TS. NÔNG QUỐC CHINH

TÔPÔ ĐẠI CƯƠNG

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

Lời nói đầu

Giáo trình "Tôpô đại cương" trình bày những khái niệm cơ bản của Tôpô, cách xây dựng tôpô, phân loại các không gian tôpô, sự đồng phôi giữa các không gian tôpô và xét trường hợp riêng của không gian tôpô như không gian compắc, không gian liên thông, không gian mêtric,…. Đây là những kiến thức cơ sở cần thiết cho nhiều lĩnh vực toán học khác nhau như Giải tích hàm, Lý thuyết độ đo và tích phân, Tôpô đại số, Hình học vi phân,….

Giáo trình được viết trên cơ sở những bài giảng cho sinh viên năm thứ 3 hệ Cử nhân ngành Toán và sinh viên hệ Sau đại học ngành Toán của khoa toán, trường Đại học Sư phạm - Đại học Thái Nguyên.

Giáo trình bao gồm 4 chương, trong mỗi chương có nêu nhiều ví dụ minh hoạ và có phần bài tập cơ bản để sinh viên tự giải.

Trong lần xuất bản đầu tiên này chắc rằng không tránh khỏi thiếu sót. Chúng tôi mong nhận được sự góp ý của bạn đọc.

TÁC GIẢ

Chương 0
NHỮNG KIẾN THỨC CƠ SỞ

§1. CÁC PHÉP TOÁN VỀ TẬP HỢP

1 Giao, hợp, hiệu

Đối với các tập con A, B, C của tập hơp X ta có:

$A \cup B = B \cup A$,

$A \cap B = B \cap A$,

$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$,

$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$,

$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$,

$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$,

$X \setminus (A \cup B) = (X \setminus A) \cap (X \setminus B)$, (Công thức De Morgan)

$X \setminus (A \cap B) - (X \setminus A) \cup (X \setminus B)$, (Công thức De Morgan)

$A \setminus B = A \cap (X \setminus B)$,

$(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \cup C)$,

$X \setminus (A \setminus B) = B \cup (X \setminus A)$.

Giả Sử $(A_i)_{i \in I}$ và $(B_k)_{k \in K}$ là hai họ những tập con tùy ý của tập hơp X. Khi đó:

$$\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) \cap \left(\bigcup_{k\in K} B_k\right) = \bigcup_{\substack{i\in I\\ k\in K}} (A_i \cap B_k),$$

$$\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) \cup \left(\bigcap_{k\in K} B_k\right) = \bigcap_{\substack{i\in I\\ k\in K}} (A_i \cup B_k),$$

$$X \setminus \left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) = \bigcap_{i\in I}(X \setminus A_i)$$ (Công thức De Morgan mở rộng)

$$X \setminus \left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) = \bigcup_{i\in I}(X \setminus A_i)$$ (Công thức De Morgan mở rộng)

2. Tích Đềcác

Giả sử, X và Y là những tập hợp, XxY là tích Đềcác của chúng. Với $U_1, U_2 \subset X$ và $V_1, V_2 \subset Y$ ta có:

$$(U_1\times V_1) \cap (U_2\times V_2) = (U_1 \cap U_2)\times(V_1 \cap V_2),$$

$$(U_1\times V_1) \cup (U_2\times V_2) \subset (U_1 \cup U_2)\times(V_1 \cup V_2).$$

3. Ánh xạ

Cho ánh xạ $f : X \to Y$. Đối với bất kỳ $A, B \subset X$ ta có:

$$f(A \cup B) = f(A) \cup f(B),$$

$$f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B),$$

$$f(A) \setminus f(B) \subset f(A \setminus B).$$

Giả sử $(A_i)_{i \in I}$ là họ những tập con tùy ý của tập hợp X. Khi đó:

$$f(\bigcup_{i\in I} A_i) = \bigcup_{i\in I} f(A_i),$$

$$f(\bigcap_{i\in I} A_i) \subseteq \bigcap_{i\in I} f(A_i)$$

Đối với bất kỳ $M, N \subset Y$ ta có:

$$f^{-1}(M \cup N) = f^{-1}(M) \cup f^{-1}(N),$$

$$f^{-1}(M \cap N) = f^{-1}(M) \cap f^{-1}(N),$$

$$f^{-1}(M \setminus N) = f^{-1}(M) \setminus f^{-1}(N),$$

$$f(f^{-1}(M)) = M \cap f(X),$$

Giả sử $(M_i)_{i \in I}$ là họ những tập con tùy ý của tập hợp Y. Khi đó:

$$f^{-1}\left(\bigcup_{i\in I} M_i\right) = \bigcup_{i\in I} f^{-1}(M_i),$$

$$f^{-1}\left(\bigcap_{i\in I} M_i\right) = \bigcap_{i\in I} f^{-1}(M_i).$$

§2. QUAN HỆ THỨ TỰ

Quan hệ hai ngôi $\leq$ trên tập hợp X được gọi là một quan hệ thứ tự nếu các điều kiện sau thỏa mãn:

a) Phản xạ: $x \leq x$, $\forall x \in X$.

b) Phản đối xứng: $\forall x, y \in X$, nếu $x \leq y$ và $y \leq x$ thì $x = y$.

c) Bắc cầu: $\forall x, y, z \in X$, nếu $x \leq y$ và $y \leq z$ thì $x \leq z$.

Tập hợp X đã trang bị một quan hệ thứ tự $\leq$ được gọi là tập sắp thứ tự. Nếu $x \leq y$, ta nói x đứng trước y, hay x nhỏ hơn hoặc bàng y. Khi $x \leq y$ và $x \neq y$, ta sẽ viết $x < y$. Ta nói hai phần tử x và y trong X là so sánh được nếu $x \leq y$ hoặc $y \leq x$.

Cho X là tập sắp thứ tự. Phần tử $a \in X$ được gọi là phần tử cực tiểu (tương ứng cực đại) trong X, nếu $\forall X \in X$, điều kiện $x \leq a$ (tương ứng $a \leq x$) kéo theo $x = a$. Trong một tập sắp thứ tự không nhất thiết phải luôn có phần tử cực tiểu (cực đại), và cũng có thể có nhiều phần tử cực tiểu (cực đại) khác nhau.

Giả sử $A \subset X$. Phần tử $a \in X$ được gọi là cận dưới (tương ứng cận trên) của tập A, nếu $\forall x \in A$, ta luôn có $a \leq x$ (tương ứng $x \leq a$). Nếu tập con $A \subset X$ có cận dưới (tương ứng cận trên) thì ta nói A bị chặn dưới (tương ứng chặn trên). Tập A được gọi là bị chặn (hay giới nội) nếu A đồng thời bị chặn dưới và bị chặn trên. Ta ký hiệu D_A là tập tất cả các cận dưới của A, ký hiệu T_A là tập tất cả các cận trên của A. Nếu $D_A \neq \emptyset$ và $a_0 \in D_A$ thỏa mãn $a \leq a_0$ $\forall a \in D_A$. thì a_0 được gọi là cận dưới đúng của tập A, ký hiệu là $a_0 = \inf A$. Tương tự, nếu $T_A \neq \emptyset$ và $a_0 \in T_A$ thỏa mãn $a_o \leq a$, $\forall a \in T_A$ thì a_0 được gọi là cận trên đúng của tập A, ký hiệu là $a_0 = \sup A$. Phần tử $x_0 \in A$ được gọi là phần tử bé nhất (tương ứng lớn nhất) của A nếu $\forall X \in A$ luôn có $x_0 \leq x$ (tương ứng $x \leq x_0$).

Ta nói tập X được sắp thứ tự toàn phần (hay tuyến tính) nếu $\forall x,y \in X$ thì $x \leq y$ hoặc $y \leq x$. Khi đó ta cũng nói $\leq$ là quan hệ thứ tự toàn phần trên X.

Giả sử X là tập sắp thứ tự toàn phần, với $a,b \in X$ tùy ý, $a \leq b$. Ta ký hiệu: $[a, b] = \{x \in X \mid a \leq x \leq b\}$, và gọi là khoảng đóng với đầu mút trái là a, đầu mút phải là b.

$[a, b) = \{ x \in X \mid a \leq x \leq b \}$, và gọi là khoảng mở bên phải, đóng bên trái.

$(a,b] = \{ x \in X \mid a < x \leq b \}$, và gọi là khoảng đóng bên phải, mở bên trái.

$(a,b) = \{ x \in X \mid a< x < b \}$, và gọi là khoảng mở trong X.

Tập sắp thứ tự toàn phần X được gọi là tập sắp thứ tự tốt nếu mọi tập con khác rỗng của X luôn có phần tử bé nhất.

Giả sử X là một tập hợp sắp thứ tự. Tập hợp tất cả các tập con sáp thứ tự toàn phần của X với quan hệ bao hàm là một tập sắp thứ tự.

Mỗi phần tử cực đại của tập này được gọi là tập con sắp thứ tự toàn phần cực đại của tập hợp X.

§3. TIÊN ĐỀ CHỌN

Giả sử σ là một họ nào đó các tập hợp. Ta nói rằng họ σ có đặc trưng hữu hạn nếu nó thỏa mãn các điều kiện sau:

(1) $\forall A \in \sigma$, nếu B là một tập con hữu hạn của A thì $B \in \sigma$.

(2) Nếu A là một tập hợp thỏa mãn: mỗi tập con hữu hạn bất kỳ của A đều thuộc σ, thì $A \in \sigma$.

Định lý. Các điều kiện sau là tương đương:

(i) Cho tập hợp khác rỗng bất kỳ X. Đối với một họ tùy ý $(A_i)_{1 \in I}$ những tạp con khác rỗng của tập X, tồn tại hàm $f : I \to X$ sao cho $f(i) \in (A_i)$ với mọi $i \in I$.

(ii) Trên mỗi tập hợp tùy ý luôn tồn tại một quan hệ thứ tự tốt.

(iii) Mỗi một tập con sắp thứ tự toàn phần của tập hợp sắp thứ tự X luôn được chứa trong một tập con sắp thứ tự toàn phần cực đại.

(iv) Nếu họ σ các tập có đặc trưng hữu hạn thì mỗi phần tử của nó được chứa trong một phần tử cực đại xác định.

(v) Nếu mọi tập con sắp thứ tự toàn phần của tập sắp thứ tự X đều bị chặn trên, thì mỗi phần tử $x \in X$ luôn so sánh được với một phần tử cực đại nào đó của X.

Điều kiện (i) được gọi là tiên đề chọn.

Điều kiện (ii) được gọi là điều kiện Zermelo.

Điều kiện (iii) được gọi là điều kiện Hausdorff.

Điều kiện (iv) được gọi là điều kiện Tukey.

Điều kiện (v) được gọi là điều kiện Kuratowsky - Zorn.

Chương 1
KHÔNG GIAN MÊTRIC

§1. KHÔNG GIAN MÊTRIC, SỰ HỘI TỤ TRONG KHÔNG GIAN MÊTRIC

1 Không gian mêtric

Định nghĩa 1.1 Không gian mêtric là một cặp (X, d), trong đó X là một tập hợp, $d : X \times X \to \mathbb{R}$ là một hàm xác đính trên X x X thoả mãn các điều kiện sau:

1. Với mọi $x, y \in X : d(x, y) \geq 0; d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$, (tiên đề đồng nhất).

2. Với mọi $x, y \in X: d(x, y) = d(y, x)$, (tiên đề đối xứng)

3. Với mọi $x, y, z \in X : d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$, (tiên đề tam giác).

Hàm d được gọi là mêtric trên X. Mỗi phần tử của X được gọi là một điểm của không gian X, số d(x, y) được gọi là khoảng cách giữa hai điểm x và y.

Ví dụ 1.1

Tập hợp các số thực $\mathbb{R}$ và tập hợp các số phức $\mathbb{C}$ là những không gian mêtric, với mêtric $d(x, y) = |x - y|$, với mọi $x, y \in \mathbb{R}$ (hoặc $\mathbb{C}$).

Ví dụ 1.2

Tập họp R^k là không gian mêtric với mêtric d xác định như sau:

$$d(x,y)=\left(\sum_{i=1}^{k}|\xi_i-\eta_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}, \text{ với } x=(\xi_1,\ldots,\xi_k),\ y=(\eta_1,\ldots,\eta_k)\in\mathbb{R}^k.$$

Hiển nhiên d thoả mãn hai tiên đề đồng nhất và đối xứng. Ta kiểm tra tiên đề tam giác. Trước hết, để ý rằng nếu $a_1,\ldots,a_k$, $b_1,\ldots,b_k$ là những số thực thì:

$$\sum_{i=1}^{k}|a_ib_i|\le\left(\sum_{i=1}^{k}|a_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{i=1}^{k}|b_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$ (Bất đẳng thức thức Côsi).

Lấy tùy ý $x=(\xi_1,\ldots,\xi_k),\ y=(\eta_1,\ldots,\eta_k),\ z=(\zeta_1,\ldots,\zeta_k)\in\mathbb{R}^k$. Khi đó

$$\left(d(x,y)\right)^2=\sum_{i=1}^{k}|\xi_i-\zeta_i|^2\le\sum_{i=1}^{k}\left(|\xi_i-\eta_i|+|\eta_i-\xi_i|\right)^2$$

$$\le\sum_{i=1}^{k}|\xi_i-\eta_i|^2+2\sum_{i=1}^{k}|\xi_i-\eta_i|.|\eta_i-\zeta_i|+\sum_{i=1}^{k}|\eta_i-\zeta_i|^2$$

$$\le\sum_{i=1}^{k}|\xi_i-\eta_i|^2+2\sqrt{\sum_{i=1}^{k}|\xi_i-\eta_i|^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{k}|\eta_i-\zeta_i|^2}+\sum_{i=1}^{k}|\eta_i-\zeta_i|^2$$

$$=\left(\sqrt{\sum_{i=1}^{k}|\xi_i-\eta_i|^2}+\sqrt{\sum_{i=1}^{k}|\eta_i-\zeta_i|^2}\right)^2=\left(d(x,y)+d(y,z)\right)^2.$$

Từ đó ta có $d(x,z)\le d(x,y)+d(y,z)$.

Ta gọi d là mêtric Euclid và (R^k, d) được gọi là không gian Euclid.

Ví dụ 1.3

Gọi C[a, b] là tập hợp các hàm số thực liên tục trên khoảng đóng hữu hạn [a, b]. Dễ dàng chứng minh được rằng C[a,b] là một không gian mêtric với mêtric $d(x,y)=\sup_{a\le t\le b}|x(t)-y(t)|$ với mọi x,y $\in$ C [a,b].

