$ Áo đen ; $QT \rightarrow$ Quần trắng ; $CV \rightarrow$ Cà vạt vàng ;... ;$|AT, AT| \rightarrow$ số trường hợp chọn được 2 áo trắng ; v.v..

Phép thử của ta gồm 3 hành động chọn :

1. Hành động 1 : Chọn 2 cái áo trong $5 + 7 = 12$ cái áo, có $C_{12}^2 = 66$ cách.
2. Hành động 2 : Chọn 2 cái quần trong $6 + 5 = 11$ cái quần, có $C_{11}^2 = 55$ cách.
3. Hành động 3 : Chọn 2 cái cà vạt trong $8 + 7 + 4 = 19$ cái cà vạt, có $C_{19}^2 = 171$ cách.

Như vậy số phần tử của không gian mẫu là $|E| = 66.55.171 = 620730$.

1. Trong 66 kết cục của hành động 1, ta có :
   – $|AT, AT| = C_5^2 = 10$ trường hợp
   – $|AT, AD| = 5.7 = 35$ trường hợp
   – $|AD, AD| = C_7^2 = 21$ trường hợp
2. Trong 55 kết cục của hành động 2, ta có :
   – $|QT, QT| = C_6^2 = 15$ trường hợp
   – $|QT, QD| = 6.5 = 30$ trường hợp
   – $|QD, QD| = C_5^2 = 10$ trường hợp
3. Trong 171 kết cục của hành động 3, ta có :
   – $|CT, CT| = C_8^2 = 28$ trường hợp
   – $|CT, CD| = 8.7 = 56$ trường hợp
   – $|CD, CD| = C_7^2 = 21$ trường hợp
   – $|CT, CV| = 8.4 = 32$ trường hợp
   – $|CD, CV| = 7.4 = 28$ trường hợp
   – $|CV, CV| = C_4^2 = 6$ trường hợp.

Gọi X là biến cố "Trong 6 thứ lấy ra có ít nhất 1 bộ đen", Y là biến cố "Trong 6 thứ lấy ra có ít nhất 1 bộ trắng" và Z là biến cố "Trong 6 thứ lấy ra có ít nhất 1 bộ cùng màu".

Như vậy ta có : $|Z| = |X| + |Y| - |X \cap Y|$

Mặt khác :

$$|X| = (35 + 21).(30 + 10).(56 + 21 + 28) = 235200$$
$$|Y| = (10 + 35).(15 + 30).(28 + 56 + 32) = 234900$$
$$|X \cap Y| = 35.30.56 = 58800$$

Do đó : $|Z| = 235200 + 234900 - 58800 = 411300$ trường hợp.

Vậy xác suất cần tính là $P(Z) = \dfrac{|Z|}{|E|} = \dfrac{411300}{620730}$ (≈ 0.66). □

VMF - ĐỀ THI THỬ SỐ 4 - MÔN TOÁN

Ngày 14 tháng 2 năm 2012

(Thời gian làm bài 180 phút không kể thời gian giao đề)

PHẦN CHUNG: (Dành cho tất cả các thí sinh) (7 điểm)

Câu I (2 điểm)

Cho hàm số $y = 2x^3 - 3(2m+1)x^2 + 6m(m+1)x + 1$ với m là tham số.

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số khi $m = 1$.

2. Chứng minh rằng với mọi giá trị của m, hàm số đã cho luôn có cực đại, cực tiểu. Tìm m để giá trị cực đại của hàm số lớn hơn 1.

Câu II (2 điểm)

1. Giải phương trình: $2\cos\left(3x + \dfrac{\pi}{3}\right) = \cos x + 2\sin x$

2. Giải phương trình: $x^3 - 1 = \sqrt{x}(-3x^2 + 5x - 3)$.

Câu III (1 điểm)

Tính tích phân:

$$I = \int_0^{\ln 9} \sqrt{\frac{e^x}{\sqrt{e^x} + 1}}\,dx$$

Câu IV (1 điểm)

Cho hình chóp $S.ABC$ có góc nhị diện của hai mặt phẳng (SBC) và (ABC) bằng 60^0. Tam giác ABC và SBC đều cạnh a. Tính theo a khoảng cách từ B đến mặt phẳng (SAC).

Câu V(1 điểm)

Cho x, y, z là các số thực dương thỏa $xyz = 1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{(1+x)^3} + \frac{1}{(1+y)^3} + \frac{1}{(1+z)^3} \geqslant \frac{3}{8}$$

PHẦN RIÊNG: (Thí sinh chỉ được chọn một trong hai phần: A hoặc B)(3 điểm)

A. Chương trình chuẩn:

Câu VI.a (2 điểm)

1. Viết phương trình đường tròn đi qua giao điểm của $x^2 + y^2 - 10x = 0$ và $x^2 + y^2 + 4x - 2y - 20 = 0$ và có tâm trên $x + 6y - 6 = 0$

2. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho điểm $A(-1;1;2), B(3;5;-2)$ và mặt phẳng $(P): x - 2y + 2z - 4 = 0$. Viết phương trình mặt phẳng đi qua A, B và tạo với (P) một góc 45^0.

Câu VII.a (1 điểm)

Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 &= 3 \\ y_1 + y_2 &= -1 \\ x_1x_2 - y_1y_2 &= 4 \\ x_1y_2 + x_2y_1 &= -3 \end{cases}$$

B.Chương trình nâng cao

Câu VI.b (2 điểm)

1. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hình thoi $ABCD$ có tâm $I(2;1)$ và $AC = 2BD$. Điểm $M\left(0;\frac{1}{3}\right)$ thuộc đường thẳng AB, điểm $N(0;7)$ thuộc đường thẳng CD. Tìm tọa độ đỉnh B biết B có hoành độ dương.

2. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho hai đường thẳng

$(d_1): \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+2}{1} = \dfrac{z-2}{-2}$, $(d_2): \begin{cases} x = 2 - t \\ y = 3 + t \\ z = 4 + t \end{cases}$ và mặt phẳng $(\alpha): x - y + z - 6 = 0$.

Tìm trên (d_2) những điểm M sao cho đường thẳng qua M song song với (d_1), cắt (α) tại N sao cho $MN = 3$.

Đáp án đề thi thử số 4

Ngày 8 tháng 3 năm 2012

PHẦN CHUNG CHO TẤT CẢ CÁC THÍ SINH*(7,0 điểm)*

Câu I (2 điểm) Cho hàm số $y = 2x^3 - 3(2m+1)x^2 + 6m(m+1)x + 1$ với m là tham số.

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số khi $m = 1$.

Lời giải : Với $m = 1 : y = 2x^3 - 9x^2 + 12x + 1$

- Tập xác định : $\mathbb{R}$
- Sự biến thiên :

+ Chiều biến thiên :

– Ta có : $y' = 6x^2 - 18x + 12$. Do đó $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 2 \end{array}\right.$.

– Hàm số đồng biến trên từng khoảng $(-\infty; 1)$ và $(2; +\infty)$.

– Hàm số nghịch biến trong $(1; 2)$.

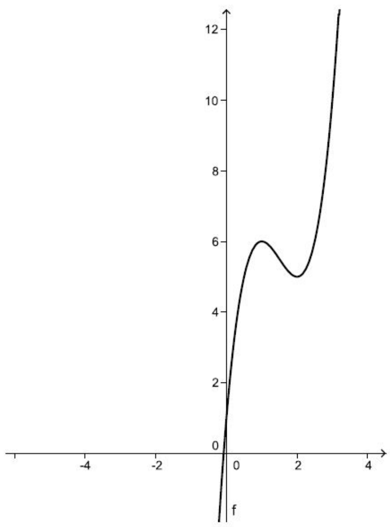
+ Cực trị : Hàm số đạt cực đại tại $x_{\text{CĐ}} = 1; y_{\text{CĐ}} = 6$ và hàm số đạt cực tiểu tại $x_{\text{CT}} = 2; y_{\text{CT}} = 5$.

+ Giới hạn : $\lim_{x\to+\infty} y = +\infty; \lim_{x\to-\infty} y = -\infty$. Đồ thị hàm số không có đường tiệm cận.

+ Bảng biến thiên :

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	6	$\searrow$	5	$\nearrow$	$+\infty$

- Đồ thị hàm số :



□

2. Chứng minh rằng với mọi giá trị của m, hàm số đã cho luôn có cực đại, cực tiểu. Tìm m để giá trị cực đại của hàm số lớn hơn 1.

Lời giải : Đặt hàm số đã cho là $y = f(x)$. Ta có :

$$f'(x) = 6x^2 - 6(2m+1)x + 6m(m+1)$$
$$\Delta' = 9(2m+1)^2 - 36m(m+1) = 9 > 0, \forall m$$

Vậy hàm số đã cho luôn có cực đại và cực tiểu với mọi m. Phương trình $f'(x) = 0$ có nghiệm là :

$$x = m; x = m+1$$

Dễ thấy $x_{\text{CĐ}} = m$. Do đó

$$f\left(x_{\text{CĐ}}\right) = 2m^3 + 3m^2 + 1$$

Điều kiện của bài toán tương đương với :

$$2m^3 + 3m^2 + 1 > 1 \Leftrightarrow m^2(2m+3) > 0 \Leftrightarrow 0 \neq m > -\frac{3}{2}$$

□

Câu II ***(2,0 điểm)***

1. Giải phương trình : $2\cos\left(3x + \dfrac{\pi}{3}\right) = \cos x + 2\sin x$

Lời giải : Viết lại phương trình như sau :

$$\begin{aligned}
&\cos 3x - \sqrt{3}\sin 3x = \cos x + 2\sin x \\
\Leftrightarrow &(4\cos^3 x - 3\cos x) - \sqrt{3}(3\sin x - 4\sin^3 x) = \cos x + 2\sin x \\
\Leftrightarrow &4\cos^3 x + 4\sqrt{3}\sin^3 x = \left[4\cos x + \left(2 + 3\sqrt{3}\right)\sin x\right]\left(\sin^2 x + \cos^2 x\right) \\
\Leftrightarrow &\left(2 - \sqrt{3}\right)\sin^3 x + 4\sin^2 x\cos x + \left(2 + \sqrt{3}\right)\sin x\cos^2 x = 0
\end{aligned}$$

Chia cả hai vế cho $\cos^3 x \neq 0$ ta được :

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \left(2 - \sqrt{3}\right)\tan^3 x + 4\tan^2 x + \left(2 + \sqrt{3}\right)\tan x = 0 \\
&\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \tan x = 0 \\ \left(2 - \sqrt{3}\right)\tan^2 x + 4\tan x + \left(2 + \sqrt{3}\right) = 0 \end{array}\right. \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad ....
\end{aligned}$$

□

2. Giải phương trình : $x^3 - 1 = \sqrt{x}(-3x^2 + 5x - 3)$

Lời giải : Phương trình đã cho tương đương với :

$$\begin{aligned} &(x-1)(x^2+x+1) = -\sqrt{3}x(x^2+x+1) + 8x\sqrt{x} \\ \Leftrightarrow &(x-1+3\sqrt{x})(x^2+x+1) = 8x\sqrt{x} \end{aligned}$$

Suy ra :

$$\left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} + 3\right)\left(x + \frac{1}{x} + 1\right) = 8$$

Đặt $t = \sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}$, khi đó phương trình trở thành :

$$(t+3)(t^2+3) = 8 \Rightarrow (t+1)^3 = 0 \Rightarrow t = -1$$

...