Định nghĩa 1.2. Giả sử M là một tập hợp con của không gian mêtric (X, d). Dễ dàng thấy rằng hàm $d_M = d|_{M.M}$ là một mêtric trên tập hợp M. Không gian mêtric (M,d_M) được gọi là không gian con của không gian mêtric (X, d), ta gọi d_M là mêtric cảm sinh bởi mêtric d trên M.

2. Sự hội tụ trong không gian mêtric

Định nghĩa 1.3. Ta nói dãy $\{x_u\}_{n=1}^{\infty}$ những phần tử của không gian mêtric (X, d) hội tụ đến phần tử hội tụ đến phần tử $x_0 \in X$ nếu $\lim\limits_{u\to\infty} d(x_u, x_0) = 0$ khi đó ta viết $\lim\limits_{u\to\infty} x_u = x_0$, hoặc $x_u \xrightarrow{u\to\infty} x_0$. Ta nói $\{x_u\}_{u=1}^{\infty}$ là dãy hội tụ và gọi x_0 là giới hạn của dãy $\{x_u\}$

Nhận xét.

a) Dãy hội tụ trong không gian mêtric có một giới hạn duy nhất.

Thật vậy, giả sử $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ và $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = b$ trong X. Khi đó:

$$d(a, b) \le d(a, x_n) + d(x_n, b) \text{ với mọi n.}$$

vì $\lim\limits_{n\to\infty} d(a.x_u) = 0$ và $\lim\limits_{n\to\infty} d(b.x_u) = 0$, nên từ bất đẳng thức trên suy ra d (a,b) = 0 tức là a = b.

b) trong không gian mêtric (X, d) nếu tìm $\lim\limits_{n\to\infty} x_u = a$ và $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$ thì $\lim\limits_{n\to\infty} d(x_n.y_n) = d(a,b)$.

Thật vậy với mọi n, ta đều có:

$$d(a,b) \le d(a,x_u) + d(x_n, y_u) + d(y_u,b).$$

Từ đó ta có. $d(a,b) - d(x_u, y_n) \le d(a, x_u) + d(y_u,b)$.

Chứng minh tương tự ta được:

$$d(x_n,y_n)-d(a,b)\le d(a,x_n)+d(y_n,b).$$

Từ hai bất đẳng thức trên suy ra:

$$|d(x_n,y_n)-d(a,b)|\le d(a,x_n)+d(y_n,b)$$

vì $\lim\limits_{n\to\infty} d(a.x_u)=0$ và im $\lim\limits_{n\to\infty} d(a.y_n)=0$, nên từ bất đẳng thức trên suy ra $\lim\limits_{n\to\infty} d(x_u.y_u)=d(a,b)$. Ta có điều cần chứng minh.

Ví dụ 1.4

Trong không gian $\mathbb{R}$ và $\mathbb{C}$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0 \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty}|x_n - x_0| = 0$.Đây là sự hội tụ mà ta đã biết trong giải tích cổ điển.

Ví dụ 1.5

Trong không gian $\mathbb{R}^k$, giả sử $\{x_n=(\xi_1^{(n)},\ldots,\xi_k^{(n)})\}_{n=1}^{\infty}$ là dãy trong $\mathbb{R}^k$ và $x_0=(\xi_1^{(0)},\ldots,\xi_k^{(0)})\in\mathbb{R}^k$. Khi đó:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x_0 \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{i=1}^{k}\left|\xi_i^{(n)}-\xi_i^{(0)}\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}=0 \Leftrightarrow$$

$$\lim_{n\to\infty}\xi_i^{(n)}=\xi_i^{(0)}, i=1,\ldots,k.$$

Vì vậy người ta nói rằng sự hội tụ trong không gian Euclid $\mathbb{R}^k$ là sự hội tụ theo các toạ đô.

Ví dụ 1.6

trong không gian C[a.b], $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0 \Leftrightarrow$ dãy hàm số $\{ x_n(t) \}^{\infty}_n$ = 1 hội tụ đều đặn hàm số $x_0(t)$ trên [a, b]. Thật vậy, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0 \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} d(x_n,x_0)=0 \Leftrightarrow \forall\ \varepsilon>0,\ \exists n_0\in\mathbb{N},$ sao cho

$\forall n \in \mathbb{N}$ thỏa mãn $n \geq n_0$ ta có $d(x_n, x_u) < \varepsilon$, tức là $\sup_{a \leq t \leq b} |x_n(t) - x_0(t)| < \varepsilon$ với mọi $n \geq n_0 \Leftrightarrow | X_n(t) - X_0(t)| < \varepsilon$, $\forall$ n $> n_0$ và $\forall t \in [a, b]$.

§2. TẬP HỢP MỞ VÀ TẬP HỢP ĐÓNG

1 Tập mở

Định nghĩa 1.4 Giả sử (X, d) là một không gian mêtric $x_0 \in X$ và r là một số dương. Tập hợp $S(x_0, r) = \{ x \in X| \ d(x, x_0) < r\}$ được gọi là hình cầu mở tâm x_0 bán kính r.

Tập hợp $S[x_0, r] = \{x \in X \mid d(x, x_0) < r\}$ được gọi là hình cầu đóng tâm x_0 bán kính r.

Với A, B là 2 tập con khác rỗng trong X, ta gọi:

$$d(A, B) = \inf_{x \in A, y \in B} \{d(x, y)\}$$

là khoảng cách giữa hai tập con A, B.

Định nghĩa 1.5 Giả sử A là một tập con của không gian mêtric (X, d). Điểm x_0 của *X* được gọi là điểm trong của tập hợp A nếu tồn tại một hình cầu mở $S(x_0, r) \subset A$. Tập tất cả các điểm trong của tập A được gọi là phần trong của A và ký hiệu là đứa hoặc A^0).

Phần trong của một tập bợp có thể là tập hợp rỗng.

Định nghĩa 1.6. Tập hợp $G \subset X$ được gọi là tập mở nếu mọi điểm của G đều là điểm trong của nó:

Hiển nhiên tập X và tập $\varnothing$ đều là những tập mở trong không gian mêtric (X, d). Mỗi hình cầu mở là tập mở trong (X, d).

Định lý 1.1 Trong không gian mêtnc (X, d) ta có:

a) Hợp của một họ tuỳ ý những tập mở là một tập mở.

b) Giao của một số hữu hạn những tập mở là một tập mở.

Chứng minh.

a) giả sử $\{U_t\}_{t \in T}$, là một họ tùy ý những tập con mở trong không gian mêtric (X, d). Ta chứng minh $U = \bigcup_{t \in T} U_t$ là một tập mở.

Thật vậy, giả Sử X $\in$ U tùy ý. Khi đó x $\in$ U_1 với t nào đó. Vì U, mở nên tồn tại một hình cau S(x, r) $\in$ U_1, do đó S(x, r) $\subset$ U. Vậy U là một tập mở.

b) Giả sử U_1 ,... , U_n là những tập mở. Ta chứng minh $V = \bigcap_{i=1}^{n} U_i$ là tập mở. Thật vậy nếu x $\in$ V thì x $\in$ U; với mọi i = 1,…, n. Vì mỗi U_i mở nên tồn tại một số dương r; sao cho $S(x,r_i) \subset U_i$, i = 1 ,... , n. Đặt $r = \min\{r_1, ... r_u\}$. Khi đó hiển nhiên S(x, r) $\subset$ U_i với i = 1,...., n, do đó S(x, r) $\subset$ V. Vậy TẾ là một tập mở. □

Định nghĩa 1.7 với x $\in$(X,d) tùy ý, tập con bất kỳ U $\subset$ X chứa điểm x được gọi là lân cận của điểm x nếu U chứa một tập mở chứa x.

Hiển nhiên, tập A trong không gian mêtric X là mở khi và chỉ khi với mỗi x $\in$ A luôn tồn tại một lân cận U của x chứa trong A. hiển nhiên ta có:

1) A^0 là tập mở, và đó là tập mở lớn nhất chứa trong A.

2) Tập A là mở khi và chỉ khi $A = A^0$

3) Nếu $A \subset B$ thì $A^0 \subset B^0$.

2 Tập đóng

Định nghĩa 1.8. Tập con $A \subset (X, d)$ được gọi là tập đóng nếu phần bù của A trong X (tập X\A) là một tập mở.

Hiển nhiên các tập X và $\varnothing$ là những tập đóng trong không gian mêtric (X, d). Dễ dàng chứng minh được mọi hình cầu đóng là tập đóng.

Định lý 1.2. Trong không gian mêtric (X, d) ta có:

a) Giao của một họ tuỳ ý những tập đóng là một tập đóng.

b) Hợp của một họ hữu hạn những tạp đóng là một tập đóng.

Chứng minh.

a) Giả sử $\{E_t\}_{,t\in T}$ là một họ tùy ý những tập đóng trong không gian mêtric X. Khi đó $X \setminus \bigcap_{t\in T} F_t = \bigcup_{t\in T} (X \setminus F_t)$ là tập mở, vì với mọi $t \in T$, tập $X \setminus F_t$ là mở. Vậy $\bigcap_{t\in T} F_t$ là một tập hợp đóng.

b) Chứng minh tương tự. □

Định lý 1.3. Tập con F của không gian mêtric X là đóng khi và chỉ khi với dãy bất kỳ $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ những phần tử của F, nếu $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0 \in X$ thì $x_0 \in F$

Chứng minh.

(=>) Cho tập F đóng, giả sử tồn tại dãy $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ trong F thỏa mãn $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$ và $x_0 \notin F$.

Vì X\F là tập mở nên tồn tại một hình cầu $S(x_0, \varepsilon)$ Chứa trong X\F. Vì $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n, x_0) = 0$ nên với n đủ lớn $d(x_u,x_0) < \varepsilon$, tức là $x_n \in X\backslash F$ với n đủ lớn. Điều này mâu thuẫn với giả thiết.

(<=) Đảo lại, giả sử với dãy bất kỳ $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ những phần tử của F, nêu $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0 \in X$ thì $x_0 \in F$., và giả sử X\F không phải là một tập mở. Khi đó tồn tại ít nhất một điểm $x_0 \in X\backslash F$ không phải là điểm trong của X\F. Khi đó, với mọi số tự nhiên n, tồn tại một phần tử $x_n \in F$ thuộc hình cầu $S(x_0, \frac{1}{n})$; Dãy $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ là một dãy phần tử của tập F hội tụ đến $x_0 \notin F$ (vì $d(x_0, x_n) < \frac{1}{n}$ với mọi n). Điều này mâu thuẫn với giả thiết.

Định nghĩa 1.9. Cho $A \subset (X, d)$, giao của tất cả các tập đóng trong X chứa A được gọi là bao đóng của tập A, ký hiệu là $\overline{A}$.

Vì X là một tập đóng chứa A nên bao đóng của tập A luôn tồn tại.

Hiển nhiên ta có :

1) $\overline{A}$ là một tập đóng và đó là tập đóng nhỏ nhất chứa A.

2) Tạp A là đóng khi và chỉ khi $\overline{A} = A$.

3) Nếu $A \subset B$ thì $\overline{A} \subset \overline{B}$.

Địnhlý 1.4. Giả sử $A \subset (X, d)$, và $x \in X$. Điểm $x \in \overline{A}$ khi và chỉ khi mỗi lân cận U của x đều có điểm chung với A.

Chứng minh.

(=>) Giả sử $x \in \overline{A}$, và giả sử tồn tại một lân cận mở U của x thỏa mãn $U \cap A = \varnothing$ khi đó X\U là tập đóng chứa A => $\overline{A} \subset X\backslash U$ => $\overline{A} \cap U = \varnothing$ vô lý.

(<=) Nếu $x \notin \overline{A}$ thì $U = X\backslash \overline{A}$ là một lân cận của x không có điểm chung với A, mâu thuẫn với giả thiết. □

Định lý.15. Giả sử A ⊂ (X, d), và x ∈ X. Điểm x $\in \overline{A}$ khi và chỉ khi tồn tại một dãy $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ những phần tử của A sao cho $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$

Chứng minh.

(=>) Giả sử x $\notin \overline{A}$. Theo định lý 1.4, với mỗi số tự nhiên n ta có $S(x, \frac{1}{n}) \cap A \neq \varnothing$. Với mỗi n chọn $x_n \in A \cap S\left(x, \frac{1}{n}\right)$. Khi đó $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ là một dãy điểm của A thoả mãn $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$.

(<=) Nếu $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset A$ thỏa mãn $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ thì từ định lý 1.3 suy ra x $\in \overline{A}$ □

Định nghĩa 1.10. Tập con A của không gian mêtric X được gọi là tập trù mật trong X nếu $\overline{A} = X$. Tập con B của không gian mêtric X được gọi là tập không đâu trù mật trong X nếu $(\overline{B})^0 = \varnothing$

nhận xét.

a) Tập A là trù mật trong X khi và chỉ khi với mỗi x ∈ X tồn tại một dãy $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ trong A sao cho $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$.

b) Tập B của không gian mêtric X là tập không đâu trù mật khi và chỉ khi mỗi hình cầu tùy ý trong X luôn chứa một hình cầu không có điểm chung với B.

Định nghĩa 1.11. Không gian mêtric *X* được gọi là không gian khả li nếu tồn tại một tập con M đếm được trù mật trong X.

Ví dụ 1.7

$\mathbb{R}$ là một không gian khả li vì $\mathbb{Q}$ là đếm được và trù mật trong $\mathbb{R}$.

Định nghĩa 1.12. Cho (X_1, d_1) và (X_2, d_2) là hai không gian mêtric.

Với bất kỳ $(x_1, x_2), (y_1, y_2) \in X_1 \times X_2$ đặt:

$$d[(x_1, x_2), (y_1, y_2)] = \{[d(x_1,y_1)]^2 + [d(x_2,y_2)]^2\}^{1/2}.$$

Hàm d xác định như trên là một mêtric trên $X_1 \times X_2$, tập $X_1 \times X_2$ cùng với mêtric d được gọi là tích của các không gian mêtric X_1 và X_2

§3. ÁNH XẠ LIÊN TỤC GIỮA CÁC KHÔNG GIAN MÊTRIC

Định nghĩa 1.3. Cho (X, dx) và (Y, dy) là hai không gian mêtric, ánh xạ $f : X \to Y$ gọi là liên tục tại điểm $x_0 \in X$ nếu với mỗi số dương ε đều tồn tại một số dương δ sao cho với mọi $x \in X$, nếu $dx(x, x_0) < \delta$ thì $dy(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$.

Ta nói ánh xạ f là liên tục trên X nếu nó liên tục tại mọi điểm $x \in X$.

Định lý 1.6. Cho ánh xạ $f : X \to Y$ từ không gian mêtric (X, d_x) vào không gian mêtric (Y, d_y), Khi đó ta có các mệnh đề sau là tương đương:

1) Ánh xạ f là liên tục tại điểm $x \in X$.

2) Với mọi dãy $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ trong X, nếu $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ trong X thì $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(x)$ trong Y.

Chứng minh. Hiển nhiên. □

Nhận xét. Nếu X, Y, Z là ba không gian mêtric, f : $X \to$ Y và g : Y $\to$ Z là những ánh xạ liên tục thì g.f : X $\to$ Z là một ánh xạ liên tục.

*Định nghĩa 1.14. S*ong ánh f : X $\to$ Y từ không gian mêtric (X, d_x) lên không gian mêtric (Y, d_y) được gọi là một phép đồng phôi nếu các ánh xạ f và f^{-1} : Y $\to$ X đều là những ánh xạ liên tục.

Hiển nhiên, song ánh f : X $\to$ Y là một phép đồng phôi khi và chỉ khi với mọi dẫy $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ những phần tử của X và với $x_0 \in$ X, ta có $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(x)_0$

Hai không gian mêtric X và Y được gọi là đồng phôi với nhau nếu tồn tại một phép đồng phôi f : X $\to$ Y.

Định nghĩa 1.15. Ánh xạ f : X $\to$ Y từ không gian mêtric (x, d_x) Vào không gian mêtric (Y, d_y) được gọi là liên tục đều nói với mỗi số dương E, đều tồn tại một số dương δ sao cho với mọi $x_1, x_2 \in$ X, nếu $d_x(x_1, x_2) < \delta$ thì $d_y(f(x_1), f(x_2)) < \varepsilon$.

hiển nhiên một ánh xạ liên tục đều là ánh xạ liên tục. Điều ngược lại không đúng.

Định lý 1.*7* Cho không gian mêtric (X, d), A $\subset$ X, A $\neq \varnothing$. Khi đó ánh xạ: f : X $\to$ R, xác định bởi f(x) = d(x,A), là ánh xạ liên tục đều.

Chứng minh.

Lấy x1 , x2 $\in$ X tuỳ ý, khi đó $\forall z \in A$ ta có :

$$d(x_1, z) \le d(x_1,x_2) + d(x_2,z),$$

$$\Rightarrow d(x_1, A) = \inf_{z\in A} d(x_1, z) \le d(x_1, x_2) + d(x_2, z)$$

$$\Rightarrow d(x_1, A) - d(x_1, x_2) \le \inf_{z\in A} d(x_2, z)$$

$$\Rightarrow d(x_1, A) - d(x_1, x_2) \le d(x_2, A). \ (*)$$

Vì vai trò của x_1 và x_2 là như nhau nên chứng minh tương tự ta có: $d(x_2, A) - d(x, x_2) \le d(x_1, A)$. (**)

Từ (*) và (**) => $|d(x_1, A) - d(x_2, A)| \le d(x_1, x_2)$. Với $\varepsilon > 0$ tuỳ ý ta chọn $\delta = \varepsilon$. Khi đó $\forall x_1, x_2 \in X$ thoả mãn $dx(x_1, x_2) < \varepsilon$ Ta có:

$$d(f(x_1), f(x_2)) = d(d(x_1, A), d(x_2, A)) = |d(x_1, A) - d(x_2, A)| \le d(x_1, x_2) < \varepsilon. \ \square$$

Định lý 1.8. Nếu f : X $\to$ Y; g : Y $\to$ Z là các ánh xạ liên tục đều giữa các không gian mêtric thì tích gf : X $\to$ *Z* là cũng là ánh xạ liên tục đều

Chứng minh.

Giả sử d_x, d_y, d_z, lần lượt là các mêtric trên các tập tương ứng X, Y, Z Khi đó $\forall \varepsilon > 0$, vì g là liên tục đều nên $\delta > 0$ sao cho với mỗi cặp $y_1,y_2 \in Y$ thoả mãn $dy(y_1,y_2) < \delta$ thì $dz(g(y_1),g(y_2)) < \varepsilon$. Mặt khác do f là ánh xạ liên tục đều nên $\exists \xi > 0$ sao cho với mỗi cặp x_1 , $x_2 \in X$ thoả mãn $dx(x_1, x_2) < \xi$ thì $dy(f(x_1), f(x_2)) < \delta$ và do vậy ta có $dz(gf(x_1), gf(x_2)) < \varepsilon$. suy ra gf là ánh xạ liên tục đều.

Định nghĩa 1.16. *Á*nh xạ f : (X, dx) $\to$(Y, d_y) được gọi là một phép đẳng cự nếu $\forall x, y \in X$ ta có $d_x(x, y) = d_y(f(x), f(y))$. Hai không gian mêtric X, Y gọi là đẳng cự nếu tồn tại một phép đẳng cự từ X lên Y.

Nhận xét. Phép đẳng cự f là một đơn ánh liên tục đều nếu nó là toàn ánh nữa thì ánh xạ f^{-1} cũng là một phép đẳng cự, và khi đó hai không gian X và Y là đẳng cự, đồng thời cũng là đồng phôi với nhau.

§4. KHÔNG GIAN MÊTRIC ĐẦY ĐỦ

1 Không gian mêtlic đầy đủ

Định nghĩa 1.17 Dãy $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ trong không gian mêtric (X, d) được gọi là dãy Côsi, (hoặc dãy cơ bản), nếu với mỗi ε > 0, tồn tại số $n_0 \in \mathbb{N}$ sao cho với mọi số i, j ≥ n_0 luôn có d(x_i, x_j < ε Không gian mêtric (X, d) được gọi là không gian đầy đủ nếu mọi dãy Côsi trong X đều hội tụ.

Định lý 1.9. Mọi dãy hội tụ trong không gian mêtric đều là dãy Côsi

Chứng minh.

Giả sử dãy $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ là dãy hội tụ, và $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, khi đó với mọi ε > 0 tùy ý, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ sao cho ∀i ≥ n_0 ta có d(a, xi) < $\frac{\varepsilon}{2}$. Ta có: d(x_i, x_j) ≤ d(x_i, a) + d(a, x_j) < ε.

Vậy $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ là dãy Côsi. □

Ta có thể chỉ ra một ví dụ chứng tỏ một dãy Côsi chưa chắc đã hội tụ.

Ví dụ 1.8

Xét tập các số hữu tỉ $\mathbb{Q}$ với mêtric d(x, y) = |x - y| , Và dãy $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ Xác định như sau: $x_n = (1 + \frac{1}{n})$, n = 1, 2,… Khi đó với mọi ε > 0, tồn tại chỉ số $n_0 > \frac{2}{\varepsilon}$ sao cho với mọi số i, j ≥ n_0 luôn có $d(x_i, x_j) \le |\frac{1}{i} - \frac{1}{j}| = |\frac{1}{i}| + |\frac{1}{j}| < \frac{2}{n_0} < \varepsilon$. Vậy dãy $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ là dãy Côsi. Tuy nhiên $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = e \notin \mathbb{Q}$ chứng tỏ trong $\mathbb{Q}$ dãy $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ không hội tụ. Và do vậy $\mathbb{Q}$ không phải là không gian mêtric đầy đủ.

Định lý 1.10.

a) Không gian con đầy đủ của một không gian mêtric là tập đóng.

b) Tập đóng trong không gian mêtric đầy đủ là một không gian con đầy đủ.

Chứng minh.

a) Giả sử A là không gian con đầy đủ của không gian mêtric X, lấy x ∈ $\overline{A}$ tuỳ ý => tồn tại dãy $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ trong A: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$.

Dãy $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ là dãy Côsi trong A, vì A là đầy đủ nên theo định nghĩa nó phải hội tụ đến điểm nào đó thuộc A, vì mỗi dãy hội tụ chỉ có một giới hạn => x ∈ A => $\overline{A}$ ⊂ A => A = $\overline{A}$. Vậy A là tập đóng trong X.

b) Giả sử A là tập đóng trong *X* và dãy $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ là dãy Côsi trong A. Vì nó cũng là dãy Côsi trong X, nên nó hội tụ: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$. Do A đóng nên x_0 ∈ A. Vậy A là không gian con đầy đủ. □

Định lý 1.11. Giả sử $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ là dãy Côsi trong không gian mêtric (X, d), x_0 ∈ X thoả mãn mỗi lân cận bất kỳ của x_0 đều chứa vô số điểm của dãy $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$. Khi đó dãy $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ hội tụ đến

x_0, $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$

Chứng minh.

Giả sử ε là một số thực dương tuỳ ý, xét hình cầu mở S(x_0, ε trong X. Vì $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ là dãy Côsi nên $\exists n_0 \in \mathbb{N}$.sao cho với i, j > n_0 ta có $d(x_i, x_j) < \frac{\varepsilon}{2}$

Mặt khác theo giả thiết tồn tại các chỉ số

i_1, i_2 ……… $i_n \geq n_0$ sao cho $d(x_{ik}, x_0) < \frac{\varepsilon}{2}$ với mỗi $k \in \mathbb{N}$.

Khi đó với p ≥ n_0, ta có $d(x_p, x_0) \leq d(x_p, x_{ik}) + d(x_{ik}, x_0) < \varepsilon$. Nghĩa là $x_p \in S(x_0, \varepsilon)$. vậy $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ □

Đính lý 1.12. Tập $\mathbb{R}$ với mêtric Euclid là không gian mêtric đầy đủ

Chứng minh.

Giả sử $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ là dãy Côsi trong tập các số thực $\mathbb{R}$. Khi đó với ε = 1, ∃k sao cho ∀i, j ≥ k ta có $d(x_i, x_j) = |x_i - x_j| < 1$.

Đặt m = max{ $|X_1$, $|X_2|$, $|X_3|$ ….. $|X_{k-1}|$, $|X_k| + 1$} Khi đó với i > k ta có:

$|X_i| = d(X_i, 0) \leq d(X_i, X_k) + d(X_k, 0) < |X_k| + 1 \leq m$. vậy dãy $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ là dãy bị chặn.

Gọi A={ y ∈ $\mathbb{R}$ | (y, ∞) chỉ chứa nhiều nhất một số hữu hạn điểm của dãy $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$. Ta có A ≠ ∅ do dãy $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ là bị chặn. Do A là tập bị chặn dưới, ta ký hiệu x = infA. Với δ > 0 tuỳ ý, theo cách xác định của tập A và của phần tử x ta có khoảng (x - δ, x + δ) chứa vô hạn điểm của dãy $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, theo định lý trên ta suy ra dãy $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, hội tụ đến điểm x. Vậy mọi dãy Côsi trong $\mathbb{R}$ đều hội tụ, ta có $\mathbb{R}$ là không gian mêtric đầy đủ. □

Định lý 1.13. Tích Đề các của hai không gian mêtric đầy đủ là một không gian mêtric đầy đủ.

Chứng minh.

Giả sử (X, $d_{x)}$, (Y, d_y) là hai không gian mêtric đầy đủ, d là mêtric trên tích X x Y (theo định nghĩa 1.12). Giả sử $\{x_n, y_n\}_{n=1}^{\infty}$ là một dãy Côsi trong X x Y. Do với mỗi cặp i, j ta có dx(x_i, x_j < d[(x_i, y_i,), (x_j, y_j)] và $d_Y(y_i, y_j) \leq d[(x_i, y_i), (x_j, y_j)]$ nên suy ra các dãy $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}, \{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ cũng là dãy Côsi, theo giả thiết các dãy này hội tụ. Giả sử $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$ và $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y_0$. Với ε > 0 tuỳ ý, tồn tại chỉ số k để $d_X(x_i, x_0) < \dfrac{\varepsilon}{\sqrt{2}}$ và $d_Y(y_i, y_0) < \dfrac{\varepsilon}{\sqrt{2}}$ với mọi i ≥ k. Từ đó suy ra:

$$d[(x_i, y_i), (x_0, y_0)] = \{(d_X(x_i, x_0))^2 + (d_Y(y_i, y_0))^2\}^{1/2} < \sqrt{\frac{\varepsilon^2}{2} + \frac{\varepsilon^2}{2}} = \varepsilon.$$

Vậy dãy $\{x_n, y_n\}_{n=1}^{\infty}$ hội tụ đui điểm (x_0,y_0) (do $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n, y_n) = (x_0, y_0)$). □

Hệ quả.

a) Tích Đề các của một số hữu hạn các không gian mêtric đầy đủ là không gian mêtric đầy đủ.

b) Không gian mêtric Euclid R^u là không gian mêtric đầy đủ.

Định lý 1.14. Nếu ánh xạ f: (X, d_x) → (Y, d_y) là liên tục đều thì đối với mỗi dãy Côsi $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ trong *X* ta có dãy $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ trong Y cũng là dãy Côsi (ánh xạ liên tục đều biến dãy Côsi thành dãy Côsi).

Chứng minh.

Ta chứng minh dãy $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ là dãy Côsi. Vì f là ánh xạ liên tục đều nên $\forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0$ để từ dx(x, x') < δ ⇒ $d_Y(f(x), f(x^1))$ < ε.

Hơn nữa theo giả thiết $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ là dãy Côsi nên với δ tìm được ở trên luôn tồn tại $n_0 \in \mathbb{N}$ sao cho $d_x(x_i, x_j) < \delta$, với mọi i, j ≥ n_0 ⇒ $d_Y(f(x_i), f(x_j)) < \varepsilon$ với mọi i, j ≥ n_0. Vậy dãy $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ là dãy Côsi trong Y. □

2 Nguyên lý ánh xạ co, bổ đề Cantor.

Định nghĩa.**18.** Giả sử (X, d_x), (Y, d_Y) là các không gian mêtric, ánh xạ f: (X, d_x) → (Y, d_Y) được gọi là ánh xạ co nếu ∃k ∈ [0, 1) sao cho: $d_Y(f(X), f(X')) \le k.d_X(X,X')$ với mọi X, X' ∈ X.

Nhận xét. Nếu f : X → Y là ánh xạ co thì f là ánh xạ liên tục đều.

Thật vậy, ∀ε > 0, lấy $\delta = \dfrac{\varepsilon}{k}$ ta có với bất kỳ X, X' ∈ X thoả mãn $d_X(X, X') < \delta$ thì ta có $d_Y(f(X), f(X')) \le k.d_X(X, X' < k.\delta = \varepsilon$. Vậy f là liên tục đều.