□

Câu III (1 điểm) Tính tích phân :

$$I = \int_0^{\ln 9} \sqrt{\frac{e^x}{\sqrt{e^x}+1}}dx$$

Lời giải : Đặt $u = e^{\frac{x}{2}}$ ta có : $2du = e^{\frac{x}{2}}dx$

Đổi cận : $x = 0 \Rightarrow u = 1; x = \ln 9 \Rightarrow u = 3.$

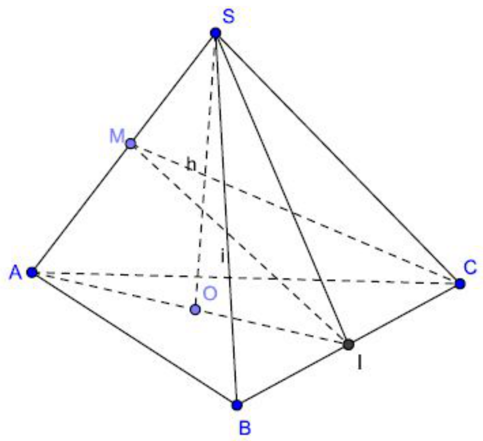
Từ đó ta có :

$$\begin{aligned} &I = \int_0^{\ln 9} \sqrt{\frac{e^x}{\sqrt{e^x}+1}}dx = \int_1^3 \frac{2du}{\sqrt{u+1}} = \int_1^3 \frac{2d(u+1)}{\sqrt{u+1}} \\ &I = 8 - 4\sqrt{2} \end{aligned}$$

□

Câu IV (1 điểm) Cho hình chóp $S.ABC$ có góc nhị diện của hai mặt phẳng (SBC) và (ABC) bằng 60^0. Tam giác ABC và SBC đều cạnh a. Tính theo a khoảng cách từ B đến mặt phẳng (SAC).

Lời giải :



Lời giải.

Gọi I là trung điểm của BC.

Ta có : ΔABC đều suy ra $AI \perp BC$ và ΔSBC đều suy ra $SI \perp BC$. Vậy $\widehat{SIA} = 60^0$
Do đó ΔSIA đều có cạnh $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Suy ra

$$S_{\Delta SIA} = \frac{1}{2} AI.SI.\sin 60^0 = \frac{1}{2}\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3a^2\sqrt{3}}{16}$$

Ta có :

$$\frac{V_{B.SAI}}{V_{B.SAC}} = \frac{BI}{BC} = \frac{1}{2} \text{ suy ra } V_{B.SAC} = 2V_{B.SAI} = \frac{2}{3} BI.S_{\Delta SIA} = \frac{2}{3}\left(\frac{a}{2}\right)\frac{3a^2\sqrt{3}}{16} = \frac{a^3\sqrt{3}}{16}$$

Gọi M là trung điểm của SA. Tam giác SAC cân tại C có $CS = CA = a, SA = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$
Suy ra

$$CM^2 = CA^2 - AM^2 = a^2 - \left(\frac{a\sqrt{3}}{4}\right)^2 = \frac{13a^2}{16} \Rightarrow CM = \frac{a\sqrt{13}}{4}$$

Do đó

$$S_{\Delta SAC} = \frac{1}{2} CM.SA = \frac{1}{2}.\frac{a\sqrt{13}}{4}.\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a^2\sqrt{39}}{16}$$

Mặt khác :

$$V_{B.SAC} = \frac{1}{3} d\left(B, (SAC)\right) S_{\Delta SAC}. \text{ Do đó } d\left(B, (SAC)\right) = \frac{3V_{B.SAC}}{S_{\Delta SAC}} = \frac{3a^3\sqrt{3}}{16}.\frac{16}{a^2\sqrt{39}} = \frac{3a}{\sqrt{13}}$$

□

Câu V(1 điểm) Cho x, y, z là các số thực dương thỏa $xyz = 1$. Chứng minh rằng :

$$\frac{1}{(1+x)^3} + \frac{1}{(1+y)^3} + \frac{1}{(1+z)^3} \geqslant \frac{3}{8}$$

Lời giải : Ta có :

$$\frac{1}{(1+x)^3} + \frac{1}{(1+x)^3} + \frac{1}{8} \geqslant \frac{3}{2}\frac{1}{(1+x)^2}$$

Tương tự, ta được :

$$2VT \geqslant \frac{3}{2}\left[\frac{1}{(1+x)^2} + \frac{1}{(1+y)^2} + \frac{1}{(1+z)^2}\right] - \frac{3}{8}$$

Do đó ta cần chứng minh :

$$\frac{1}{(1+x)^2} + \frac{1}{(1+y)^2} + \frac{1}{(1+z)^2} \geqslant \frac{3}{4} \qquad (1)$$

Ta có $xyz = 1$ nên có thể giả sử $xy \geqslant 1$. Khi đó ta có :

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+y^2} \geqslant \frac{2}{1+xy} \qquad (2)\\
&\Leftrightarrow 2xy + \left(x^2+y^2\right)xy \geqslant x^2 + y^2 + 2x^2y^2\\
&\Leftrightarrow 2xy\,(1-xy) + \left(x^2+y^2\right)(xy-1) \geqslant 0\\
&\Leftrightarrow (xy-1)\,(x-y)^2 \geqslant 0 \ \left(\text{đúng do } \ xy \geqslant 1\right)
\end{aligned}$$

Áp dụng (2) ta được :

$$\begin{aligned}
VT_{(1)} &\geqslant \frac{1}{2\left(1+x^2\right)} + \frac{1}{2\left(1+y^2\right)} + \frac{1}{(1+z)^2} \quad \left(\text{vì } 2\left(1+x^2\right) \geqslant (1+x)^2, 2\left(1+y^2\right) \geqslant (1+y)^2\right)\\
&\geqslant \frac{1}{2}\left(\frac{2}{1+xy}\right) + \frac{1}{(1+z)^2} = \frac{1}{1+\frac{1}{z}} + \frac{1}{(1+z)^2} = \frac{z}{z+1} + \frac{1}{(1+z)^2}\\
&= \frac{z^2+z+1}{(1+z)^2} = \frac{4z^2+4z+4}{4(1+z)^2} = \frac{3(1+z)^2+(z-1)^2}{4(1+z)^2} = \frac{3}{4} + \frac{(z-1)^2}{4(1+z)^2} \geqslant \frac{3}{4}
\end{aligned}$$

Vậy (1) đúng. Suy ra bất đẳng thức đã cho được chứng minh hoàn toàn.
Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z = 1$ □

PHẦN RIÊNG *(3,0 điểm)*

Câu VI.a (2 điểm)

1. Viết phương trình đường tròn đi qua giao điểm của $x^2 + y^2 - 10x = 0$ và $x^2 + y^2 + 4x - 2y - 20 = 0$ và có tâm trên $x + 6y - 6 = 0$

   Lời giải : Theo giả thiết hai đường tròn cắt nhau tại hai giao điểm. Do đó tọa độ giao điểm của hai đường tròn đã cho là nghiệm của hệ phương trình sau :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 10x = 0\\ x^2 + y^2 + 4x - 2y - 20 = 0\end{cases}$$

tương đương

$$\begin{cases} 7x - y - 10 = 0 & (1) \\ x^2 + y^2 - 10x = 0 & (2) \end{cases}$$

Từ (1) và (2) ta có phương trình

$$x^2 + (7x - 10)^2 - 10x = 0$$

tương đương

$$50x^2 - 150x + 100 = 0$$

Vậy phương trình có 2 nghiệm $x = 1$ và $x = 2$. Với $x = 1$ ta được $y = 4$. Gọi $A(1, 4)$. Với $x = 2$ ta được $y = -3$. Gọi $B(1, -3)$. Đường tròn cần tìm qua 2 điểm A, B nên tâm I của đường tròn nằm trên đường trung trực Δ của AB. Gọi M là trung điểm của AB khi đó $M\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$. Đường trung trực Δ của ABqua $M\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$ nhận vec tơ $\overrightarrow{AB} = (-1; -7) = -(1; 7)$ làm vectow pháp tuyến nên có phương trình

$$1\left(x - \frac{3}{2}\right) + 7\left(y - \frac{1}{2}\right) = 0$$

tương đương

$$x + 7y - 5 = 0$$

Tọa độ tâm I là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} x + 6y - 6 = 0 \\ x + 7y - 5 = 0 \end{cases}$$

giải ra $x = 12; y = -1$. Đường tròn cần tìm có bán kính $R = IA = \sqrt{(2-12)^2 + (4+1)^2} = 5\sqrt{5}$, tâm $I(12, -1)$ nên có phương trình

$$(x - 12)^2 + (y + 1)^2 = 125$$

□

2. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho điểm $A(-1; 1; 2), B(3; 5; -2)$ và mặt phẳng $(P) : x - 2y + 2z - 4 = 0$. Viết phương trình mặt phẳng đi qua A, B và tạo với (P) một góc 45^0.

   Lời giải : Gọi mp(Q) là mặt phẳng cần tìm khi đó mp(Q) có phương trình dạng $Ax + By + Cz + D = 0$ với $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$. Khi đó mp(Q) có vec tơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_Q}(A, B, C)$. Theo giả thiết ta có vec tơ pháp tuyến mp(P) là $\overrightarrow{n_P}(1; -2; 2)$ và $\overrightarrow{AB} = (4, 4, -4)$ Vì góc giữa mp(P) và mp(Q) là 45^0 nên ta có :

$$\cos 45^0 = \frac{|A - 2B + 2C|}{\sqrt{A^2 + B^2 + c^2}\sqrt{1^2 + (-2)^2 + 2^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

   tương đương

$$2\left|A - 2B + 2C\right| = 3\sqrt{2(A^2 + B^2 + C^2)} \qquad (1)$$

mặt khác vì mp(Q) qua hai điểm A,B nên

$$\overrightarrow{AB}\overrightarrow{n_Q} = 0 \Leftrightarrow 4A + 4B - 4C = 0 \Leftrightarrow A + B = C \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có :

$$2\left|A - 2B + 2(A+B)\right| = 3\sqrt{2(A^2 + B^2 + (A+B)^2)}$$

tương đương

$$2A^2 = 2A^2 + 2AB + 2B^2$$

Giải ra được $B = 0$ hoặc $B = -A$. Với $B = 0$ ta có : $A = C$, Chọn $A = C = 1$ ta được phương trình mp(Q) : $x + z + D = 0$ vì (Q) qua $A(-1, 1, 2)$ nên ta có $-1 + 2 + D = 0$ hay $D = -1$. vậy ta có phương trình mp(Q) là $x + z - 1 = 0$. Với $A = -B$ ta có $C = 0$. Chon $A = -B = 1$ ta có phương trình mặt phẳng (Q) có dạng $x - y + D = 0$ vì (Q) qua $A(-1, 1, 2)$ nên ta có $-1 - 1 + D = 0$ hay $D = 2$. vậy ta có phương trình mp(Q) là $x - y + 2 = 0$. Tóm lại có 2 mặt phẳng thỏa mãn bài toán là : $mp(Q_1) : x + z - 1 = 0$. và $mp(Q_2) : x - y + 2 = 0$ □