Định lý 1.15. (Nguyên lý ánh xạ co). Nếu (X, d) là không gian mêtric đầy đủ, f : X → X là ánh xạ co thì trong X tồn tại duy nhất một điểm a thoả mãn f(a) = a.

Chứng minh.

Giả sử k ∈ [0, 1] thoả mãn d(f(X), f(X')) ≤ k.d(X, X'), ∀X, X' ∈ X. Lấy điểm X_0 tuỳ ý của X, đặt $x_1 = f(X_0)$, $X_2 = f(x_1)$,...,

$X_n = f(X_{n-1})$, … Khi đó $\forall n \geq 1$ ta có :

$$d(x_n, x_{n+1}) = d(f(x_{n-1}), f(x_n)) \leq k.d(x_{n-1}, x_n)$$

$$\Rightarrow d(x_n, x_{n+1}) \leq k^n d(x_0, x_1) \ (*)$$

$$\Rightarrow d(x_n, x_{n+p}) \leq d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_{n+2}) + \ldots + d(x_{n+p-1}, x_{n+p})$$

$$\leq (k^n + k^{n+1} + \ldots + k^{n+p-1})d(x_0, x_1) < \frac{k^n}{1-k} d(x_0, x_1)$$

(với mọi p nguyên đương).

vậy $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ là dãy Côsi trong không gian mêtric đầy đủ X. Do đó tồn tại giới hạn $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $a \in X$.

Mặt khác biểu thức (*) có thể viết dưới dạng:

$d(X_n, f(X_n)) \leq k^n d(X_0,X_1)$,

cho $n \to \infty$ và sử dụng tính liên tục của f ta nhận được: $d(a, f(a)) = 0 \Rightarrow f(a) = a$. Vậy a là điểm bất động của ánh xạ f.

Giả sử a' cũng là điểm bất động của f, nghĩa là f(a') = a'. Khi đó ta có:

$$d(a, a') = d(f(a), f(a')) \leq kd(a, a') \Rightarrow (1 - k)d(a, a') \leq 0$$

$$\Rightarrow d(a, a') = 0 \Rightarrow a = a'.$$

Vậy điểm bất động a của ánh xạ f là duy nhất. □

Định lý 1.16. (Bổ đề Cantor). Giả sử $\{S_n[a_n, r_n]\}_{n \in N}$ là dãy các hình cầu đóng bao nhau trong không gian mêtric đầy đủ X:

$S_1[a_1, r_1] \supset \ldots \supset S_n[a_n, r_n] \supset \ldots$, có bán kính $r_n \to 0$.

Khi đó tất cả các hình cầu của dãy trên có một điểm chung duy nhất.

Chứng minh.

Với mọi cặp số tự nhiên n, m thoả mãn $m \geq n$ ta có:

$$S_m[a_m, r_m] \subset S_n[a_n, r_n] \Rightarrow a_m \in S_n[a_n, r_n] \Rightarrow d(a_n, a_m) < r_n$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty, m\to\infty} d(a_n, a_m) = 0$$

$$\Rightarrow \{a_n\}_{n=1}^{\infty} \text{ là dãy Côsi trong X.}$$

Do X là không gian mêtric đầy đủ nên dãy $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ hội tụ, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \in$ X. Khi đó a $\in$ $S_n[a_n, r_n]$, $\forall$n $\in$ ℕ vì $\forall$n $\in$ ℕ ta có dãy $\{a_{n+k}\}_{n=1}^{\infty}$ là một dãy trong $S_n[a_n, r_n]$ và $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$.

Giả sử b cũng là một điểm chung của tất cả các hình cầu $S_n[a_n, r_n]$. Khi đó ta có d(a, b) $\le$ d(a, a_n) + d(a_n, b) $\le$ $2r_n$,$\forall$n $\in$ ℕ$\Rightarrow$d(a,b) =0 $\Rightarrow$ a=b. □

Định nghĩa 1.19. Tập con A trong không gian mêtric X được gọi là tập hợp thuộc phạm trù thứ nhất nếu nó là hợp của một họ đếm được những tập con không đâu trù mật trong *X* (nghĩa là $A = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$, trong đó $(\overline{A})^0 = \varnothing$ với mọi n). Tập con của X không thuộc phạm trù thứ nhất được gọi là tập hợp thuộc phạm trù thứ hai.

Định lý 1.17 (Barie) Không gian mêtric đầy đủ là tập hợp thuộc phạm trù thứ hai.

Chứng minh.

Giả sử (X, d) là không gian mêtric đầy đủ và X thuộc phạm trù thứ nhất. Khi đó $X = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ trong đó $(\overline{A})^0 = \varnothing$ với mọi n $\in$ ℕ. Gọi S là một hình cầu đóng bất kỳ. vì $(\overline{A})^0 = \varnothing$ với mọi n, nên tồn tại hình cầu đóng $S_1 \subset S$ thỏa mãn $S_1 \cap A_1 = \varnothing$ (ta có thể chọn bán kính của $S_1 < 1$), tương tự tồn tại hình cầu đóng S_2

$\subset$ S_1 thỏa mãn $S_2 \cap A_2 = \varnothing$ (ta có thể chọn bán kính của S < $\frac{1}{2}$). Bằng quy nạp ta nhận được một dãy hình cầu đóng $\{S_n\}$ bao nhau, thỏa mãn $S_n \cap A_n = \varnothing$ và S_n có bán kính nhỏ hơn $\frac{1}{n}$ với mọi n. Theo bổ đề Cantor, trong X tồn tại điểm a thỏa mãn a $\in S_n$ với mọi n $\Rightarrow$ a $\notin A_n$ với mọi n. Do đó $a \notin X = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ Vô lý. □

3 Thác triển liên tục

Định nghĩa 1.20. Giả sử M là không gian con của không gian mêtric X, g: M $\to$ Y là ánh xạ liên tục từ M vào không gian mêtric Y. Nếu tồn tại ánh xạ liên tục f : X $\to$ Y, sao cho $f|_M = g$, thì ta nói f là một thác triển liên tục của g từ M lên X.

Định lý 1.18. (Nguyên lí thác triển liên tục). Giả sử M là không gian con trù mật của không gian mêtric X. g : M $\to$ Y là ánh xạ liên tục đều, trong đó Y là không gian mêtric đầy đủ. Khi đó tồn tại duy nhất ánh xạ liên tục đều f : X $\to$ Y, sao cho $f|_M$ = g.

Chứng minh.

M trù mật trong X $\Rightarrow \forall X \notin X$, $\exists$ $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset$ M sao cho $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ (theo định lý 1.5). Hiển nhiên $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ là dãy Côsi trong M. Vì g liên tục đều, nên $\{g(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ là dãy Côsi trong Y. Do Y là không gian mêtric đầy đủ nên dãy $\{g(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ hội tụ đến phần tử y $\in$ Y. Phần tử y chỉ phụ thuộc vao x chứ không phụ thuộc vào dãy $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Thật vậy, giả sử ta Có dãy $\{x'_n\}_{n=1}^{\infty} \subset$ M, thoả mãn $\lim_{n\to\infty} x'_n = x$ .Khi đó: $\lim_{n\to\infty} d_X(x_n, x'_n) = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} d_Y(g(x_n), g(x'_n)) = 0$

Do g liên tục đều $\lim_{n\to\infty} g(x'_n) = x$. Như vậy, ta có ánh xạ f : X → Y cho phần tử x $\in$ X tương ứng với phần tử f(x) = y xác định như trên.

Nếu x $\in$ M, chọn $X_n \equiv X$ ($\forall n \in N$), khi đó f(x) = $\lim_{n\to\infty} g(x_n) = g_x$ ⇒f $|_M$ = g. Ta có ánh xạ f liên tục đều. Thật vậy

Vì g là liên tục đều suy ra $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ sao cho $\forall x_1$, $x_2 \in$ M, thoả mãn $d_X(X_l, X_2) < \delta$, thì $dY(g(X_1), g(X_2)) < \varepsilon$. Lấy tuỳ ý X', $X'' \in X$ sao cho $d_X(X', X'') < \delta$. Giả sử

$\{x'_n\}_{n=1}^{\infty} . \{x''_n\}_{n=1}^{\infty}$ là hai dãy trong M sao cho $\lim_{n\to\infty} x'_n = x$ $\lim_{n\to\infty} x''_n = x$. Khi đó ta có $\lim_{n\to\infty} d_X(x'_n, x''_n) = d_X(x', x'') \Rightarrow d_X(x'_n, x''_n) < \delta$(với n đủ lớn) $\Rightarrow d_Y(g(x'_n), g(x''_n)) < \varepsilon$ (với n đủ lớn) $\Rightarrow d_Y(f(x'), f(x'')) < \varepsilon \Rightarrow$ f liên tục đều.

Ánh xạ f được xác định như trên là duy nhất như vậy, giả sử h : X → Y cũng là một ánh xạ liên tục đều sao cho h $|_M$=g. Lấy bất kỳ x $\in$ X và giả sử $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ là một dãy của M thoả mãn $\lim_{n\to\infty} X_n = X$. Khi đó, vì h là ánh xạ liên tục đều, nên ta có $h(x) = \lim_{n\to\infty} h(x_n) = \lim_{n\to\infty} g(x_n) = f(x)$ Từ đó suy ra f = h. □

4 Bổ sung cho một không gian mêtric

Tính đầy đủ của một không gian mêtric đóng một vai trò rất quan trọng trong giải tích hàm, vì vậy từ một không gian mêtric không đầy đủ, người ta tìm cách nhúng nó vào một không gian mêtric đầy đủ.

Định lý 1.19. Giả sử (X, d) là không gian mêtric không đầy đủ. Khi đó, tồn tại một không gian mêtric đầy đủ $(\hat{X}, \hat{d})$ sao cho:

1. X đẳng cự với một không gian con X_1 của $\hat{A}$.

2. X_1 trù mật trong $\hat{X}$.

Không gian $(\hat{X}, \hat{d})$ được xác định một cách duy nhất nếu coi các không gian đẳng cự là đồng nhất. Không gian $(\hat{X}, \hat{d})$ được gọi là bổ sung của không gian (X, d).

Chứng minh.

gọi Z là tập tất cả các dãy Côsi của X. Ta xây dựng trên Z một quan hệ tương đương sau : với

$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{y_n\}_{n=1}^{\infty} \in Z$, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \sim \{y_n\}_{n=1}^{\infty} \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} d(x_n, y_n) = 0.$

Gọi $\hat{X}$ là tập các lớp tương đương trên tập Z : $\hat{X} = Z/\sim$ Ta ký hiệu các phần tử của $\hat{X}$ bởi $\hat{x}$, $\hat{y}$,... Lấy $\hat{x}$, $\hat{y} \in \hat{X}$ tùy ý và giả sử: $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \in \hat{x}, \{y_n\}_{n=1}^{\infty} \in \hat{y}$ Khi đó với hai số tự nhiên n, m bất kỳ, ta có : $d(x_n, y_n) \le d(x_n, x_m) + d(x_m, y_m) + d(y_m, y_n)$ suy ra: $d(x_n, y_n) - d(x_m, y_m) \le d(x_n, x_m) + d(y_m, y_n)$.

Tương tự ta có $d(x_m, y_m) - d(x_n, y_n) \le d(x_n, x_m) + d(y_m, y_n)$.

Do đó : $|d(x_n, y_n) - d(x_m, y_m)| \le d(x_n, x_m) + d(y_n, y_m)$.

Vì $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ là các dãy Côsi $\Rightarrow \{d(x_n, y_n)\}_{n=1}^{\infty}$ là dãy Côsi trong $\mathbb{R}$, ta có dãy $\{d(x_n, y_n)\}_{n=1}^{\infty}$ hội tụ (do $\mathbb{R}$ là không gian mêtric đầy đủ).

Hơn nữa, $\lim\limits_{n\to\infty} d(x_n, y_n)$ không phụ thuộc vào việc chọn các day Côsi đại diện trong $\hat{x}$ và $\hat{y}$ là $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$

Thật vậy, giả sử $\{x'_n\}_{n=1}^{\infty} \in \hat{x}$, $\{y'_n\}_{n=1}^{\infty} \in \hat{y}$ Tương tự trên, ta có:

$$|d(x'_n, y'_n) - d(x_n, y_n)| \le d(x'_n, x_n) + d(y'_n, y_n)\ (\forall n)$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} d(x'_n, y'_n) = \lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n).$$

với $\hat{x}, \hat{y} \in \hat{X}$ tùy ý, ta đặt: $\hat{d}(\hat{x}, \hat{y}) = \lim\limits_{n\to\infty} d(x_n, y_n)$.Dễ dàng chứng minh được $(\hat{X}, \hat{d})$ là một không gian mêtric. Ta sẽ chứng minh:

a. X đẳng cự với không gian con X_1 của $\hat{X}$.

b. X_1 trù mật trong $\hat{X}$.

c. $\hat{X}$ là không gian đầy đủ.

Giả sử $x \in X \Rightarrow \{x, x, ...\}$ là dãy Côsi trong *X*. Gọi $\hat{x}$ là lớp tương đương chứa dãy $\{x, x, ...\} \Rightarrow \hat{x} \in \hat{X}$. Hiển nhiên ánh xạ $\varphi: X \to \hat{X}$ được xác định bởi $\varphi(x) = \hat{x}$ là một phép đẳng cự. Vậy X đẳng cự với không gian con $X_1 = \varphi(X)$ của $\hat{X}$.

Lấy tùy ý $\hat{x} \in \hat{X}$, và giả sử $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} = \hat{X}$, khi đó $\forall\varepsilon > 0$, $\exists n_0$ sao cho: $\forall m, n \ge n_0$ ta luôn có $d(X_n, X_m) < \varepsilon$. Gọi $\widetilde{X}_{n0}$ là phần tử trong $\hat{X}$ chứa dãy { X_{n0}, X_{n0} …..}, ta có $\widetilde{X}_{n0} \in X_1$. Khi đó,

$$\hat{d}(\hat{x}, \tilde{x}_{n_0}) = \lim_{n\to\infty} d(x_n, x_{n_0}) \le \varepsilon \Rightarrow X_1$$ trù mật trong $\hat{X}$.

Giả sử $\{\hat{x}_n\}_{n=1}^{\infty}$ là dãy Côsi bất kỳ trong $\hat{X}$. Vì X_1 trù mật trong $\hat{X}$, cho nên với mỗi n ta có $\exists\, \tilde{y}_n \in X_1$ ($\tilde{y}_n$ là phần tử của $\hat{X}$ chứa dãy {y_n, y_n, … } Với y_n là phần tử nào đó trong X) thoả mãn $\hat{d}(\hat{x}_n, \tilde{y}_n) < \frac{1}{n}$. Ta có dãy $\{\tilde{y}_n\}_{n=1}^{\infty} \in \hat{X}$. Khi đó, với mọi m, n ta có:

$$d(y_n, y_m) = \hat{d}(\tilde{y}_n, \tilde{y}_m) \le \hat{d}(\tilde{y}_n, \hat{x}_n) + \hat{d}(\hat{x}_n, \hat{x}_m) + \hat{d}(\hat{x}_m, \tilde{y}_m)$$

$$< \frac{1}{n} + \frac{1}{m} + \hat{d}(\hat{x}_n, \hat{x}_m),$$

do $\{\hat{x}_n\}_{n=1}^{\infty}$ là dãy Côsi trong $\hat{X} \Rightarrow \{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ là dãy Côsi trong X.

Gọi $\hat{y}$ là phần tử của $\hat{X}$ chứa dãy $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$. Ta chứng minh $\lim_{n\to\infty} \hat{x}_n = \hat{y}$. Thật vậy, với mọi n ta có:

$$\hat{d}(\hat{y}, \hat{x}_n) \le \hat{d}(\hat{y}, \tilde{y}_n) + \hat{d}(\tilde{y}_n, \hat{x}_n) < \hat{d}(\hat{y}, \tilde{y}_n) + \frac{1}{n} \quad (*)$$

Theo định nghĩa của $\hat{d} \Rightarrow \hat{d}(\hat{y}, \tilde{y}_n) = \lim_{m\to\infty} d(y_m, y_n)$,Do dãy $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ là dãy Côsi trong X nên $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_0$ sao cho $\forall n$, m $\ge n_0$ ta có:

$$d(y_m, y_n) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Nghĩa là $\forall n \ge n_0$: $\lim_{m\to\infty} d(y_m, y_n) \le \frac{\varepsilon}{2}$, do vậy $\forall n \ge n_0$ ta có:

$$\hat{d}(\hat{y}, \tilde{y}_n) \leq \frac{\varepsilon}{2} \ (**).$$

Chọn n_0 đủ lớn sao cho $\frac{1}{n_0} < \frac{\varepsilon}{2}$ Khi đó, từ (*) và (**) suy ra:

$$\hat{d}(\hat{y}, \tilde{y}_n) \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \ (\forall n > n_0) \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \hat{x}_n = \hat{y}.$$

Bây giờ ta chỉ ra rằng không gian $(\hat{X}, \hat{d})$được xác định duy nhất nếu ta coi các không gian đẳng cự là như nhau, tức là : Nếu (Y, d_Y) cũng là một không gian mêtric đầy đủ thoả mãn *X* đẳng cự với không gian con X2 trù mật của Y, thì Y đẳng cự với $\hat{X}$.

Thật vậy vì X_1 và X_2 cùng đẳng cự với X nên chúng đẳng cự với nhau.

Gọi $\Psi : X_1 \to X_2$ là phép đẳng cự từ X_1 lên X_2. Lấy $\hat{x} \to \hat{X}$. Khi đó tồn tại dãy $\{\tilde{x}_n\}_{n=1}^{\infty}$ trong X_1 thoả mãn $\lim\limits_{n\to\infty} \tilde{x}_n = \hat{x}$. Vì Ψ là nhịp đẳng cự và $\{\tilde{x}_n\}_{n=1}^{\infty}$ là dãy Côsi trong X_1 , nên $\{ \Psi\{\tilde{x}_n\}_{n=1}^{\infty}$ là dãy Côsi trong X_2, do đó là dãy trong Y. Do Y đầy đủ, nên tồn tại $\lim\limits_{n\to\infty} \psi(\tilde{x}_n) = y$.Dễ thấy rằng phần tử y chỉ phụ thuộc vào $\hat{x}$ chứ không phụ thuộc vào việc chọn dãy $\{\tilde{x}_n\}_{n=1}^{\infty}$ trong X_1.

Đặt $\Phi(\hat{x}) = y$, ta được một ánh xạ từ $\hat{X}$ vào Y, và chứng minh được Φ là toàn ánh. Thật vậy, với bất kỳ $y \in Y$, tồn tại dãy $\{y_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X_2$ Sao cho $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y$ trong Y, $\Rightarrow \{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ là dãy Côsi trong X_2 và Ψ^{-1} là phép đẳng cự, nên $\{ \Psi^{-1}(y_n)\}_{n=1}^{\infty}$ là dãy Côsi trong X_1, và là dãy Côsi trong $\hat{X}$. Vì $\hat{X}$ đầy đủ cho nên tồn tại $\lim\limits_{n\to\infty} \psi^{-1}(y_n) = \hat{x}$. Hiển nhiên $\Phi(\hat{x}) = y$. Để kết thúc chứng minh, ta chứng minh Φ là một phép đẳng cự. Thật vậy, lấy $\hat{x}, \hat{y} \in \hat{X}$, và giả sử $\{\hat{x}_n\}_{n=1}^{\infty}$ và $\{\widetilde{y}_n\}_{n=1}^{\infty}$ là hai dãy của X_1 sao cho: $\lim\limits_{n\to\infty} \tilde{x}_n = \hat{x}$, $\lim\limits_{n\to\infty} \tilde{y}_n = \hat{y}$ Đặt $\Phi(\hat{x}) = u$, $\Phi(\hat{y}) = v$ ta có:

$$\hat{d}(\hat{x}, \hat{y}) = \lim_{n\to\infty} \hat{d}(\tilde{x}_n, \tilde{y}_n) = \lim_{n\to\infty} d_Y(\psi(\tilde{x}_n), \psi(\tilde{y}_n)) = d_Y(u, v). \square$$

§5. TẬP COMPẮC

1 Tập compắc

Ta biết rằng một khoảng động hữu hạn [a, b] trong không gian ℝ có nhiều tính chất đặc biệt. Chẳng hạn, một hàm số liên tục trên [a, b] thì giới nội trên đoạn đó, đạt được cận trên, cận dưới và liên tục đều tồn [a, b]. Những tính chất đó được suy ra từ một trong những tính chất đặc trưng : Mỗi dãy bất kỳ những phần tử của [a, b] đều có một dãy con hội tụ. Khái quát tính chất này vào không gian mêtric, ta nhận được khái niệm tập compắc.

Định nghĩa 1.21. Tập con A $\subset$ (X, d) được gọi là tập compắc nếu mỗi dãy bất kỳ $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset$ A đều có một dãy con $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ hội tụ đến một phần tử nào đó của A.

Tập con của một tập compắc được gọi là tập compắc tương đối.

Nhận xét.

1) Tập compắc là tập compắc tương đối.

2) Tập compắc trong không gian mêtric là tập đóng.

3) Tập con đóng của một tập compắc là một tập compắc.

4) Tập A là compắc tương đối khi và chỉ khi bao đóng A là tập compắc.

Thật vậy nếu $\overline{A}$ là compắc thì theo định nghĩa A là compắc tương đối. Đảo lại, nếu A là compắc tương đối thì $\overline{A}$ là tập hợp con của một tập hợp compắc K. vì K là một tập hợp đóng và A $\subset$ K nên $\overline{A} \subset$ K. Từ 3) suy ra $\overline{A}$ là một tập hợp compắc.

5) Tập con A của không gian mêtric X là compắc tương đối

khi và chỉ khi mỗi dãy bất kỳ $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset$ A, tồn tại một dãy con $\{x_{kn}\}_{n=1}^{\infty}$ hội tụ đến phần tử nào đó của X.

Thật vậy, Nếu A là compắc tương đối suy ra $\overline{A}$ là tập compắc, do dãy $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ nằm trong A nên nó cũng nằm trong $\overline{A}$. Do đó $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ có một dãy con $\{x_{kn}\}_{n=1}^{\infty}$ hội tụ đến một phần tử của $\overline{A} \subset$ X.

Đảo lại giả sử mỗi dãy phần tử của tập con A đều có một dãy con hội tụ trong X. Để chứng minh A là tập compắc tương đối ta sẽ chỉ ra rằng $\overline{A}$ là compắc. Thật vậy, giả sử $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ là một dãy trong $\overline{A}$. Khi đó, với mỗi n tồn tại một phần tử y_n của A sao cho $d(x_n, y_n) < \frac{1}{n}$. Theo giả thiết, dãy $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ những phần tử A chứa một dãy con $\{y_{kn}\}_{n=1}^{\infty}$ hội tụ trong X, $\lim\limits_{n\to\infty} y_{k_n} = x \in X$. Khi đó

$$d(x_{k_n}, x) \le d(x_{k_n}, y_{k_n}) + d(y_{k_n}, x) < \frac{1}{k_n} + d(y_{k_n}, x)$$

, với mọi *n*.

Vì $\lim\limits_{n\to\infty} d(y_{k_n}, x) = 0$, nên từ bất đẳng thức trên suy ra $\lim\limits_{n\to\infty} x_{k_n} = x$.

vì $\overline{A}$ đóng nên x $\notin$ $\overline{A}$. Như vậy mỗi dãy phần tử $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ của $\overline{A}$ đều có một dãy con $\{x_{kn}\}_{n=1}^{\infty}$ hội tụ đến một phần tử x của $\overline{A}$. Vậy $\overline{A}$ là compắc.

2 Tập giới nội và tập hữu toàn giới nội

Định nghĩa 1.22 Tập con A của không gian mêtric (X, d) được gọi là giới nội nếu nó là tập con của một hình cầu nào đó.

Nếu A là một tập con giới nội của không gian mêtric (X, d) thì số $d(A) = \sup_{x,y\in A} d(x,y)$ được gọi là đường kính của tập hợp A.

Hiển nhiên A là một tập giới nội khi và chỉ khi d(A) là một số hữu hạn.

Định nghĩa 1.23. Tập con A của không gian mêtric (X, d) được gọi là hoàn toàn giới nội nếu với mỗi ε > 0 bất kỳ, có thể phủ A bởi một số hữu hạn hình cầu mở bán kính ε nghĩa là tồn tại một số hữu hạn hình cầu $S(x_1, \varepsilon)$,... , $S(x_n, \varepsilon)$ sao cho $A \subset \bigcup_{i=1}^{m} S(x_i, \varepsilon)$

Nhận xét. Một tập hợp hoàn toàn giới nội thì giới nội.

Thật vậy, giả sử A là một tập hợp hoàn toàn giới nội. Khi đó theo định nghĩa tập A chứa trong hợp của một số hữu hạn hình cầu bán kính l: $A \subset \bigcup_{i=1}^{m} S(x_i, 1)$. Đặt $k = \max_{i=2,\ldots,m} d(x_1, y_i)$. Khi đó A $\subset S(x_1, k+l)$.

Thật vậy, nếu $x \in A$ thì x thuộc một hình cầu $S(x_i,1)$ nào đó.

Khi đó $d(x,x_i) < 1$ và $d(x_1, x) \le d(x_1,x_i) + d(x_i,x) < k + 1$.

Vậy $x \in S(x_1,k + 1) \Rightarrow A \subset S(x_1, k+1)$.Vậy tập A là giới nội.

Chú ý : Một tập hạ giới nội có thể không hoàn toàn giới nội.

Nhận xét.

1) Tập con của một tập hoàn toàn giới nội là một tập hoàn toàn giới nội.

2) Bao đóng của một tập hoàn toàn giới nội là một tập hoàn toàn giới nội.

Ví dụ 1.9

Khoảng đóng hữu hạn [a, bị là một tập compắc trong không gian $\mathbb{R}$. Các khoảng (a, b), [a, b), (a, b]đều là những tập compắc tương đối trong $\mathbb{R}$.

Ví dụ 1.10

Một tập A giới nội trong không gian $\mathbb{R}^2$ là compắc tương đối.

Thật vậy, vì A là giới nội trong $\mathbb{R}^2$ nên tồn tại một số M sao cho $A \subset S(0, M)$, nghĩa là với mọi $X = (\xi, \eta) \in A$, ta đều có $|\xi| \leq M$ và $|\eta| \leq M$. Với mỗi $n \in \mathbb{N}$ chọn $X_n = (\xi_n, \eta_n) \in A$ thỏa mãn $|\xi_n| \leq M$, $|\eta_n| \leq M$, ta có dãy $\{x_{kn}\}_{n=1}^{\infty} \subset A$. Vì $|\xi_n|$ là một dãy phần tử của khoảng đóng [-M, M] nên $\{\xi_n\}_{n=1}^{\infty}$ có một dãy con $\{\xi_{k_n}\}_{n=1}^{\infty}$ hội tụ: $\lim\limits_{n\to\infty} \xi_{k_n} = \xi_0$.Tương tự, dãy $\{\eta_k\}_{n=1}^{\infty}$ có một dãy con $\{\eta_{j_{k_n}}\}_{n=1}^{\infty}$ hội tụ: $\lim\limits_{n\to\infty} \eta_{k_n} = \eta_0$. Ta có:

$$\lim_{n\to\infty} x_{j_{k_n}} = \lim_{n\to\infty}\left(\xi_{j_{k_n}}, \eta_{j_{k_n}}\right) = \left(\xi_0, \eta_0\right) = x_0.$$

vậy A là tập compắc tương đối.

Ví dụ 1.11

Tập con giới nội bất kỳ của không gian Euclid $\mathbb{R}^k$ là compắc tương đối. Do đó, tập con đóng và một giới nội bất kỳ của $\mathbb{R}^k$ là một tập compắc.

Định lý 1.20. (Định lý Hausdorf)

a) Tập compắc tương đối trong không gian mêtric là hoàn toàn giới nội.

b) Nếu X là không gian mêtric đầy đủ và A là tập con hoàn toàn giới nội trong X thì A là tập compắc tương đối.

Chứng minh.

a) Giả sử A là một tập compắc tương đối nhưng không hoàn toàn giới nội. Khi đó tồn tại ε > 0. Sao cho không thể phủ A bởi một số hữu hạn hình cầu bán kính E.

Giả sử $X_1 \in A$. vì $A \not\subset S(x_1, \varepsilon)$ nên tồn tại một điểm x2 ∈ A sao cho $d(x_1, x_2) \geq \varepsilon$ vì $A \not\subset S(x_1, \varepsilon) \cup S(x_2, \varepsilon)$ nên tồn tại một phần tử $x_3 \in A$ sao cho $d(x_1,x_3) \geq \varepsilon$ và $d(x_2,x_3) \geq \varepsilon$.