Câu VII.a (1 điểm) Giải hệ phương trình :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 3 \\ y_1 + y_2 = -1 \\ x_1x_2 - y_1y_2 = 4 \\ x_1y_2 + x_2y_1 = -3 \end{cases}$$

Lời giải : Xét 2 số phức : $z_1 = x_1 + y_1 i$ và $z_2 = x_2 + y_2 i$

Ta có : $z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)i = 3 - i$ và $z_1.z_2 = (x_1x_2 - y_1y_2) + (x_1y_2 + x_2y_1)i = 4 - 3i$

Như vậy, theo định lý Vi-et : $z_1;\ z_2$ là các nghiệm của phương trình :

$$z^2 - (3-i)z + (4-3i) = 0 \quad (1)$$

Ta có : $\Delta = (3-i)^2 - 4(4-3i) = -8 + 6i = (1+3i)^2$

Do đó ta có : $\sqrt{\Delta} = \pm(1+3i)$

Hai nghiệm của phương trình (1) là $z = \dfrac{3 - i + 1 + 3i}{2} = 2 + i$ hoặc $z = \dfrac{3 - i - 1 - 3i}{2} = 1 - 2i$

Tương ứng, hệ phương trình đã cho có 2 nghiệm là : $(x_1 = 2;\ x_2 = 1;\ y_1 = 1;\ y_2 = -2)$ hoặc $(x_1 = 1;\ x_2 = 2;\ y_1 = -2;\ y_2 = 1)$ □

Câu VI.b (2 điểm)

1. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hình thoi $ABCD$ có tâm $I(2;1)$ và $AC = 2BD$. Điểm $M\left(0;\frac{1}{3}\right)$ thuộc đường thẳng AB, điểm $N(0;7)$ thuộc đường thẳng CD. Tìm tọa độ đỉnh B biết B có hoành độ dương.

   Lời giải : Gọi N' là điểm đối xứng của N qua I thì N' thuộc AB, ta có :
   $\begin{cases} x_{N'} = 2x_I - x_N = 4 \\ y_{N'} = 2y_I - y_N = -5 \end{cases}$ suy ra $N'(4;-5)$
   Phương trình đường thẳng AB : $4x + 3y - 1 = 0$

Khoảng cách từ I đến đường thẳng AB : $d(I,AB) = \dfrac{|4.2+3.1-1|}{\sqrt{4^2+3^2}} = 2$

Ta có $AC = 2BD$ suy ra $AI = 2BI$. Đặt $BI = x, AI = 2x$. Trong tam giác vuông ABI, ta có :

$$\frac{1}{[d(I,AB)]^2} = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{4x^2} \text{ suy ra } x = \sqrt{5} \text{ suy ra } BI = \sqrt{5}$$

Do đó B là giao điểm của đường thẳng AB với đường tròn tâm I bán kính $\sqrt{5}$

Tọa độ B là nghiệm của hệ phương trình :

$\begin{cases} 4x+3y-1=0 \\ (x-2)^2+(y-1)^2=5 \end{cases}$ suy ra $\begin{cases} x=1 \\ y=-1 \end{cases}$ vì $x_B > 0$

Vậy tọa độ của đỉnh B là $B(1;-1)$ □

2. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho hai đường thẳng (d_1) : $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+2}{1} = \dfrac{z-2}{-2}$, (d_2) : $\begin{cases} x = 2-t \\ y = 3+t \\ z = 4+t \end{cases}$ và mặt phẳng (α) : $x-y+z-6=0$. Tìm trên (d_2) những điểm M sao cho đường thẳng qua M song song với (d_1), cắt (α) tại N sao cho $MN = 3$.

Lời giải : Ta có : $M \in (d_2)$ suy ra $M(2-m;3+m;4+m)$

Đường thẳng (d) qua M và song song với (d_1) nên (d) : $\begin{cases} x = 2-m+2t \\ y = 3+m+t \\ z = 4+m-2t \end{cases}$

Lại có $N = (d) \cap (\alpha)$ nên tọa độ của điểm N thỏa mãn hệ phương trình :

$$\begin{cases} x = 2-m+2t \\ y = 3+m+t \\ z = 4+m-2t \\ x-y+z-6=0 \end{cases} \Rightarrow t = -3-m \quad \Rightarrow \quad N(-3m-4;0;3m+10)$$

Suy ra :

$$\overrightarrow{NM} = (6+2m;3+m;-2m-6) \Rightarrow NM^2 = (2m+6)^2 + (m+3)^2 + (-2m-6)^2$$

Do đó :

$$MN = 3 \Leftrightarrow 9(m+3)^2 = 9 \Leftrightarrow m+3 = \pm 1 \Leftrightarrow m = -2 \text{ hoặc } m = -4$$

Vậy tồn tại hai điểm M thỏa mãn bài toán : $M_1(4;1;2)$, $M_2(6;-1;0)$ □

Câu VII.b (1 điểm) Giải hệ bất phương trình : $\begin{cases} 3^{|x^2-2x-3|-\log_3 5} = 5^{-y-4} \\ 4|y| - |y-1| + (y+3)^2 \le 8 \end{cases}$

Lời giải : Phương trình thứ nhất tương đương với :

$$3^{|x^2-2x-3|}.3^{-\log_3 5} = 5^{-y-4} \Leftrightarrow 3^{|x^2-2x-3|}.5^{-1} = 5^{-y-4} \Leftrightarrow 3^{|x^2-2x-3|} = 5^{-y-3}$$

$$\Leftrightarrow 5^{-y-3} = 3^{\left|x^2-2x-3\right|} \geq 3^0 \Rightarrow -y-3 \geq 0 \Rightarrow y \leq -3 \qquad (1)$$

Do đó, bất phương trình thứ hai tương đương với :

$$-4y + y - 1 + y^2 + 6y + 9 \leq 8 \Leftrightarrow y^2 + 3y \leq 0 \Leftrightarrow -3 \leq y \leq 0 \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $y = -3$

Thay vào phương trình thứ nhất của hệ, ta có :

$$3^{\left|x^2-2x-3\right| - \log_3 5} = 5^{-1} \Leftrightarrow 3^{\left|x^2-2x-3\right|} = 1 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 3 \end{array} \right.$$

Vậy hệ đã cho có hai nghiệm : $(x; y) = (-1; -3), (3; -3)$ $\square$

VMF - ĐỀ THI THỬ ĐẠI HỌC SỐ 5 - MÔN TOÁN

Ngày 5 tháng 3 năm 2012

(Thời gian làm bài 180 phút không kể thời gian giao đề)

PHẦN CHUNG: (Dành cho tất cả các thí sinh) (7 điểm)

Câu I (2 điểm)

Cho hàm số $y = \dfrac{x-1}{2(x+1)}$

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số.

2. Tìm những điểm M trên (C) sao cho tiếp tuyến với (C) tại M tạo với hai trục tọa độ một tam giác có trọng tâm nằm trên đường thẳng $4x + y = 0$.

Câu II (2 điểm)

1. Giải phương trình: $\cos^2 3x + \cos^2 x + 3\cos^2 2x + \cos 2x = 2$

2. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2 + y^2 - xy + 4y + 1 = 0 \\ y\left[7 - (x-y)^2\right] = 2\left(x^2+1\right) \end{cases}$

Câu III (1 điểm)

Tính tích phân:

$$I = \int_0^1 \frac{x^3}{x + \sqrt{x^2+1}} dx$$

Câu IV (1 điểm)

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a. $\widehat{BAD} = 60^0$. SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$, $SA = a$. Gọi C' là trung điểm của SC. Mặt phẳng (P) đi qua AC' và song song BD, cắt các cạnh SB, SD của hình chóp lần lượt tại B', D'. Tính thể tích khối chóp $S.AB'C'D'$.

Câu V(1 điểm)

Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 = 12$. Chứng minh rằng:

$$a\sqrt[3]{b^2+c^2} + b\sqrt[3]{c^2+a^2} + c\sqrt[3]{a^2+b^2} \leq 12$$

PHẦN RIÊNG: (Thí sinh chỉ được chọn một trong hai phần: A hoặc B)(3 điểm)

A. Chương trình chuẩn:

Câu VI.a (2 điểm)

1. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho đường tròn $(C): x^2 + y^2 - 2x + 4y + 2 = 0$. Viết phương trình đường tròn (C') tâm $I(5;1)$ biết (C') cắt (C) tại các điểm A, B sao cho $AB = \sqrt{3}$

2. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \dfrac{x-3}{2} = \dfrac{y+2}{1} = \dfrac{z+1}{-1}$ và mặt phẳng (P): $x + y + z + 2 = 0$. Gọi M là giao điểm của d và (P). Viết phương trình đường thẳng Δ nằm trong (P) sao cho Δ vuông góc với d và khoảng cách từ M đến Δ bằng $\sqrt{42}$.

Câu VII.a (1 điểm)

Chứng minh rằng nếu các số phức z_1, z_2 thỏa $|z_1 + z_2| = |z_1|\sqrt{2}$ thì $|z_1 - z_2| = |z_2|\sqrt{2}$

B.Chương trình nâng cao

Câu VI.b (2 điểm)

1. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có đỉnh $A(0;4)$, trọng tâm $G\left(\dfrac{4}{3};\dfrac{2}{3}\right)$ và trực tâm trùng với gốc tọa độ. Tìm tọa độ các đỉnh B, C và diện tích tam giác ABC biết $x_B < x_C$

2. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d_1: \dfrac{x-3}{2} = \dfrac{y-3}{2} = \dfrac{z-3}{1}$
d_2 là giao tuyến của hai mặt phẳng $(P): 5x - 6y - 6z + 13 = 0$ và $(Q): x - 6y + 6z - 7 = 0$. Gọi I là giao điểm của d_1 và d_2. Tìm các điểm A, B lần lượt thuộc d_1, d_2 sao cho tam giác IAB cân tại I và có diện tích bằng $\dfrac{\sqrt{41}}{42}$.

Đáp án đề thi thử số 5

Ngày 5 tháng 4 năm 2012

PHẦN CHUNG CHO TẤT CẢ CÁC THÍ SINH *(7,0 điểm)*

Câu I (2 điểm) Cho hàm số $y = \dfrac{x-1}{2(x+1)}$

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số.