Bằng quy nạp, ta nhận được một dãy phần tử $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ của A sao cho $d(x_n, x_m) \geq \varepsilon$ với mọi $n \neq m$.

Hiển nhiên $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ không chứa một dãy con nào hội tụ, điều này trái với giả thiết A là tập compắc tương đối (theo nhận xét 5).

b) Giả sử A là tập hoàn toàn giới nội trong không gian mêtric đầy đủ *X* và $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ là dãy phần tử của A. vì A là hoàn toàn giới nội, nên có thể phủ A bởi một số hữu hạn hình cầu bán kính 1. Trong các hình cầu đó, tồn tại ít nhất một hình cầu chứa vô số phần tử của dãy $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$. và gọi hình cầu đó là $S(a_1, 1)$ và ký hiệu $\{x_{1,n}\}_{n=1}^{\infty}$ là dãy con của dãy $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ nằm trong hình cầu $S(a_1,1)$. Vì có thể phủ A bởi một số hữu hạn hình cầu bán kính ½ nên tồn tại ít nhất một hình cầu chứa vô số phần tử của dãy $\{x_{1,n}\}_{n=1}^{\infty}$. Gọi hình cầu đó là $S\left(a_2, \frac{1}{2}\right)$ và ký hiệu $\{x_{2,n}\}_{n=1}^{\infty}$ là dãy con của dãy $\{x_{1,n}\}_{n=1}^{\infty} \subset S\left(a_2, \frac{1}{2}\right)$. Bằng quy nạp ta có, với mỗi k ∈ N, tồn tại một dãy $\{x_{k,n}\}_{n=1}^{\infty} \subset S\left(a_k, \frac{1}{k}\right)$ và $\{x_{k,n}\}_{n=1}^{\infty}$ là dãy con của dãy $\{x_{k-1,n}\}_{n=1}^{\infty}$

Xét dãy $\{x_{n,n}\}_{n=1}^{\infty}$ Đó là dãy con của dãy $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ và là dãy Côsi. Thật vậy với hai số tự nhiên m, k bất kỳ, m ≥ k, ta đều có

$x_{m,m} \in S\left(a_k, \frac{1}{k}\right)$, vì X_{nm} là một phần tử của dãy $\{x_{k,n}\}_{n=1}^{\infty}$ Hiển

Nhiên $x_{k,k} \in S\left(a_k, \frac{1}{k}\right)$

Do đó $d\left(x_{m,m}, x_{k,k}\right) \leq d\left(x_{m,m}, a_k\right) + d\left(a_k, x_{k,k}\right) < \frac{1}{k} + \frac{1}{k} = \frac{2}{k}$.

Vì x là đầy đủ nên dãy $\{x_{n,n}\}_{n=1}^{\infty}$ hội tụ. Vậy A là tập compắc tương đối. □

Định *nghĩa 1.24*. Cho tập hợp X tuỳ ý khác rỗng, A là tập con nào đó của X. Một họ $(B_i)_{i\in I}$ các tạp con của X được gọi là một phủ của tập con A nếu $A \subset \bigcup_{i\in I} B_i$. Khi đó ta cũng nói họ $(B_i)_{i\in I}$ Phủ tập A. Nếu $(B_i)_{i\in I}$ là một phủ của tập A, họ con $(B_j)_{j\in K}$ ($K \subset I$) của họ $(B_i)_{i\in I}$ được gọi là một phủ con của phủ trên nếu bản thân họ $(B_j)_{j\in K}$ cũng là một phủ của A.

Nêu A là tập con của không gian mêtric X, $(B_i)_{i\in I}$ là một phủ của A thỏa mãn B_i là tập mở (đóng) với mọi $i\in I$ thì ta nói $(B_i)_{i\in I}$ là phủ mở (đóng) của tập A.

Nếu I là tập hợp hữu hạn thì ta nói $(B_i)_{i\in I}$ là phủ hữu hạn của A.

Định lý 1.21. (Định lý Hainơ - Boren) Tập con A của không gian mêtric X là tập compắc khi và chỉ khi mỗi phủ mở bất kỳ $(B_i)_{i\in I}$ của A đều có phủ con hữu hạn (nghĩa là tồn tại $i_1,\dots$, in ∈

I sao cho $A \subset \bigcup_{k=1}^{n} B_{i_k}$)

Chứng minh.

($\Rightarrow$) Giả sử A là một tập compắ(trong không gian mêtric X và giả sử tồn tại một phủ mở $(B_i)_{i\in I}$ của A không có một phủ con hữu hạn nào. Theo định lý 1.20, A là tập hoàn toàn giới nội. Do đó có thể phủ A bởi một số hữu hạn hình cầu có bán kính bằng 1. Trong *các* hình cầu đó tồn tại ít nhất một hình cầu $S[a_1,1]$ sao cho không thể phủ tập $A_1 = A \cap S[a_1,1]$ bởi một số hữu hạn tập mở B_1. Do A_1 là tập con đóng của tập compắc A nên nó là tập compắc. vì vậy A_1 là tập hoàn toàn giới nội. Suy ra cỏ thể phủ A_1 bởi một số hữu hạn hình cầu đóng bán kính ½ . Trong các hình cầu đó tồn tại ít nhất một hình cầu $S\left[a_2,\frac{1}{2}\right]$ sao Cho không thể phủ tập $A_1 = A_1 \cap S\left[a_2, \frac{1}{2}\right]$ bởi một số hữu hạn tập mở B;. Tiếp tục quá trình này ta nhận được một dãy các tập compắc $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ có các tính chất sau:

1) $A \supset A_1 \supset A_2 \supset \ldots.$

2) $A_n \subset S\left[a_n,\frac{1}{n}\right]$ với mọi n= 1,2,...

3) Không thể phủ mỗi tập A_n bị một cố hữu hạn tập mở B_i.

với mỗi n, chọn $x_n \in A_n$. Dễ dàng thấy rằng $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ là một day Côsi trong tập A. Vì A là tập compắc nên $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ có một day con hột tụ đến một phần tử $x_0 \in A$ ($\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$). Vì $X_0 \in A$

nên X_0 thuộc một tập mở B_{i0} nào đó của phủ $(B_i)_{i\in I}$, do B_{i0} là tập mở nên tồn tại một số r dương sao cho $S(x_0,r) \subset B_{i0}$. Ta sẽ chỉ ra rằng với n đủ lớn, $A_u \subset B_{i0}$. Thật Vậy, với bất kỳ $X \in A_n$, do $\lim_{n\to\infty} d(x_n, x_0) = 0$ nên $d(x_0,x_u) < \frac{r}{2}$ với n đủ lớn, ta cũng có $\frac{2}{n} < \frac{r}{2}$.

$$d(x_0,x) \le d(x_0,x_u) + d(x_u,x) < d(x_0,x_u) + \frac{2}{n} \qquad (1)$$

Từ đó suy ra $d(x_0,x) < r$. Vậy $A_n \subset S(x_0,r) \subset B_{i0}$ với n đủ lớn.

Điều này mâu thuẫn với khẳng định 3) đã nêu ở trên. Vậy mỗi phủ mở của A đều có một phủ con hữu hạn.

($\Leftarrow$) Giả sử mỗi phủ mở của A đều có một phủ con hữu hạn và A không là tập compắc. Khi đó, tồn tại một dãy phần tử $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ của A không có một dãy con nào hội tụ đến một phần tử của A. Khi đó với mỗi phần tử $x \in A$ tồn tại một lân cận mở B_x chỉ chứa một số hữu hạn phần tử của dãy $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. Họ $\{B_x\}_{x\in A}$ xưa là một phủ mở của A. Theo giả thiết, tồn tại $x_1,..., x_m \in A$ sao cho $A \subset \bigcup_{i=1}^{m} B_{x_k}$.

Từ bao hàm thức trên suy ra rằng tập hợp A chỉ chứa một số hữu hạn phần tử của dãy $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \subset A$. Vô lý vì dãy $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ nằm trong A. Vậy A là một tập hợp compắc. □

Hệ quả. (Bổ đề Hainơ - Boren) Nếu A là một tập con đóng và giới nội của không gian C và $(B_i)_{i\in I}$ là một họ tập mở sao cho

$A \subset \bigcup_{i \in I} B_i$ thì tồn tại $i_1, \ldots, i_n \in I$ sao cho $A \subset \bigcup_{k=1}^{n} B_{i_k}$

Định lý 1.21 cho ta một tính chất đặc trưng của một tập compắc. Trong chương 4 ta sẽ thấy trong tổng đại cương người ta lấy tính chất này làm định nghĩa của không gian compắc.

3 Không gian compắc

Định nghĩa 1.25 Không gian mêtric (X, d) được gọi là không gian compắc nếu X là một tập compắc.

Đính lý 1.22. Không gian mêtric compắc là không gian đầy đủ và khả li

Chứng minh.

Giả sử X là một không gian compắc và $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ là một dãy Côsi trong X. Khi đó tồn tại một dãy con của dãy $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ hội tụ đến $x_0 \in$ X. Dễ dàng thấy rằng $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$. Vậy X là một không gian đầy đủ.

Do *X* là tập compắc nên X là hoàn toàn giới nội với mỗi số tự nhiên n, có thể phủ X bởi một số hữu hạn hình cầu bán kính

$$\frac{1}{n}: X = \bigcup_{i=1}^{k_n} S\left(a_{n,i}, \frac{1}{n}\right)$$

Đặt $M_n = \{a_{n,1} \ldots\ldots, a_{u,kn}\}$, ta có $M = \bigcup_{n=1}^{\infty} M_n$ là tập đếm được. M là trù mật trong *X*. Thật vậy, lấy bất kỳ x $\in$ X, và giả sử $\varepsilon > 0$ tuỳ ý. Khi đó $\frac{1}{n_0} < \varepsilon$ với n_0 đủ lơn, ta có x thuộc vào một hình cầu $S\left(a_{n_{0,i}},\frac{1}{n_0}\right)$ nào đó. Do đó $d\left(x,a_{n_{0,i}}\right)<\frac{1}{n_0}<\varepsilon$. Vậy X là không gian khả li. □

4 Hàm số liên tục trên một tập hợp compắc

Định lý 1.23. Nếu hàm số f liên tục trên tập compắc A thì f liên tục đều trên A.

Chứng minh.

Giả sử f là hàm số liên tục trên tập compắc A nhưng không liên tục đều trên A. Khi đó, tồn tại một số dương ε sao cho với mọi n, đều tồn tại hai phần tử X'_u và X''_u của A thoả mãn các điều kiện sau:

$$d\left(x'_u,x''_u\right)<\frac{1}{n} \text{ và } \left|f\left(x'_u\right)-f\left(x''_u\right)\right|\geq\varepsilon . \qquad (1)$$

vì $\{x'_n\}_{n=1}^{\infty}$ là một dãy phần tử của tập cotnpắc A nên tồn tại một dãy con $\{x'_{kn}\}_{n=1}^{\infty}$ của $\{x'_n\}_{n=1}^{\infty}$ sao cho $\lim\limits_{n\to\infty} x'_{k_n}=x_0\in A$. Với mọi n, ta đều có:

$$d\left(x''_{k_n},x_0\right)\leq d\left(x''_{k_n},x'_{k_n}\right)+d\left(x'_{k_n},x_0\right)<\frac{1}{k_n}+d\left(x'_{k_n},x_0\right).$$

Do $\lim\limits_{n\to\infty} d\left(x'_{k_n},x_0\right)=0$, từ bất đẳng thức trên suy ra $\lim\limits_{n\to\infty} d\left(x''_{k_n},x_0\right)=0$, tức là $\lim\limits_{n\to\infty} x''_{k_n}=x_0$.

Vì f liên tục tại điểm x_0 nên từ $x'_{kn}\to x_0$ và $x''_{kn}\to x_0$, suy ra $\lim\limits_{n\to\infty}\left|f\left(x'_{k_n}\right)-f\left(x''_{k_n}\right)\right|=0$, mâu thuẫn với (1). Vậy f liên tục đều trên A. □

Định lý 1.24. Nếu hàm số f liên tục trên một tập compắc A thì f giới nội trên A.

Chứng minh.

Giả sử hàm số f không giới nội trên A. Khi đó với mỗi số tự nhiên n, tồn tại một phần tử $x_n \in$ A sao cho $|f(x_n)| > n$ (l), $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ là dãy phần tử của tập compắc A, nên nó có một dãy con $\{x_{kn}\}_{n=1}^{\infty}$ hội tụ đến một phần tử x_0 của A. Vì f liên tục, do đó |f| liên tục trên A, nên $\lim_{n\to\infty}\left|f\left(x_{k_n}\right)\right| = \left|f\left(x_0\right)\right|$ (2).

Mâu thẫu giữa (1) và (2) chứng tỏ f giới nội trên A. □

5 Tập hợp compắc trong không gian C(S)

Giả sử S là một tập compắc trong không gian mêtric X. Gọi C(S) là tập hợp tất cả các hàm số liên tục trên S. Với f, g ∈ C(S), đặt $d\left(f,g\right) = \sup_{x\in S}\left|f\left(x\right) - g\left(x\right)\right|.$ (l)

Theo định lý 1.24 f và g đều là những hàm số giới nội trên S, nên vế phải của (l) là một số hữu hạn. Dễ dàng chứng minh được rằng: C(S) là một không gian mêtric đầy đủ với mêtric xác định bởi (l).

Giả sử Z là một tập con của không gian C(S).

Định nghĩa 1.26. Tập Z được gọi là *giới nội đều* trên s nếu tồn tại một số M sao cho $|f(x)| \le M$, với mọi x ∈ S và với mọi f ∈ Z.

Tập Z được gọi là *đồng liên tục tại điểm x_0* của S nếu với mỗi ε > 0 bất kỳ, tồn tại δ > 0 sao cho với mọi x ∈ S, nêu $d(x,x_0) < \delta$ thì với mọi f ∈ Z, ta đều có $|f(x)- f(x_o)| < \varepsilon$.

Tập Z được gọi là *đong liên tục tại điểm S* nhú Z là đồng liên tục tại mỗi điểm của S.

Tập Z được gọi là *đồng liên tục đều trên S* nếu với mỗi ε > 0 bất kỳ, tồn tại ε > 0 sao cho với mọi x_1 , x_2 ∈S, nếu $d(x_1, x_2) <$

δ thì với mọi f ∈ Z, ta đều có $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$.

Định lý 1.25 (Định lý Arzela - Ascoli) Giả sử S là một tập compắc trong không gian mêtric (X, d). Tập Z là compắc tương đối trong không gian C(S) khi và chỉ khi tập Z là giới nội đều và đồng liên tục đều trên S.