Lời giải :

- Tập xác định : $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$
- Sự biến thiên :
  + Chiều biến thiên :
    – Ta có : $y' = \frac{1}{(x+1)^2} > 0 \;\; \forall x \in D$.
    – Hàm số đồng biến trên mỗi khoảng $(-\infty; -1)$ và $(-1; +\infty)$
  + Cực trị : hàm số không có cực trị.
  + Giới hạn, tiệm cận :

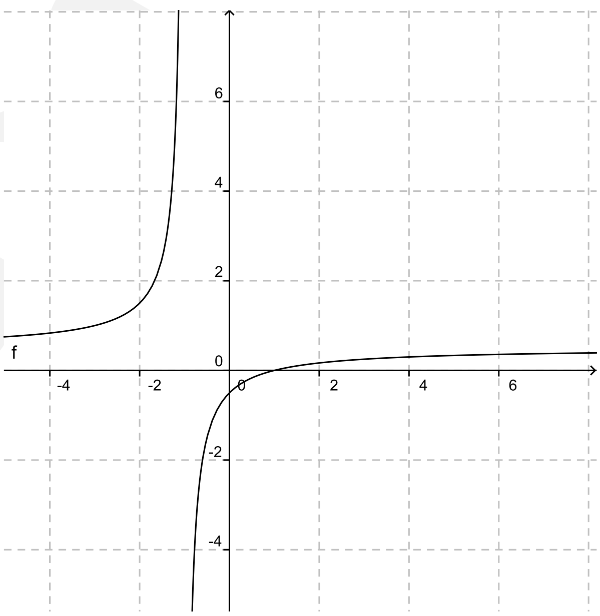
$$\lim_{x \to +\infty} y = \frac{1}{2}, \;\; \lim_{x \to -\infty} y = \frac{1}{2}; \quad \lim_{x \to (-1)^+} y = -\infty, \quad \lim_{x \to (-1)^-} y = +\infty$$

Suy ra đường thẳng $y = \frac{1}{2}$ là tiệm cận ngang; đường thẳng $x = -1$ là tiệm cận đứng.

  + Bảng biến thiên :

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	$\Vert$	$+$	
$f(x)$	$\frac{1}{2}$	$\nearrow$ $+\infty$	$\Vert$	$-\infty$ $\nearrow$	$\frac{1}{2}$

- Đồ thị : đồ thị hàm số đi qua các điểm $\left(0; -\frac{1}{2}\right)$; $\left(-2; \frac{3}{2}\right)$; $(1; 0)$.



Đồ thị hàm số nhận giao điểm $I\left(-1;\frac{1}{2}\right)$ của hai tiệm cận làm tâm đối xứng. ■

2. Tìm những điểm M trên (C) sao cho tiếp tuyến với (C) tại M tạo với hai trục tọa độ một tam giác có trọng tâm nằm trên đường thẳng $4x+y=0$.

Lời giải : Gọi $M\left(x_0;\dfrac{x_0-1}{2\left(x_0+1\right)}\right)\in(C)$ là điểm cần tìm.

Gọi Δ là tiếp tuyến với (C) tại M có phương trình :

$$\Delta: y=f'\left(x_0\right)\left(x-x_0\right)+\frac{x_0-1}{2\left(x_0+1\right)}\Rightarrow y=\frac{1}{\left(x_0+1\right)^2}\left(x-x_0\right)+\frac{x_0-1}{2\left(x_0+1\right)}$$

Gọi $A=\Delta\cap Ox\Rightarrow A\left(-\dfrac{x_0^2-2x_0-1}{2};0\right)$; $B=\Delta\cap Ox\Rightarrow B\left(0;\dfrac{x_0^2-2x_0-1}{2(x_0+1)^2}\right)$

Khi đó Δ tạo với hai trục tọa độ tam giác OAB có trọng tâm là

$$G\left(-\frac{x_0^2-2x_0-1}{6};\frac{x_0^2-2x_0-1}{6(x_0+1)^2}\right)$$

Do G thuộc đường thẳng $4x+y=0$ nên $-4\left(\dfrac{x_0^2-2x_0-1}{6}\right)+\dfrac{x_0^2-2x_0-1}{6(x_0+1)^2}=0$

Suy ra

$$4=\frac{1}{\left(x_0+1\right)^2}\qquad\left(\text{vì } A,B\neq O\ \text{ nên }\ x_0^2-2x_0-1\neq0\right)$$

Do đó :

$$\left[\begin{array}{l}x_0+1=\dfrac{1}{2}\\ x_0+1=-\dfrac{1}{2}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_0=-\dfrac{1}{2}\\ x_0=-\dfrac{3}{2}\end{array}\right.$$

– Với $x_0=-\dfrac{1}{2}\Rightarrow M\left(-\dfrac{1}{2};-\dfrac{3}{2}\right)$

– Với $x_0=-\dfrac{3}{2}\Rightarrow M\left(-\dfrac{3}{2};\dfrac{5}{2}\right)$

Vậy tồn tại 2 điểm M thỏa mãn yêu cầu bài toán là $M_1\left(-\dfrac{1}{2};-\dfrac{3}{2}\right)$; $M_2\left(-\dfrac{3}{2};\dfrac{5}{2}\right)$ ■

Câu II ***(2,0 điểm)***

1. Giải phương trình : $\cos^2 3x+\cos^2 x+3\cos^2 2x+\cos 2x=2$

Lời giải : Viết lại phương trình đã cho như sau :

$$\begin{aligned}&\frac{1+\cos 6x}{2}+\frac{1+\cos 2x}{2}+3\cos^2 2x+\cos 2x=2\\ \Leftrightarrow&\cos 6x+\cos 2x+6\cos^2 2x+2\cos 2x=2\\ \Leftrightarrow&4\cos^3 2x-3\cos 2x+\cos 2x+6\cos^2 2x+2\cos 2x=2\\ \Leftrightarrow&4\cos^3 2x+6\cos^2 2x-2=0\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos 2x = \dfrac{1}{2} \\ \cos 2x = -1 \end{array}\right.$$

Giải ra được $\cos 2x = \dfrac{1}{2}$ hoặc $\cos 2x = -1$
Với $\cos 2x = \dfrac{1}{2}$ ta được $x = \pm\dfrac{\pi}{6} + k2\pi, k \in Z$
Với $\cos 2x = -1$ ta được $x = \pi + k2\pi, k \in Z$
Kết luận : Phương trình đã cho có ba họ nghiệm :$x = \pm\dfrac{\pi}{6} + k2\pi$,$x = \pi + k2\pi, k \in Z$
■

2. Giải hệ phương trình : $\begin{cases} x^2 + y^2 - xy + 4y + 1 = 0 \\ y\left[7 - (x-y)^2\right] = 2\left(x^2 + 1\right) \end{cases}$

Lời giải : Hệ phương trình đã cho tương đương với :

$$\begin{cases} y^2 - xy = -x^2 + 4y - 1 \\ 7y - y(x-y)^2 = 2x^2 + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2y\,(x-y) = -2x^2 + 8y - 2 & (1) \\ -y\,(x-y)\,(x-y) = 2x^2 - 7y + 2 & (2) \end{cases}$$

Cộng (1) và (2) ta được :

$$-y\,(x-y)\,(2+x-y) = -15y \Rightarrow (x-y)\,(x-y+2) = 15$$
$$\big(\text{do } \ y \neq 0 \quad \text{vì } \ y = 0 \ \text{ thì } \ (1) \Leftrightarrow x^2 + 1 = 0 \ \ (\text{vô lí })\big)$$

Suy ra : $x - y = 3$ hoặc $x - y = -5$
– Với $x - y = 3$ suy ra $x = y + 3$, khi đó phương trình (1) tương đương với :

$$\begin{aligned} (1) &\Leftrightarrow -6y = -2(y+3)^2 - 8y - 2 \\ &\Leftrightarrow y^2 + 7y + 10 = 0 \\ &\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = -2 \Rightarrow x = 1 \\ y = -5 \Rightarrow x = -2 \end{array}\right. \end{aligned}$$

– Với $x - y = -5$ suy ra $x = y - 5$, khi đó phương trình (1) tương đương với :

$$(1) \Leftrightarrow 10y = -2(y-5)^2 - 8y - 2 \Leftrightarrow 2y^2 - 2y + 52 = 0 \ \ (\text{vô nghiệm})$$

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm là $(x;y) = \{(-2;-5)\,;(1;-2)\}$
■

Câu III (1 điểm) Tính tích phân :

$$I = \int_0^1 \frac{x^3}{x + \sqrt{x^2+1}}dx$$

Lời giải : Biến đổi I về dạng :

$$I = \int_0^1 x^3\left(\sqrt{x^2+1} - x\right)dx = \int_0^1 x^3\sqrt{x^2+1}dx - \int_0^1 x^4 dx$$

– Tính tích phân : $I_1 = \int\limits_0^1 x^3\sqrt{x^2+1}dx$ Đặt $t = \sqrt{x^2+1} \Rightarrow t^2 = x^2+1$, suy ra :

$$\begin{cases} tdt = xdx \\ x^3\sqrt{x^2+1}dx = (t^2-1)\,t^2dt = (t^4-t^2)\,dt \end{cases}$$

Đổi cận : Với $x = 0$ thì $t = 1$. Với $x = 1$ thì $t = \sqrt{2}$.
Khi đó :

$$I_1 = \int\limits_1^{\sqrt{2}} (t^4-t^2)\,dt = \left(\frac{1}{5}t^5 - \frac{1}{3}t^3\right)\Big|_1^{\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}+2}{15}$$

– Tính tích phân : $I_2 = \int\limits_0^1 x^4dx = \frac{1}{5}x^5\Big|_0^1 = \frac{1}{5}$

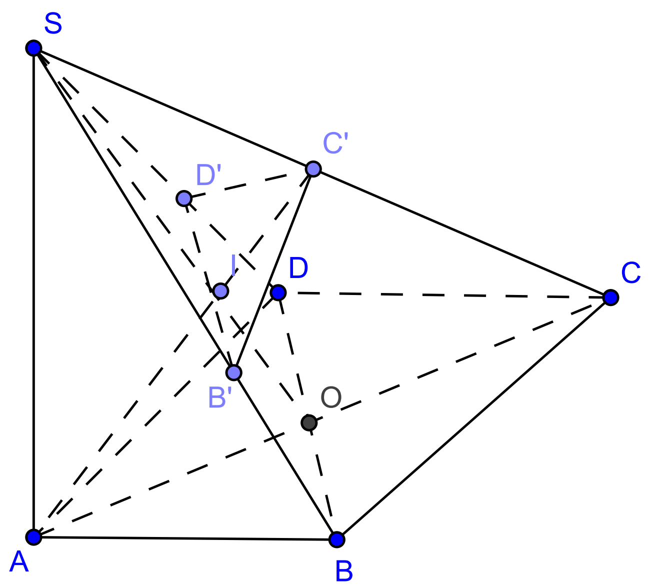
Do đó :

$$I = I_1 - I_2 = \frac{2\sqrt{2}+2}{15} - \frac{1}{5} = \frac{2\sqrt{2}-1}{15}$$

■

Câu IV (1 điểm) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a. $\widehat{BAD} = 60^0$. SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$, $SA = a$. Gọi C' là trung điểm của SC. Mặt phẳng (P) đi qua AC' và song song BD, cắt các cạnh SB, SD của hình chóp lần lượt tại B', D'. Tính thể tích khối chóp $S.AB'C'D'$.

Lời giải :



Gọi O là giao điểm của AC và BD. Hình thoi $ABCD$ có $\widehat{BAD} = 60^0$ nên tam giác ABD đều cạnh a.