Chứng minh.

(⇒) Giả sử Z là một tập compắc tương đối trong C(S). Khi đó Z là một tập giới nội trong C(S) ⇒ tập Z giới nội đều trên S.

Ta chứng minh tập Z là đồng liên tục đều trên Z. Thật vậy, do tập Z là hoàn toàn giới nội, nên với ε > 0 tuỳ ý, ta có thể phủ Z bởi một số hữu hạn hình cầu bán kính $\frac{\varepsilon}{3}$ (nghĩa là $Z \subset \bigcup_{i=1}^{m} S\left(f_i, \frac{\varepsilon}{3}\right)$, Với f_1 …….. f_m thuộc Z).

Vì S là compắc nên theo định lý 1.23 các hàm số f_1 …….. f_m liên tục đều trên S. Do đó, tồn tại δ > 0 sao cho với mọi x', x'' ∈ S, nếu $d(x',x'') < \delta$ thì $\left|f_i(x') - f_i(x'')\right| < \frac{\varepsilon}{3}$, với i = 1 ,... , m. Nếu f là một hàm số bất kỳ của Z thì f thuộc một hình cầu $S(f_1, \frac{\varepsilon}{3})$ nào đó (l ≤ i ≤ m) với mọi X', X'' ∈ S, nếu d(x',x") < δ thì;

$$\left|f(x') - f(x'')\right| \le \left|f(x') - f_i(x')\right| + \left|f_i(x'') - f(x'')\right| < 2d_{C(s)}(f,f_i) + \frac{\varepsilon}{3} < \varepsilon$$

($d_{C(s)}$ là mêtric trong không gian C(S)).

(⇐) Giả sử tập Z là giới nội đều và đồng liên tục đều trên S. Vì tập compắc S là khả li, nên tồn tại một tập đếm được A-{a | n ∈ N} trù mật trong S.

Giả sử $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ là một dãy phần tử bất kỳ của Z. Ta sẽ chỉ ra rằng $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ có một dãy con hội tụ trong C(S).

Vì vậy Z là giới nội đều trên S, nên $\{ f_n(a_1)\}$ là một dãy số giới nội suy ra tồn tại một dãy con $\{f_{1,n}\}_{n=1}^{\infty}$ của dãy $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ sao cho dãy số $\{f_{1,n}(a_1)\}_{n=1}^{\infty}$ hội tụ.

Tương tự tồn tại một dãy con $\{f_{2,n}\}_{n=1}^{\infty}$ của dãy $\{f_{1,n}\}_{n=1}^{\infty}$ sao cho dãy số $\{f_{2,n}(a_2)\}_{n=1}^{\infty}$ hội tụ.

Bằng quy nạp, ta nhận được một dãy con $\{f_{k+1,n}\}_{n=1}^{\infty}$ của dãy $\{f_{k,n}\}_{n=1}^{\infty}$ sao cho dãy số $\{f_{k+1,n}(a_{k+1})\}_{n=1}^{\infty}$ hội tụ, với k = 1, 2,...

Hiển nhiên $\{f_{n,n}\}_{n=1}^{\infty}$ là một dãy con của dãy $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ thoả mãn điều kiện: $\{f_{n,n}(a_k)\}_{n=1}^{\infty}$ là một dãy số hội tụ với mọi k.

Ta chứng minh dãy $\{f_{n,n}\}_{n=1}^{\infty}$ là một dãy Côsi trong C(S). Thật vậy, theo giả thiết, với bất kỳ ε > 0, tồn tại δ > 0 sao cho: lưu $\left|f_{n,n}(x')-f_{n,n}(x'')\right|<\frac{\varepsilon}{3}, n=1,2,\ldots$ với mọi x', x'' $\in$ S mà d (x',x") < δ.

Hiển nhiên $S=\bigcup_{k=1}^{\infty}S(a_k,\delta)$. Theo định lý Hainơ - Boren, tồn tại một số k_0 sao cho $S=\bigcup_{k=1}^{k_0}S(a_k,\delta)$

Vì dãy số $\{f_{n,n}(a_k)\}_{n=1}^{\infty}$ hội tụ với k = 1,... , K_0. nên tồn tại một số tự nhiên n_0 sao cho với mọi m, n nếu $m \geq n_0$, $n \geq n_0$), ta đều có

$$\left|f_{n,n}(x)-f_{m,m}(x)\right| \leq$$
$$\left|f_{n,n}(x)-f_{n,n}(a_k)\right|+\left|f_{n,n}(a_k)-f_{n,n}(a_k)\right|+\left|f_{m,m}(a_k)-f_{m,m}(x)\right|<\varepsilon$$

Từ đó, với mọi m, n, nêu $m \geq n_0$, $n \geq n_0$ thì

$$d_{C(S)}\left(f_{n,n}, f_{m,m}\right) = \sup_{x \in S}\left|f_{n,n}\left(x\right) - f_{m,m}\left(x\right)\right| \leq \varepsilon$$

vậy $\{f_{n,n}\}_{n=1}^{\infty}$ là một dãy Côsi trong C(S).). Vì C(S) là một không gian đầy đủ, nên $\{f_{n,n}\}_{n=1}^{\infty}$ hội tụ trong C(S) $\Rightarrow$ Z là tập compắc tương đối trong không gian mêtric C(S). □

Bài Tập

1. Giả sử X là tập hợp bất kỳ và d : X x X → ℝ là hàm số xác định bởi:

$$d(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{khi } x = y \\ 1 & \text{khi } x = y \end{cases}$$

Chứng minh rằng d là một mêtric trên x, và trong không gian mêtric (X, d) mọi tập con đều vừa mở vừa đóng. (Không gian (X d) như vậy được gọi là không gian mêtric rời rạc).

2. Gọi M(X) là tập hợp các hàm số f : X → K (K = ℝ hoặc K = ℂ) giới nội trên tập hợp X. Với f, g ∈ M(X) tùy ý đặt $d(f, g) = \sup_{x \in X} |f(x) - g(x)|$ Chứng minh rằng M(X) là một không gian mêtric với mêtric d.

3. Chứng minh rằng nếu A, B là 2 tập con của không gian mêtric X thì:

a) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

b) $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$, Có thể thay dấu ⊂ bởi dấu = được không.

4. Chứng minh rằng nếu U, V là 2 tập con mở không giao nhau trong không gian mêtric X thì $\overline{U} \cap V = U \cap \overline{V} = \varnothing$

5. Cho A là tập con của không gian mêtric X. Tập b(A) = $\overline{A} \cap \overline{X \setminus A}$ được gọi là biên của tập A. Chứng minh rằng:

a) Với mọi x ∈ X, x ∈ b(A) khi và chỉ khi với mỗi lân cận U của x ta đều có: U ∩ A ≠ ∅ và U\A ≠ ∅ (Điểm x ∉ b(A) được gọi là điểm biên của tập A).

b) A^0 = A\b(A); $\overline{A}$ = A ∪ b(A).

6. Cho $A \subset (X, d)$. Điểm $x \in X$ được gọi là điểm giới hạn của tập A nếu mỗi lân cận U của x đều chứa ít nhất một điểm của A khác x (nghĩa là $U \cap (A\backslash\{x\} \neq \varnothing)$. Tập hợp tất cả các điểm giới hạn của A được gọi là tập dẫn xuất của A và ký hiệu là A^d. chứng minh rằng:

   a) Với mọi $x \in X$, $x \in A^d \Leftrightarrow x \in \overline{A \backslash \{x\}}$.

   b) $x \in A_d \Leftrightarrow$ tồn tại trong A một dãy điểm $\{ x_n \}$ đôi một khác nhau hội tụ đến x.

   c) A là tập đóng trong $X \Leftrightarrow A^d \subset A$.

   d) A^d là tập đóng.

7. Cho $f : (X,d_x) \to (Y,d_Y)$ Chứng minh rằng các điều kiện sau là tương đương:

   a) Ánh xạ f là liên tục.

   b) Tạo ảnh của mỗi tập mở trong Y là một tập mở trong X.

   c) Tạo ảnh của một tập đóng trong Y là một tập đóng trong *X*.

8. Trong không gian $\mathbb{C}[a, b]$ xét hai tập con sau:

$$E = \{x \in \mathbb{C}[a, b] : A < x(t) < B., \forall t \in [a, b]\},$$

$$F = \{x \in \mathbb{C}[a, b] : A \leq x(t) \leq B., \forall t \in [a, b]\},$$

   Trong đó A và B là các số thực cho trước. Chứng minh rằng E là tập mở, F là tập đóng trong C[a, b].

9. Cho hàm số $x_0(t)$ liên tục trên đoạn [a, b]. Chứng minh rằng:

   a) $E = \{x \in \mathbb{C}[a, b] : x(t) < x_0(t)\ ,\ \forall t \in [a, b]\}$ là tập mở trong $\mathbb{C}[a, b]$

   b) $F = \{x \in \mathbb{C}[a, b] : x(t) \leq x_0(t), \forall t \in [a, b]\}$ là tập đóng trong $\mathbb{C}[a, b]$.

10. Trong không gian $C[a, b]$, hãy xét tính liên tục đều của các hàm số sau đây:

a) $f(x) = \sup_{a \le t \le b} x(t)$

b) $f(x) = \inf_{a \le t \le b} x(t)$

c) $f(x) = x(t_0)$ trong đó t_0 là một điểm cố định của $[a,b]$

d) $f(x) = \int_a^b x(t)dt$

11. Cho (x, d) là không gian *mêtric,* $A \subset X$, chứng minh rằng:

a) Hàm $d(x,A)$ là liên tục.

b) Nếu A là tập đóng trong X thì $x \in A \Leftrightarrow d(x,A) = 0$.

12. Gọi l^1 là tạp tất cả các day số thực $x = (x_1, x_2 \ldots\ldots)$ sao cho

với $x = (x_1, x_2 \ldots\ldots)$, $y = (y_1, y_2 \ldots\ldots) \in l^1$ ta đặt:

$d(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n - y_n|$.Chứng minh rằng:

a) d là một nlêtric trên l^1.

b) Không gian mêtric (l^1,d) là một không gian đầy đủ.

c) l^1 là không gian khả li.

13. Cho l^∞ là tập tất cả các dãy số thực $x = (x_1, x_2 \ldots\ldots)$ giới nội (nghĩa là sắp $\{|x_n|\} < \infty$. Với hai phần tử tùy ý $x = (x_1, x_2 \ldots\ldots)$, $y = (y_1, y_2 \ldots\ldots) \in l^\infty$ ta đặt: $d(x, y) = \sup_{n \in N} \{|x_n - y_n|\}$ Chứng minh răng :

a) d là một mêtric trên l^∞

b) (l^{∞} ,d) là một không gian mêtric đầy đủ.

c) l^{∞} không phải là một không gian khả li.

14. Giả sử *X* là một tập hợp, Y là không gian mêtric. Gọi Φ(X, Y) là tập các ánh xạ giới nội f : X → Y. (Tức là $\delta_{f(x)} < \infty$). Với 2 phần tử tùy ý f, g ∈ Φ(X, Y) đặt $d(f, g) = \sup_{x \in X} d(f(x), g(x))$.

a) Chứng minh rằng: d là một mêtric trên Φ(X, Y).

b) Chứng minh rằng: Nếu Y là không gian mêtric đầy đủ thì Φ(X, Y) là không gian mêtric đầy đủ.

15. Chứng mình rằng $\mathbb{R}^k$ với mêtric tự nhiên là một không gian khả li.

16. Chứng minh rằng nếu trong không gian mêtric X mọi dãy hình cầu đóng bao nhau đều có giao khác rỗng thì X là một không gian đầy đủ.

17. Cho (X, d) là không gian mêtric đầy đủ, G_n là hợp của một số hữu hạn hình cầu có bán kính ≤ r_n, n = 1, 2,... , $r_n \xrightarrow{n \to \infty} 0$. Chứng minh rằng $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{G_n}$ là một tập compắc.

18. Cho A là tập đóng, B là tập compắc trong không gian mêtric (X, d). Chứng minh rằng nếu d(A, B) = 0 thì A ∩ B ≠ ∅. Nếu B chỉ là tập đóng thì kết quả trên còn đúng hay không?

19. Chứng minh rằng : Nếu hàm số f liên tục trên tập compắc A ⊂ (X, d) thì nó đạt được giá trị lớn nhất và nhỏ nhất trên A.

20. Cho hàm số f liên tục trên không gian mêtric X và A là tập con compắc trong X. Chứng minh rằng:
   a) Tồn tại một tập mở U chứa A sao cho f giới nội trên U.
   b) Nếu $f(x) > 0$ với mọi $x \in A$ thì tồn tại số $r > 0$ và một tập V mở chứa A sao cho $f(x) \geq r$ với mọi $x \in V$
21. Cho (X, d_X) là không gian mêtric compắc và (Y, d_Y) là không gian mêtric đầy đủ. Gọi C(X, Y) là tập tất cả các ánh xạ liên tục từ X đến Y với bất kỳ f, g ∈ C(X, Y) đặt $d(f,g) = \sup\limits_{x\in X} d_Y(f(x),g(x))$. Chứng minh rằng d là một mêtric, và C(X, Y) với mêtric d là không gian đầy đủ.
22. Giả sử trên tập hợp X có hai mêtric d_1 và d_2. Ta nói rằng các mêtric d_1 và d_2 là tương đương nêu ánh xạ đồng nhất $id_X: (X,d_1) \rightarrow (X,d_2)$ là một phép đồng phôi.
   Chứng minh rằng d_1 và d_2 là tương đương khi và chỉ khi với mỗi dãy bất kỳ $\{x_n\}$ trong *X* ta có $\lim\limits_{n\to\infty} d_1(x_n, x) = 0$ khi và chỉ khi $\lim\limits_{n\to\infty} d_2(x_n, x) = 0$.
23. Cho không gian mêtric (X, d) và cho toàn ánh $\varphi : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ thoả mãn : $\varphi(0) = 0$; $\varphi(t) > 0$ với mọi $t > 0$; $\varphi(t) < \varphi(u)$ với $t < u$; $\varphi(t+u) \leq \varphi(t) + \varphi(u)$. Chứng minh rằng $\varphi.d$ là một mêtric trên *X* và các mêtric d, $\varphi.d$ là tương đương.
24. Cho d_1 và d_2 là hai mêtric trên tập X. Chứng minh rằng hàm (d_1+d_2) xác định bởi $(d_1+d_2)(x) = d_1(x)+d_2(x)$, $\forall x\in X$, Cũng là một mêtric trên *X* và nếu d_1, d_2 là các mêtric tương đương thì d_1, (d_1+d_2) cũng là các mêtric tương đương.
25. Cho không gian mêtric (X, d) và f: $X \rightarrow \mathbb{R}$ là ánh xạ liên tục (đối với các tôpô phù hợp với các mêtric đã cho trên X

và $\mathbb{R}$). Chứng minh rằng ánh xạ:

$$\delta : X \times X \to \mathbb{R}$$

$$(x,y) \to \delta(x,y) = d(x,y) + |f(x) - f(y)|$$

là mêtric trên X và d, δ là các mêtric tương đương.