Suy ra :

$$AO = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow AC = 2AO = a\sqrt{3}$$

Do đó :

$$SC^2 = SA^2 + AC^2 = a^2 + 3a^2 = 4a^2 \Rightarrow SC = 2a$$

Tam giác SAC vuông tại A, trung tuyến $AC' = \dfrac{SC}{2} = a$ suy ra tam giác SAC' đều cạnh a.

Gọi I là giao điểm của AC' và $B'D'$, suy ra I là trọng tâm tam giác SAC.

Khi đó

$$\frac{SI}{SO} = \frac{2}{3} \Rightarrow B'D' = \frac{2}{3}BD = \frac{2}{3}a$$

Ta có $B'D' \perp AC'$ (do $B'D'//BD$) nên $S_{AB'C'D'} = \dfrac{1}{2}AC'.B'D' = \dfrac{1}{2}.a.\dfrac{2}{3}a = \dfrac{a^2}{3}$

Gọi H là hình chiếu của S trên AC' thì $SH \perp B'D'$ nên $SH \perp (AB'C'D')$

Mặt khác, tam giác SAC' đều nên $SH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$

Vậy $V_{S.AB'C'D'} = \dfrac{1}{3}SH.S_{AB'C'D'} = \dfrac{1}{3}.\dfrac{a\sqrt{3}}{2}.\dfrac{a^2}{3} = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{18}$ (đvtt)

■

Câu V(1 điểm) Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 = 12$. Chứng minh rằng :

$$a\sqrt[3]{b^2 + c^2} + b\sqrt[3]{c^2 + a^2} + c\sqrt[3]{a^2 + b^2} \leq 12$$

Lời giải : Từ giả thiết ta có :

$$(a + b + c)^2 \leq 3(a^2 + b^2 + c^2) = 36$$

vậy

$$a + b + c \leq 6$$

Áp dụng bất đẳng thức Co Si ta có :

$$\left(b^2 + c^2\right) + 2a^2 + 4a \geq 6a\sqrt[3]{b^2 + c^2}$$

$$\left(c^2 + a^2\right) + 2b^2 + 4b \geq 6b\sqrt[3]{c^2 + a^2}$$

$$\left(a^2 + b^2\right) + 2c^2 + 4c \geq 6c\sqrt[3]{a^2 + b^2}$$

Cộng ba bất đẳng thức trên ta được

$$a\sqrt[3]{b^2 + c^2} + b\sqrt[3]{c^2 + a^2} + c\sqrt[3]{a^2 + b^2} \leq \frac{4(a^2 + b^2 + c^2) + 4(a + b + c))}{6} \leq \frac{4.12 + 4.6}{6} = 12$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 2$ ■

PHẦN RIÊNG ***(3,0 điểm)***

Câu VI.a (2 điểm)

1. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho đường tròn $(C): x^2+y^2-2x+4y+2=0$. Viết phương trình đường tròn (C') tâm $I(5;1)$ biết (C') cắt (C) tại các điểm A, B sao cho $AB=\sqrt{3}$

Lời giải : Phương trình đường tròn $(C): x^2+y^2-2x+4y+2=0$ có tâm $J(1;-2)$, bán kính $R=\sqrt{3}$.
Đường tròn (C') tâm $I(5;1)$ cắt đường tròn (C) tại A, B nên $AB \perp IJ$ tại trung điểm H của đoạn AB. Do đó : $AH=BH=\dfrac{AB}{2}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Mặt khác ta nhận thấy tồn tại hai vị trí của AB và chúng đối xứng nhau qua tâm J. Gọi $A'B'$ là vị trí thứ hai của AB và H' là trung điểm của $A'B'$. Ta có :

$$JH'=JH=\sqrt{JA^2-AH^2}=\sqrt{3-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\frac{3}{2}$$

$$JI=\sqrt{(5-1)^2+(1+2)^2}=5$$

$$IH=JI-HJ=5-\frac{3}{2}=\frac{7}{2}$$

$$IH'=JI+H'J=5+\frac{3}{2}=\frac{13}{2}$$

Do đó :

$$R_1^2=IA^2=AH^2+IH^2=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(\frac{7}{2}\right)^2=13$$

$$R_2^2=IA'^2=A'H'^2+IH'^2=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(\frac{13}{2}\right)^2=43$$

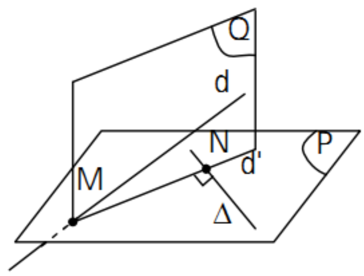
Vậy có hai đường tròn (C') thỏa mãn bài toán là :

$$(C_1'):(x-5)^2+(y-1)^2=13;\quad (C_2'):(x-5)^2+(y-1)^2=43$$

■

2. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \dfrac{x-3}{2}=\dfrac{y+2}{1}=\dfrac{z+1}{-1}$ và mặt phẳng $(P): x+y+z+2=0$. Gọi M là giao điểm của d và (P). Viết phương trình đường thẳng Δ nằm trong (P) sao cho Δ vuông góc với d và khoảng cách từ M đến Δ bằng $\sqrt{42}$.

Lời giải :



⋆ Tìm giao điểm M :

Phương trình tham số của d : $\begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = -2 + t \\ z = -1 - t \end{cases}$ có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{u} = (2; 1; -1)$

Thế vào phương trình $mp\,(P)$: $(3 + 2t) + (-2 + t) + (-1 + t) + 2 = 0 \Rightarrow t = -1 \Rightarrow M\,(1; -3; 0)$

⋆ Viết phương trình đường thẳng Δ

Mặt phẳng (Q) chứa d và vuông góc với (P) có vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{n}_Q = [\overrightarrow{u}, \overrightarrow{n}_P] = (2; -3; 1)$. Suy ra phương trình mặt phẳng (Q) là

$$2\,(x - 1) - 3\,(y + 3) + 1\,(z - 0) = 0 \text{ hay } 2x - 3y + z - 11 = 0$$

Phương trình đường thẳng (d') hình chiếu của d lên (P) là :

$$d' : \begin{cases} x + y + z + 2 = 0 \\ 2x - 3y + z - 11 = 0 \end{cases} \quad \text{có vectơ chỉ phương } \overrightarrow{u}_{d'} = (4; 1; -5)$$

Suy ra phương trình tham số của d' : $\begin{cases} x = 1 + 4t \\ y = -3 + t \\ z = -5t \end{cases}$

Trên (d') tìm điểm N sao cho $MN = \sqrt{42}$. Vì $N \in d' \Rightarrow N\,(1 + 4t; -3 + t; -5t)$

Khi đó :

$$MN = \sqrt{(4t)^2 + t^2 + (-5t)^2} = \sqrt{42t^2} = \sqrt{42} \Rightarrow t^2 = 1 \Leftrightarrow t = \pm 1$$

+ Với $t = 1$ suy ra $N_1\,(5; -2; -5)$

Đường thẳng Δ_1 qua N_1 nằm trong (P), vuông góc với (d') có vectơ chỉ phương

$$\overrightarrow{u}_{\Delta_1} = [\overrightarrow{n}_P,\ \overrightarrow{u}_{d'}] = (-6; 9; -3) = -3\,(2; -3; 1)$$

Vậy phương trình Δ_1 : $\frac{x-5}{2} = \frac{y+2}{-3} = \frac{z+5}{1}$

+ Với $t = -1$ suy ra $N_2\,(-3; -4; 5)$

Đường thẳng Δ_2 qua N_2 nằm trong (P), vuông góc với (d') có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{u}_{\Delta_2} = [\overrightarrow{n}_P,\ \overrightarrow{u}_{d'}] = -3\,(2; -3; 1)$ Vậy phương trình Δ_2 : $\frac{x+3}{2} = \frac{y+4}{-3} = \frac{z-5}{1}$

Kết luận : Có hai đường thẳng Δ thỏa mãn bài toán :

$$\Delta_1 : \frac{x-5}{2} = \frac{y+2}{-3} = \frac{z+5}{1}\,;\ \Delta_2 : \frac{x+3}{2} = \frac{y+4}{-3} = \frac{z-5}{1}$$

■

Câu VII.a (1 điểm) Chứng minh rằng nếu các số phức z_1, z_2 thỏa $|z_1 + z_2| = |z_1|\sqrt{2}$ thì $|z_1 - z_2| = |z_2|\sqrt{2}$

Lời giải : Ta có :

$$|z|^2 = z\overline{z}; \quad \overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}; \quad \overline{z_1 - z_2} = \overline{z_1} - \overline{z_2}$$

Khi đó :

$$\begin{aligned}
&|z_1+z_2|=|z_1|\sqrt{2}\\
\Leftrightarrow&|z_1+z_2|^2=2|z_1|^2\\
\Leftrightarrow&(z_1+z_2)\left(\overline{z_1+z_2}\right)=2z_1\overline{z_1}\\
\Leftrightarrow&(z_1+z_2)\left(\overline{z_1}+\overline{z_2}\right)=2z_1\overline{z_1}\\
\Leftrightarrow&z_1\overline{z_1}+z_1\overline{z_2}+z_2\overline{z_1}+z_2\overline{z_2}=2z_1\overline{z_1}\\
\Leftrightarrow&z_1\overline{z_2}+z_2\overline{z_1}+z_2\overline{z_2}=z_1\overline{z_1}\qquad(1)
\end{aligned}$$

Và

$$\begin{aligned}
&|z_1-z_2|=|z_2|\sqrt{2}\\
\Leftrightarrow&|z_1-z_2|^2=2|z_2|^2\\
\Leftrightarrow&(z_1-z_2)\left(\overline{z_1-z_2}\right)=2z_2\overline{z_2}\\
\Leftrightarrow&(z_1-z_2)\left(\overline{z_1}-\overline{z_2}\right)=2z_2\overline{z_2}\\
\Leftrightarrow&z_1\overline{z_1}-z_1\overline{z_2}-z_2\overline{z_1}+z_2\overline{z_2}=2z_2\overline{z_2}\\
\Leftrightarrow&z_1\overline{z_1}=z_1\overline{z_2}+z_2\overline{z_1}+z_2\overline{z_2}\qquad(2)
\end{aligned}$$

Từ (1) và (2) suy ra :

$$|z_1+z_2|=|z_1|\sqrt{2}\ \text{ thì }\ |z_1-z_2|=|z_2|\sqrt{2}\ \text{ (đpcm)}$$

■

Câu VI.b (2 điểm)

1. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có đỉnh $A(0;4)$, trọng tâm $G\left(\frac{4}{3};\frac{2}{3}\right)$ và trực tâm trùng với gốc tọa độ. Tìm tọa độ các đỉnh B,C và diện tích tam giác ABC biết $x_B<x_C$

Lời giải : Gọi I là trung điểm của BC, ta có : $\overrightarrow{AI}=\frac{3}{2}\overrightarrow{AG}\Rightarrow\begin{cases}x_I-0=\frac{3}{2}\left(\frac{4}{3}-0\right)\\ y_I-4=\frac{3}{2}\left(\frac{2}{3}-4\right)\end{cases}$

Suy ra

$$\begin{cases}x_I=2\\ y_I=-1\end{cases}\Rightarrow I(2;-1)$$

BC qua I và có vectơ pháp tuyến là $\overrightarrow{OA}=(0;4)=4(0;1)$. Do đó phương trình đường thẳng $BC: y=-1$.
Gọi $B(b;-1)$, vì I là trung điểm của BC nên $C(4-b;-1)$.
Ta có : $\overrightarrow{OB}=(b;-1)$; $\overrightarrow{AC}=(4-b;-5)$
Khi đó : $\overrightarrow{OB}.\overrightarrow{AC}=0\Leftrightarrow 4b-b^2+5=0\Leftrightarrow b=-1$ hay $b=5$
⋆ Với $b=-1$ suy ra $B(-1;-1)$ và $C(5;-1)$ (nhận)

⋆ Với $b=5$ suy ra $B(5;-1)$ và $C(-1;-1)$ (loại)

Suy ra : $\overrightarrow{BC}=(6;0)\Rightarrow BC=6;\ d(A;BC)=5$. Vậy $S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{2}d(A;BC)\,BC=\dfrac{1}{2}.5.6=15$ (đvdt)
Kết luận :

- Tọa độ các đỉnh B,C lần lượt là $B(-1;-1)$ và $C(5;-1)$
- Diện tích tam giác ABC là $S_{\Delta ABC}=15$ (đvdt)

■

2. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d_1:\dfrac{x-3}{2}=\dfrac{y-3}{2}=\dfrac{z-3}{1}$
d_2 là giao tuyến của hai mặt phẳng $(P):5x-6y-6z+13=0$ và $(Q):x-6y+6z-7=0$. Gọi I là giao điểm của d_1 và d_2. Tìm các điểm A,B lần lượt thuộc d_1,d_2 sao cho tam giác IAB cân tại I và có diện tích bằng $\dfrac{\sqrt{41}}{42}$.

Lời giải : Tọa độ giao điểm I là nghiệm của hệ phương trình :

$$\begin{cases}\frac{x-3}{2}=\frac{y-3}{2}=\frac{z-3}{1}\\ 5x-6y-6z+13=0\\ x-6y+6z-7=0\end{cases}$$

Giải hệ trên ta được : $I(1;1;2)$
Vectơ chỉ phương của d_1 là $\overrightarrow{u}_1=(2;2;1)$
Ta có :

$$\overrightarrow{u}_2=\left(\begin{vmatrix}-6&-6\\-6&6\end{vmatrix};\begin{vmatrix}-6&5\\-6&1\end{vmatrix};\begin{vmatrix}5&-6\\1&-6\end{vmatrix}\right)=(-72;-36;-24)=-12(6;3;2)$$

Suy ra vectơ chỉ phương của d_2 là $\overrightarrow{u}_2=(6;3;2)$
Gọi α là góc giữa d_1 và d_2, ta có :

$$\cos\alpha=\frac{|\overrightarrow{u_1}.\overrightarrow{u_2}|}{|\overrightarrow{u_1}|\,|\overrightarrow{u_2}|}=\frac{20}{21}\Rightarrow\sin\alpha=\frac{\sqrt{41}}{21}$$

Ta có :

$$S_{\Delta IAB}=\frac{1}{2}IA^2\sin\alpha=\frac{\sqrt{41}}{42}\Rightarrow\frac{\sqrt{41}}{42}IA^2=\frac{\sqrt{41}}{42}\Leftrightarrow IA=IB=1$$

Vì $A\in d_1$ nên tọa độ của $A(1+2t;1+2t;2+t)\Rightarrow IA=\sqrt{(2t)^2+(2t)^2+t^2}=3|t|=1\Leftrightarrow t=\pm\frac{1}{3}$

Suy ra : $A\left(\frac{5}{3};\frac{5}{3};\frac{7}{3}\right)$ hoặc $A\left(\frac{1}{3};\frac{1}{3};\frac{5}{3}\right)$

Vì $B \in d_2$ nên tọa độ của $B\left(1+6k;1+3k;2+2k\right) \Rightarrow IB = \sqrt{\left(6k\right)^2+\left(3k\right)^2+\left(2k\right)^2} = 7\left|k\right| = 1 \Leftrightarrow k = \pm\frac{1}{7}$

Suy ra : $B\left(\frac{13}{7};\frac{10}{7};\frac{16}{7}\right)$ hoặc $B\left(\frac{1}{7};\frac{4}{7};\frac{12}{7}\right)$

Kết luận : Các điểm A, B cần tìm là :

$$\begin{array}{lcl} A\left(\dfrac{5}{3};\dfrac{5}{3};\dfrac{7}{3}\right) & \text{hoặc} & A\left(\dfrac{1}{3};\dfrac{1}{3};\dfrac{5}{3}\right) \\ B\left(\dfrac{13}{7};\dfrac{10}{7};\dfrac{16}{7}\right) & \text{hoặc} & B\left(\dfrac{1}{7};\dfrac{4}{7};\dfrac{12}{7}\right) \end{array}$$

■

Câu VII.b (1 điểm)Đội tuyển học sinh giỏi của một trường gồm 18 em, trong đó có 7 học sinh khối 12, 6 học sinh khối 11 và 5 học sinh khối 10. Hỏi có bao nhiêu cách cử 8 học sinh đi dự trại hè sao cho mỗi khối có ít nhất một em được chọn.

Lời giải : Tổng số cách chọn 8 học sinh từ 18 em của đội tuyển là : $C_{18}^8 = 43758$

Tổng số cách trên được phân thành 2 bộ phận rời nhau :

Bộ phận I : gồm các cách chọn từ đội tuyển ra 8 em sao cho mỗi khối có ít nhất một em được chọn.

Bộ phận II : gồm các cách chọn từ đội tuyển ra 8 em chỉ gồm hai khối.

Bộ phận II có thể phân tích thành 3 loại :

- 8 em được chọn từ khối 12 hoặc khối 11, có C_{13}^8 cách chọn.
- 8 em được chọn từ khối 12 hoặc khối 10, có C_{12}^8 cách chọn.
- 8 em được chọn từ khối 11 hoặc khối 10, có C_{11}^8 cách chọn.

Do đó số cách phải tìm là : $C_{18}^8 - (C_{13}^8 + C_{12}^8 + C_{11}^8) = 43758 - 1947 = 41811\ \big(\text{cách}\big)$

■

VMF - ĐỀ THI THỬ SỐ 6 - MÔN TOÁN

Ngày 10 tháng 4 năm 2012

(Thời gian làm bài 180 phút không kể thời gian giao đề)

PHẦN CHUNG: (Dành cho tất cả các thí sinh) (7 điểm)

Câu I (2 điểm)

Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2 \quad (C)$

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số trên.

2. Tìm trên (C) điểm A sao cho khoảng cách từ A đến $B(2; -4)$ là nhỏ nhất.

Câu II (2 điểm)

1. Giải phương trình: $\dfrac{4\left(\sin x + \sqrt{3}\cos x\right) - 4\sqrt{3}\sin x\cos x - 3}{4\cos^2 x - 1} = 1$

2. Giải bất phương trình: $\sqrt{6}\left(x^2 - 3x + 1\right) + \sqrt{x^4 + x^2 + 1} \leqslant 0\ ;\ x \in \mathbb{R}$

Câu III (1 điểm)

Tính tích phân: $I = \int\limits_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \dfrac{2 + \sin x}{1 + \cos x} dx$

Câu IV (1 điểm)

Cho hình chóp $S.ABCD$ có SA là đường cao và đáy là hình chữ nhật $ABCD$, biết $SA = a, AB = b, AD = c$. Trong mặt phẳng (SDB), vẽ qua trọng tâm G của tam giác SBD một đường thẳng cắt cạnh SB tại M và cắt cạnh SD tại N. Mặt phẳng (AMN) cắt cạnh SC của hình chóp $S.ABCD$ tại K. Xác định vị trí của M trên cạnh SB sao cho thể tích của hình chóp $S.AMKN$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính giá trị đó theo a, b, c.

Câu V(1 điểm)

Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 \leqslant \dfrac{3}{4}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = (a + b)(b + c)(c + a) + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$$

PHẦN RIÊNG: (Thí sinh chỉ được chọn một trong hai phần: A hoặc B)(3 điểm)

A. Chương trình chuẩn:

Câu VI.a (2 điểm)

1. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho ba điểm $A(-1; 7), B(4; -3), C(-4; 1)$. Hãy viết phương trình đường tròn (C) nội tiếp tam giác ABC.

2. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P):\ 2x + y + 3z - 1 = 0$ và đường thẳng d có phương trình $\dfrac{x - 2}{1} = \dfrac{y + 1}{-3} = \dfrac{z}{-1}$. Hãy viết phương trình hình chiếu của đường thẳng $\Delta : \dfrac{x}{-1} = \dfrac{y - 2}{3} = \dfrac{z + 3}{2}$ lên mặt phẳng (P) theo phương (d).

Câu VII.a (1 điểm)

Xác định tập hợp điểm trong mặt phẳng phức biểu diễn số phức z thỏa mãn điều kiện $(2 - z)(i + \overline{z})$ là số thuần ảo.

B.Chương trình nâng cao:

Câu VI.b (2 điểm)

1.Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho điểm $F_1(2; 1)$, $F_2(6; 4)$. Một elip (E) nhận F_1, F_2 làm hai tiêu điểm và tiếp xúc với Ox tại M. Tìm tọa độ điểm M.

2. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(0; -1; 1)$ và $B(1; 2; 1)$. Viết phương trình mặt cầu (S) có đường kính là đoạn vuông góc chung của đường thẳng AB và đường thẳng chứa trục Ox.

VMF - ĐÁP ÁN ĐỀ THI THỬ SỐ 6 - MÔN TOÁN-2012

PHẦN CHUNG: (Dành cho tất cả các thí sinh) (7 điểm)

Câu I (2 điểm)

Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2 \quad (C)$

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số trên.

2. Tìm trên (C) điểm A sao cho khoảng cách từ A đến $B(2;-4)$ là nhỏ nhất.

GIẢI

1. Khảo sát và vẽ đồ thị ...

2. Lấy điểm $A(x;y)$ tùy ý thuộc $(C) \Rightarrow BA^2 = (x-2)^2 + (y+4)^2$

Xét $x \leq -1 \Rightarrow x - 2 \leq -3 \Rightarrow |x-2| \geq 3 \Rightarrow (x-2)^2 \geq 9$

$\Rightarrow BA^2 \geq 9 \Rightarrow BA \geq 3$

Xét $x > -1 \Rightarrow y \geq -2 \Rightarrow y + 4 \geq 2 \Rightarrow (y+4)^2 \geq 4$

$\Rightarrow BA^2 \geq 4 \Rightarrow BA \geq 2$

Trong cả hai trường hợp ta thấy $BA \geq 2$

Dấu bằng xảy ra khi $\begin{cases} x = 2 \\ y = -2 \end{cases} \Leftrightarrow A(2;-2)$

Vậy điểm $A(2;-2)$ thỏa yêu cầu bài toán.

Câu II (2 điểm)

1. Giải phương trình: $\dfrac{4\left(\sin x + \sqrt{3}\cos x\right) - 4\sqrt{3}\sin x \cos x - 3}{4\cos^2 x - 1} = 1$

GIẢI.

Điều kiện: $4\cos^2 x - 1 \neq 0$. Khi đó phương trình đã cho tương đương với:

$$8\cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) - 2\sqrt{3}\sin 2x - 3 = 2\left(1 + \cos 2x\right) - 1$$

$$\Leftrightarrow 8\cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) - 2\left(\sqrt{3}\sin 2x + \cos 2x\right) - 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow 8\cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) - 4\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) - 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos\left[2\left(x - \frac{\pi}{6}\right)\right] - 2\cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2\cos^2\left(x - \frac{\pi}{6}\right) - 2\cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2\cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right)\left[\cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) - 1\right] = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = 0 \\ \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} + k\pi \\ x - \frac{\pi}{6} = l2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{2\pi}{3} + k\pi \\ x = \frac{\pi}{6} + l2\pi \end{array}\right. \quad (k, l \in \mathbb{Z})$$

Đối chiếu với điều kiện ta nhận được nghiệm của phương trình đã cho là $x = \dfrac{\pi}{6} + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

2. Giải bất phương trình: $\sqrt{6}\left(x^2 - 3x + 1\right) + \sqrt{x^4 + x^2 + 1} \leqslant 0\ ;\ x \in \mathbb{R}$

GIẢI.

Bất phương trình đã cho tương đương với:

$$6\left(x^2 - 3x + 1\right) + \sqrt{6\left(x^4 + x^2 + 1\right)} \leqslant 0 \Leftrightarrow 6\left[2\left(x^2 - x + 1\right) - \left(x^2 + x + 1\right)\right] + \sqrt{6\left(x^4 + x^2 + 1\right)} \leqslant 0$$

$$\Leftrightarrow 12\left(x^2 - x + 1\right) + \sqrt{6\left(x^2 - x + 1\right)\left(x^2 + x + 1\right)} - 6\left(x^2 + x + 1\right) \leqslant 0$$

$$\Leftrightarrow 12\left(\frac{x^2 - x + 1}{x^2 + x + 1}\right) + \sqrt{\frac{6\left(x^2 - x + 1\right)}{x^2 + x + 1}} - 6 \leqslant 0 \quad \left(\text{vì } \ x^2 + x + 1 > 0\ \forall x \in \mathbb{R}\right)$$

Đặt $t=\sqrt{\dfrac{6\left(x^2-x+1\right)}{x^2+x+1}}>0$, khi đó bất phương trình trở thành:

$$2t^2+t-6\leqslant 0\Leftrightarrow 0<t\leqslant\frac{3}{2}$$

Do đó:

$$\frac{6\left(x^2-x+1\right)}{x^2+x+1}\leqslant\frac{9}{4}\Leftrightarrow 5x^2-11x+5\leqslant 0\Leftrightarrow\frac{11-\sqrt{21}}{10}\leqslant x\leqslant\frac{11+\sqrt{21}}{10}$$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình đã cho là $S=\left[\dfrac{11-\sqrt{21}}{10};\dfrac{11+\sqrt{21}}{10}\right]$

Câu III (1 điểm)

Tính tích phân: $I=\int\limits_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{2+\sin x}{1+\cos x}dx$

GIẢI.

Ta có:

$$I=\int\limits_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{2+\sin x}{1+\cos x}dx=\int\limits_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{2+2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{2\cos^2\frac{x}{2}}dx=\int\limits_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}+tg\frac{x}{2}\right)dx$$

$$=\left(2tg\frac{x}{2}-2\ln\left|\cos\frac{x}{2}\right|\right)\Big|_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}=2\left(1-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)-2\ln\frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=2\left(1-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)-\ln\frac{2}{3}$$

Vậy $I=2\left(1-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)-\ln\dfrac{2}{3}$

Câu IV (1 điểm)

Cho hình chóp $S.ABCD$ có SA là đường cao và đáy là hình chữ nhật $ABCD$, biết $SA=a, AB=b, AD=c$. Trong mặt phẳng (SDB), vẽ qua trọng tâm G của tam giác SBD một đường thẳng cắt cạnh SB tại M và cắt cạnh SD tại N. Mặt phẳng (AMN) cắt cạnh SC của hình chóp $S.ABCD$ tại K. Xác định vị trí của M trên cạnh SB sao cho thể tích của hình chóp $S.AMKN$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính giá trị đó theo a,b,c.

GIẢI

HÌNH VẼ

Do G là trọng tâm của tam giác SBD suy ra G cũng là trọng tâm của tam giác SAC. Do đó AG cắt SC tại trung điểm K của SC.

Đặt $\dfrac{SM}{SB}=x,\ \dfrac{SN}{SD}=y\quad\left(\dfrac{1}{2}\leqslant x\leqslant 1;\dfrac{1}{2}\leqslant y\leqslant 1\right)$.

Theo công thức tính tỉ số thể tích ta có:

$$\frac{V_{SANK}}{V_{SADC}}=\frac{SA}{SA}.\frac{SN}{SD}.\frac{SK}{SC}=\frac{y}{2};\quad\frac{V_{SAKM}}{V_{SACB}}=\frac{SA}{SA}.\frac{SK}{SC}.\frac{SM}{SB}=\frac{x}{2}$$

Lại có: $V_{SADC}=V_{SACB}=\frac{1}{2}V_{S.ABCD}=\frac{1}{6}abc$ và $V_{SANK}+V_{SAKM}=V_{S.ANKM}$

nên ta có:

$$\frac{V_{SANK}}{V_{SADC}}+\frac{V_{SAKM}}{V_{SACB}}=\frac{2V_{S.ANKM}}{V_{S.ABCD}}=\frac{x+y}{2}\Rightarrow V_{S.ANKM}=\frac{V_{S.ABCD}\left(x+y\right)}{4}=\frac{abc\left(x+y\right)}{12}\qquad(1)$$

Mặt khác:

$$SN=\frac{SN}{SD}SD=ySD;\ SM=\frac{SM}{SB}SB=xSB;\ SG=\frac{2}{3}SO$$

Vì O là trung điểm của BD nên $2SO=SD+SB\Rightarrow SG=\dfrac{1}{3y}SN+\dfrac{1}{3x}SM\qquad(2)$

Mà M,N,G thẳng hàng nên từ (2) ta có: $\dfrac{1}{3y}+\dfrac{1}{3x}=1\Rightarrow x=\dfrac{y}{3y-1}\quad\left(\dfrac{1}{2}\leqslant y\leqslant 1\right)$

Thay vào (1) suy ra:

$$V_{S.ANKM}=\frac{abc\left(\dfrac{y}{3y-1}+y\right)}{12}=\frac{abc}{4}.\frac{y^2}{3y-1}$$

Xét hàm số: $f(y)=\dfrac{y^2}{3y-1}\quad\left(\dfrac{1}{2}\leqslant y\leqslant 1\right)$. Ta có $f'(y)=\dfrac{3y^2-2y}{(3y-1)^2}\Rightarrow f'(y)=0\Leftrightarrow y=\dfrac{2}{3}$

Khi đó: $f\left(\dfrac{1}{2}\right)=f(1)=\dfrac{1}{2};\ f\left(\dfrac{2}{3}\right)=\dfrac{4}{9}$. Suy ra: $\min f(y)=\dfrac{4}{9}\Leftrightarrow y=\dfrac{2}{3}\Rightarrow x=\dfrac{2}{3}$.

Vậy $\min\left(V_{S.ANKM}\right)=\dfrac{abc}{9}\Leftrightarrow MN//BD$.

Câu V(1 điểm)

Cho a,b,c là các số thực dương thỏa mãn $a^2+b^2+c^2\leqslant\dfrac{3}{4}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P=(a+b)(b+c)(c+a)+\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}$$

GIẢI.

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy, ta có:

$$\frac{1}{a^2}+4\geq\frac{4}{a}\Rightarrow\frac{1}{a^2}\geq\frac{4}{a}-4$$

Tương tự:

$$\frac{1}{b^2}\geq\frac{4}{b}-4;\ \ \frac{1}{c^2}\geq\frac{4}{c}-4$$

Mặt khác: $(a+b)(b+c)(c+a)\geq 8abc$. Cộng các bất đẳng thức trên vế theo vế, ta được:

$$P\geq 8abc+\frac{4}{a}+\frac{4}{b}+\frac{4}{c}-12=\left(8abc+\frac{1}{2a}+\frac{1}{2b}+\frac{1}{2c}\right)+\frac{7}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)-12$$

Lại áp dụng bất đẳng thức Cauchy, ta có:

$$8abc+\frac{1}{2a}+\frac{1}{2b}+\frac{1}{2c}\geq 4\sqrt{8abc.\frac{1}{2a}.\frac{1}{2b}.\frac{1}{2c}}=4$$

Đồng thời ta có đánh giá:

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\geq\frac{9}{a+b+c}$$

Do đó:

$$P\geq 4+\frac{63}{2(a+b+c)}-12=\frac{63}{2(a+b+c)}-8$$

Lại lưu ý rằng:

$$(a+b+c)^2\leq 3\left(a^2+b^2+c^2\right)\leq\frac{9}{4}\Rightarrow a+b+c\leq\frac{3}{2}$$

Suy ra: $P\geq\dfrac{63}{3}-8=13$. Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c=\dfrac{1}{2}$

Vậy GTNN của P bằng 13, đạt được khi và chỉ khi $a=b=c=\dfrac{1}{2}$.

PHẦN RIÊNG: (Thí sinh chỉ được chọn một trong hai phần: A hoặc B)(3 điểm)

A. Chương trình chuẩn:

Câu VI.a (2 điểm)

1. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho ba điểm $A(-1;7),B(4;-3),C(-4;1)$. Hãy viết phương trình đường tròn (C) nội tiếp tam giác ABC.

GIẢI.

Gọi $I(a;b)$, r lần lượt là tâm và bán kính của đường tròn (C).

Gọi $M(x;y)$ là chân đường phân giác trong góc A của tam giác ABC.

Ta có: $\dfrac{MB}{MC}=\dfrac{AB}{AC}=\dfrac{5\sqrt{5}}{3\sqrt{5}}\Rightarrow\overrightarrow{MB}=-\dfrac{5}{3}\overrightarrow{MC}$. Suy ra M chia đoạn BC theo tỉ số $k=-\dfrac{5}{3}$ nên ta có tọa độ điểm M là:

$$M:\begin{cases}x=\dfrac{x_B-kx_C}{1-k}=\dfrac{4-\left(-\dfrac{5}{3}\right)(-4)}{1-\left(-\dfrac{5}{3}\right)}=-1\\[2ex] y=\dfrac{y_B-ky_C}{1-k}=\dfrac{-3-\left(-\dfrac{5}{3}\right).1}{1-\left(-\dfrac{5}{3}\right)}=-\dfrac{1}{2}\end{cases}\Rightarrow M\left(-1;-\frac{1}{2}\right)$$

I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC nên $\frac{IA}{IM} = \frac{BA}{BM} = 2 \Rightarrow \overrightarrow{IA} = -2\overrightarrow{IM}$.

Suy ra điểm I chia đoạn AM theo tỉ số $k = -2 \Rightarrow I : \begin{cases} x = \dfrac{x_A - kx_M}{1-k} = \dfrac{-1-(-2)(-1)}{1-(-2)} = -1 \\ y = \dfrac{y_A - ky_M}{1-k} = \dfrac{7-(-2)\left(-\dfrac{1}{2}\right)}{1-(-2)} = 2 \end{cases} \Rightarrow I(-1;2)$

Phương trình cạnh AB là $(AB) : 2x + y - 5 = 0$.

Bán kính đường tròn (C) chính là khoảng cách từ tâm I đến cạnh AB, do đó: $r = d\left(I,(AB)\right) = \dfrac{|2(-1)+2-5|}{\sqrt{4+1}} = \sqrt{5}$.

Vậy phương trình đường tròn (C) là $(C):\ (x+1)^2 + (y-2)^2 = 5$.

2. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P):\ 2x + y + 3z - 1 = 0$ và đường thẳng d có phương trình $\dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y+1}{-3} = \dfrac{z}{-1}$. Hãy viết phương trình hình chiếu của đường thẳng $\Delta : \dfrac{x}{-1} = \dfrac{y-2}{3} = \dfrac{z+3}{2}$ lên mặt phẳng (P) theo phương (d).

GIẢI

Gọi (Q) là mặt phẳng chứa Δ và song song với d, Δ' là đường thẳng cần tìm. Dễ thấy Δ' là giao tuyến của (P) và (Q). Ta có vecto chỉ phương của Δ và d lần lượt là: $\overrightarrow{n_1} = (-1;3;2); \overrightarrow{n_2} = (1;-3;-1)$. Mặt phẳng (Q) đi qua điểm $M(0;2;-3) \in \Delta$ và nhận vecto $\overrightarrow{n_1} = \overrightarrow{n_1} \wedge \overrightarrow{n_2} = (3;1;0)$ là vector pháp tuyến nên có phương trình:

$$3x + y - 2 = 0$$

Do đó mọi điểm trên Δ' có tọa độ thỏa mãn hệ phương trình

$$\begin{cases} 2x + y + 3z - 1 = 0 \\ 3x + y - 2 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = t \\ y = 2 - 3t \\ z = -\dfrac{1}{3} + \dfrac{t}{3} \end{cases}$$

Câu VII.a (1 điểm)

Xác định tập hợp điểm trong mặt phẳng phức biểu diễn số phức z thỏa mãn điều kiện $(2-z)(i+\overline{z})$ là số thuần ảo.

GIẢI

Đặt $z = x + iy$ ta có:

$$w = (2-z)(i+\overline{z}) = (2-x-iy)[x+(1-y)] = [(2-x)x + y(1-y)] + [(2-x)(1-y) - xy]i$$

w là số thuần ảo khi và chỉ khi

$$(2-x)(1-y) - xy = 0 \Leftrightarrow x + 2y - 2 = 0$$

Vậy tập hợp các điểm cần tìm là đường thẳng $x + 2y - 2 = 0$

B.Chương trình nâng cao:

Câu VI.b (2 điểm)

1.Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho điểm $F_1(2;1)$, $F_2(6;4)$. Một elip (E) nhận F_1, F_2 làm hai tiêu điểm và tiếp xúc với Ox tại M. Tìm tọa độ điểm M.

2. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(0;-1;1)$ và $B(1;2;1)$. Viết phương trình mặt cầu (S) có đường kính là đoạn vuông góc chung của đường thẳng AB và đường thẳng chứa trục Ox.

GIẢI

1. Ta có nhận xét: Nếu elip (E) có phương trình $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1\ (a > b > 0)$, với các tiêu điểm F_1, F_2 thì tiếp tuyến tại một điểm I bất kì trên (E) là phân giác ngoài của góc $\widehat{F_1IF_2}$

Áp dụng vào bài toán, ta có Ox là phân giác ngoài của góc $\widehat{F_1MF_2}$.

Lấy ${F_1}'(2;-1)$ đối xứng với $F_1(2;1)$. Do Ox là phân giác ngoài của góc $\widehat{F_1MF_2}$ nên ${F_1}', M, F_2$ thẳng hàng.
Gọi $M(x;0)$ thì $\overrightarrow{{F_1}'M} = k\overrightarrow{{F_1}'F_2} \Leftrightarrow (x-2;1) = k(4;5) \Leftrightarrow 5(x-2) = 4 \Leftrightarrow x = \dfrac{14}{5}$.
Vậy $M\left(\dfrac{14}{5};0\right)$.

2. Lập phương trình đường thẳng đi qua AB ta có $AB:\begin{cases} x = t \\ y = -1+3t \\ z = 1 \end{cases}$

Gọi $M(t;3t-1;1) \in AB$ và $N(k;0;0) \in Ox$, suy ra $\overrightarrow{MN} = (t-k;3t-1;1)$
Vì $\begin{cases} MN \perp AB \\ MN \perp Ox \end{cases}$ nên $t = k = \dfrac{1}{3}$.
Do đó: $M\left(\dfrac{1}{3};0;1\right), N\left(\dfrac{1}{3};0;0\right) \Rightarrow I\left(\dfrac{1}{3};0;\dfrac{1}{2}\right)$ là trung điểm của MN và chính là tâm của mặt cầu.
Khi đó: bán kính của mặt cầu là $R = \dfrac{MN}{2} = \dfrac{1}{2}$
Vậy phương trình mặt cầu cần tìm là $(S):\left(x-\dfrac{1}{3}\right)^2 + y^2 + \left(z-\dfrac{1}{2}\right)^2 = \dfrac{1}{4}$.

Câu VII.b (1 điểm)

Cho hệ phương trình: $\begin{cases} (m^2+2m)x + (1-m^2)y + m^2 - 2m - 2 = 0 \\ x^2 + y^2 + 2x - 9 = 0 \end{cases}$. Chứng minh rằng hệ phương trình trên luôn có hai nghiệm phân biệt $(x_1;y_1)$ và $(x_2;y_2)$. Tìm m để biểu thức $P = (x_1-x_2)^2 + (y_1-y_2)^2$ đạt giá trị nhỏ nhất.

GIẢI.

Nghiệm của hệ phương trình này là tọa độ giao điểm của đường thẳng $\Delta:\ (m^2+2m)x + (1-m^2)y + m^2 - 2m - 2 = 0$ và đường tròn $(C):\ (x+1)^2 + y^2 = 10$ tâm $I(-1;0)$, bán kính $R = \sqrt{10}$.

Ta có:

$$(m^2+2m)x + (1-m^2)y + m^2 - 2m - 2 = 0 \Leftrightarrow (x-y+1)m^2 + (2x-2)m + (y-2) = 0$$

Phương trình này nghiệm đúng với mọi m khi $x = 1, y = 2$ nghĩa là Δ luôn đi qua điểm cố định $A(1;2)$ và A nằm trong (C).

Do đó Δ luôn cắt (C) tại hai điểm phân biệt $M(x_1;y_1),\ N(x_2;y_2)$.

Vậy hệ đã cho luôn có hai nghiệm phân biệt

HÌNH VẼ

Ta có: $P = MN^2$ nhỏ nhất khi và chỉ khi $IA \perp \Delta \Leftrightarrow \overrightarrow{IA}.\overrightarrow{u_\Delta} = 0 \Leftrightarrow (m^2-1).2 + (m^2+2m).2 = 0$

$$\Leftrightarrow 4m^2 + 4m - 2 = 0 \Leftrightarrow m = \frac{-1 \pm \sqrt{3}}{2}$$

Vậy $m = \dfrac{-1 \pm \sqrt{3}}{2}$.

Các bạn thân mến như vậy là sắp đến kì thi tuyển sinh Đại Học rồi.Ban giám khảo chúc tất cả các thành viên VMF và các bạn đọc theo dõi những đề thi của VMF sẽ đạt kết quả cao nhất và thi đỗ vào các trường Đại Học mà các bạn mong muốn.

VMF - ĐỀ THI THỬ SỐ 7 - MÔN TOÁN

Ngày 12 tháng 5 năm 2012

(Thời gian làm bài 180 phút không kể thời gian giao đề)

PHẦN CHUNG: (Dành cho tất cả các thí sinh) (7 điểm)

Câu I (2 điểm)

Cho hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + 1 \quad (C)$

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số (C) khi $m = -1$

2. Tìm các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số (C) có ba điểm cực trị và đường tròn đi qua ba điểm này có bán kính bằng 1.

Câu II (2 điểm)

1. Giải phương trình trên nửa khoảng $\left(\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}\right]$: $(\sin x + \cos x)^{\sin^2 x} + (2\sin x - 2\cos x)^{\sin^2 x} = 3$

2. Tìm m để hệ bất phương trình sau có nghiệm: $\begin{cases} m(x-m)^2\left(x - 2\sqrt{2}\right) + 1 \le 0 \\ x > m > 0 \end{cases}$

Câu III (1 điểm)

Tính tích phân: $I = \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-x}\left(2x + \frac{e^x}{1+\tan^2 x}\right)dx$

Câu IV (1 điểm)

Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ với $A'.ABC$ là hình chóp tam giác đều nội tiếp trong một mặt cầu có bán kính R. Góc giữa mặt phẳng $(A'BC)$ và mặt phẳng (ABC) bằng 60^0. Tính thể tích khối chóp $A'.BB'CC'$ theo R.

Câu V(1 điểm)

Giả sử x, y là các số thực lần lượt thỏa mãn các phương trình:

$$x^2 + 2ax + 9 = 0 \text{ với } a \ge 3; \quad y^2 - 2by + 9 = 0 \text{ với } b \ge 3$$

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $Q = 3(x-y)^2 + \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right)^2$

PHẦN RIÊNG: (Thí sinh chỉ được chọn một trong hai phần: A hoặc B)(3 điểm)

A. Chương trình chuẩn:

Câu VI.a (2 điểm)

1. Cho hình bình hành $ABCD$ có diện tích bằng 4. Biết $A(1;0)$, $B(0;2)$ và giao điểm I của hai đường chéo nằm trên đường thẳng $y = x$. Tìm tọa độ đỉnh C và D của hình bình hành $ABCD$.

2. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;5;0)$, $B(3;3;6)$ và đường thẳng $\Delta : \frac{x+1}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z}{2}$. Một điểm M thay đổi trên đường thẳng Δ. Xác định vị trí của điểm M để chu vi tam giác MAB đạt giá trị nhỏ nhất.

Câu VII.a (1 điểm)

Trong các số phức z thỏa mãn điều kiện $|z - 2 + 3i| = \frac{3}{2}$. Tìm số phức z có môđun nhỏ nhất.

B.Chương trình nâng cao:

Câu VI.b (2 điểm)

1. Cho Elip $(E) : \frac{x^2}{9} + y^2 = 1$. Tìm trên (E) cặp điểm sao cho bán kính qua tiêu của điểm này bằng 3 lần bán kính qua tiêu của điểm kia.

2. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $(d) : \frac{x-2}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-1}{1}$ và hai mặt phẳng $(\alpha) : x - 3y + 2 = 0$, $(\beta) : 2x + 3z - 1 = 0$. Tính khoảng cách và góc giữa (d) và giao tuyến của hai mặt phẳng $(\alpha), (\beta)$.