26. Giả sử (X, d) là không gian mêtric bất kỳ, k là một số thực dương cố định cho trước. Với mọi x, y $\in$ X đặt:

$$\delta(x, y) = \min\{d(x, y), k\}.$$

Chứng minh rằng δ là một mêtric trên X thỏa mãn d và δ là hai mêtric lương đương.

27. a) Cho v là một số vô tỉ. Chứng minh rằng tập:

$$A = \{m + nv \mid m, n \in \mathbb{Z}\}$$

là trù mật trong $\mathbb{R}$.

b) Cho $r \in \mathbb{Q}$, chứng minh rằng tập B ={m + nr | m, n $\in \mathbb{Z}$} không trù mật trong bất kỳ khoảng nào trên đường thẳng $\mathbb{R}$.

28. Chứng minh rằng trên đường thẳng $\mathbb{R}$, tập hợp không đếm được A có ít nhất một điểm giới hạn.

29. Giả sử X là không gian mêtric khả li và A $\subset$ X. Điểm a $\in$ X được gọi là điểm đọng của A nếu mỗi lân cận bất kỳ của a đều chứa một tập con không đếm được của A.

a) Chứng minh rằng nếu tập A không có điểm đọng thì hoặc A là hữu hạn, hoặc A là đếm được.

b) Gọi B là tập tất cả các điểm đọng của A. Chứng minh rằng nếu B khác rỗng thì mọi điểm của B đều là điểm đọng của B và tập A\B là không quá đếm được

30. Chứng minh rằng trong không gian mêtric khả li ta có:

a) Mỗi tập đóng là giao của một số đếm được những tập mở.

b) Mỗi tập mở là hợp của một số đầu được những tập đóng.

31. Trong không gian mêtric (X, d) cho hai tập hợp A và B thỏa mãn $\overline{A} \cap B = \emptyset$ và $A \cap \overline{B} = \emptyset$. Chứng minh rằng tồn tại hai tập mở U và V trong X sao cho $A \subset U$, $B \subset V$ và $U \cap V = \emptyset$.

32. a) Chứng minh rằng trong không gian mêtric (X, d), với mọi tập con $A \subset X$, mọi số $r > 0$, tập hợp : $V(A, r) = \{ x \in X \mid d(x, A) < r \}$ luôn là tập mở.

b) Hãy chỉ ra ví dụ chứng tỏ rằng tập:

$W(A, r) = \{ x \in X \mid d(x, A) \leq r, r > 0 \}$

không nhất thiết là tập đóng.

Chương 2
KHÔNG GIAN TÔPÔ

§1. CẤU TRÚC TÔPÔ

Định nghĩa 2.1. Cho tập hợp X, giả sử $\mathcal{T}$ là một họ nào đó các tập con của X. Họ $\mathcal{T}$ được gọi là một cấu trúc Tôpô trên tập X (hay $\mathcal{T}$ là một Tôpô trên X) nếu các điều kiện sau đây thoả mãn:

1) Tập $\varnothing$ và tập X là các phần tử của họ $\mathcal{T}$.

2) Hợp của một họ con tuỳ ý các phần từ của họ $\mathcal{T}$ là phần tử của họ $\mathcal{T}$

3) Giao của hai phần tử tuỳ ý của họ $\mathcal{T}$ là phần tử của họ $\mathcal{T}$
Cặp (X, $\mathcal{T}$), trong đó $\mathcal{T}$ là tôpô đã cho trên X, được gọi là một không gian tôpô. Các phần tử của $\mathcal{T}$ được gọi là các tập mở trong X đối với tôpô $\mathcal{T}$, hay gọi là tập $\mathcal{T}$ - mở. Trong trường hợp tôpô $\mathcal{T}$ đã xác định, các phần tử của $\mathcal{T}$ sẽ được gọi một cách đơn giản là các tập mở.

Các điều kiện 1), 2), 3) trong định nghĩa trên được gọi là hệ tiên đề của tôpô.

Ví dụ 2.1

■ Trên X xét họ $\mathcal{T}_T$ chỉ gồm hai tập con của X đó là tập $\varnothing$ và tập X. Rõ ràng $\mathcal{T}_T$ là một tôpô trên X. Ta gọi nó là tôpô thô trên X. Khi đó cặp (X, $\mathcal{T}_T$) được gọi là không gian tôpô thô.

■ Trên X xét họ $\mathcal{T}_D = \mathcal{P}(X)$ (tập tất cả các tập con của X). Rõ ràng $\mathcal{T}_D$ là một tôpô trên X và nó được gọi là tôpô rời rạc trên X. Khi đó cặp $(X,\mathcal{T}_D)$ được gọi là không gian tôpô rời rạc. trong không gian tôpô rời rạc mọi tập con của X đều là tập mở.

■ Xét tập hợp $\mathbb{R}$ các số thực với $\mathcal{T}$ là họ tất cả các tập con A thoả mãn điều kiện sau: đối với mỗi điểm $x \in A$, $\exists \varepsilon > 0$ sao cho $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subset A$, khi đó $\mathcal{T}$ là một tôpô trên $\mathbb{R}$. Tôpô xác định như trên được gọi là tôpô tự nhiên (hay tôpô thông thường trên $\mathbb{R}$).

■ Ký hiệu $\mathcal{T}$ là họ tất cả các tập mở trong không gian mêtric(X, d) (định nghĩa 1.6). Ta có $\mathcal{T}$ là một tôpô trên X và gọi nó là tôpô mêtric phù hợp với mêtric d.

Định nghĩa 2.2. Cho không gian tôpô $(X, \mathcal{T})$, $A \subset X$. Tập con U của không gian tôpô *X* được gọi là một lân cận của tập A nếu trong U có một tập mở chứa A. Ta hiểu một lân cận của phần tử $x \in X$ là lân cận của tập con $\{x\}$.

Nhận xét.

Lân cận của một điểm không nhất thiết là một tập mở, nhưng mỗi tập mở bất kỳ là lân cận của mọi điểm thuộc nó. Nếu lân càn của một điểm là tập mở thì ta nói đó là lân cận mở của điểm đó.

Định nghĩa 2.3. Tập con A của không gian tôpô $(X, \mathcal{T})$ được gọi là tập đóng nếu phần bù của A trong X là tập mở (tập $X \setminus A$ là $\mathcal{T}$- mở).

Ví dụ 2.2

■ Đối với không gian tôpô thô $(X, \mathcal{T}_D)$ các tập $\varnothing$ và X đồng thời vừa là tập mở. vừa là tập đóng.

■ Trong không gian tôpô rời rạc mọi tập con của X đồng thời vừa là tập mở vừa là tập đóng.

■ Trong không gian tôpô $(R,\mathcal{T})$ với tổng tự nhiên $\mathcal{T}$ mỗi khoảng mở $(a, b) = \{x : a < x < b\}$ là một tập mở, mỗi khoảng đóng $[a, b]$ - $\{ x:a \leq x \leq b\}$ là một tập đóng.

Định lý 2.1. Tập con A của không gian tôpô $(X, \mathcal{T})$ là mở khi và chỉ khi A là lân cận của mỗi điểm thuộc nó.

Chứng minh.

Hiển nhiên nếu A là tập mở thì nó là lân cận của mỗi điểm thuộc nó. Ngược lại giả sử tập con A của X là lân cận qua mọi điểm thuộc nó, khi đó với mỗi $x \in A$ tồn tại một tập mở U_x thoả mãn: $x \in U_X \subset A$. Ta có . $A = \bigcup_{x \in A} U_x$ với mọi $x \in A$ nên A là tập mở. □

Định nghĩa 2.4. Họ tất cả các lân cận của một điểm được gọi là hệ lân cận của điểm đó.

Định lý 2.2. Giả sử $\mathcal{U}$ là hệ lân cận của điểm $x \in X$, khi đó giao của một họ hữu hạn các phần tử thuộc $\mathcal{U}$ cũng là phần tử của $\mathcal{U}$ và mỗi tập con của X chứa một phần tử nào đó của $\mathcal{U}$ cũng thuộc $\mathcal{U}$

Chứng minh.

Giả sử $(U_i)_{i \in I}$ là một họ hữu hạn nào đó các phần tử của $\mathcal{U}$, $U = \bigcap_{i \in I} U_i$, với mỗi $i \in I$, vì U_i là lân cận của điểm x nên luôn tồn tại một lân cận mở V_i của x sao cho $x \in V_i \subset U_i$. Khi đó ta có $x \in V = \bigcap_{i \in I} V_i \subset U = \bigcap_{i \in I} U_i$ trong đó V là lân cận mở của x. vậy $U \in \mathcal{U}$

Giả sử U là tập con bất kỳ của không gian tôpô X chứa phần tử W nào đó của $\mathcal{U}$, khi đó tồn lại lân cận mở V của x thoả mãn $x \in V \subset W \subset U$, vậy $U \subset \mathcal{U}$. □

Định lý 2.3.

a) Cho không gian tôpô $(X,\mathcal{T})$. Gọi $\mathcal{F}$ là họ tất cá các tập con đóng trong X. Khi đó họ $\mathcal{F}$ thoả mãn các điều kiện sau:

(i) Tập $\varnothing$ và tập X thuộc $\mathcal{F}$

(ii) Giao của một họ con khác rỗng tuỳ ý các phần tử của $\mathcal{F}$ là phần tử của $\mathcal{F}$

(iii) Hợp của hai phần tử bất kỳ của $\mathcal{F}$ là phần tử của $\mathcal{F}$

b) Cho tập hợp X. giả sử $\mathcal{F}$ là một họ nào đó các tập con của X thoả mãn các điều kiện (l), (2), (3) ở trên. Khi đó họ:

$$\mathcal{T} = \{U \subset X \mid U = X \setminus A, A \in \mathcal{F}\}$$

là một tôpô trên X, và đối với tôpô $\mathcal{T}$ này $\mathcal{F}$ chính là họ tất cả các tập con đóng trong X.

Chứng minh.

a) Hiển nhiên $X, \varnothing \in \mathcal{T}$ nên ta có điều kiện (i). Giả sử $(A_i)_{i\in I}$ là một họ tuỳ ý các phần tử của $\mathcal{F}$ Đặt $A = \bigcap_{i\in I} A_i$ Khi đó ta có $X \setminus A = X \setminus \bigcap_{i\in I} A_i = \bigcup_{i\in I}(X \setminus A_i)$ vì A_i là tập đóng nên $X \setminus A_i$ là tập mở với mọi $i \in I$. Vậy $X \setminus A$ là tập mở. Suy ra $A \in \mathcal{F}$, ta có điều kiện (II).

Giả sử A_1 và A_2 là hai phần tử tuỳ ý của $\mathcal{F}$ Xét tập $X \setminus (A_1 \cup A_2) = (X \setminus A_1) \cap (X \setminus A_2)$. Do A_1, A_2 là các tập đóng nên $(X \setminus A_1)$ và $(X \setminus A_2)$ là những tập mở. Vậy $X \setminus (A_1 \cup A_2)$ là tập mở, do đó $A_1 \cup A_2 \in \mathcal{F}$

b) Giả sử $\mathcal{F}$ là một họ nào đó các tập con của X thoả mãn các điều kiện (i), (ii), (iii) ở trên, xét họ $\mathcal{T} = \{ U \subset X \mid U = X \setminus A$, A

$\in \mathcal{F}\}$. Do $X = X \setminus \varnothing$, $\varnothing = X \setminus X$ trong đó theo điều kiện (i), X, $\varnothing \in \mathcal{F}$ nên X, $\varnothing \in \mathcal{F}$.

Giả sử $(U_i)_{i\in I}$ là một họ tuỳ ý các phần tử của $\mathcal{T}$, đặt $\bigcup_{i\in I} U_i = U$ với mỗi $i \in I$ tồn tại $A_i \in \mathcal{F}$ ra sao cho $U_i = X \setminus A_i$, đặt $A = \bigcap A_i$ theo điều kiện (ii) ta có $A \in \mathcal{F}$ Mặt khác $X \setminus A = X \setminus \bigcap_{i\in I} A_i = \bigcup_{i\in I}(X \setminus A_i) = \bigcup_{i\in I} U_i = U$ vì $A \in \mathcal{F}$ nên ta có $U \in \mathcal{T}$

Giả sử U_1 và U_2 là hai phần tử tuỳ ý của $\mathcal{T}$. Đặt $U = U_1 \cup U_2$ Theo giả thiết tồn tại các tập A_1 và A_2 trong $\mathcal{F}$ sao cho $U_1 = (X \setminus A_1)$ và $U_2 = (X \setminus A$ Khi đó:

$$X \setminus (A_1 \cup A_2) = (X \setminus A_1) \cap (X \setminus A_2) = U_1 \cap U_2 = U.$$

Theo điều kiện (iii) ta có A_1 U A_2 là phần tử của $\mathcal{F}$ nên $U \in \mathcal{T}$. Theo định nghĩa 2.1 ta có $\mathcal{T}$ là một tôpô trên X.

Ta chứng minh đối với tôpô $\mathcal{T}$ này $\mathcal{F}$ chính là họ tất cả các tập con đóng trong X. Thật vậy mỗi phần tử thuộc $\mathcal{F}$ rõ ràng là tập đóng đối với tôpô $\mathcal{T}$. Ngược lại, giả sử A là tập đóng bất kỳ đối với tôpô $\mathcal{T}$ khi đó $X \setminus A \in \mathcal{T}$, theo cách xác định $\mathcal{T}$ trong (iii) tồn tại tập con $A' \in \mathcal{F}$ sao cho $X \setminus A = X \setminus A' \Leftrightarrow A = A'$, suy ra $A \in \mathcal{F}$. □

§2. ĐIỂM GIỚI HẠN, PHẦN TRONG, PHẦN NGOÀI, BIÊN VÀ BAO ĐÓNG CỦA MỘT TẬP

Định nghĩa 2.5 Cho không gian tôpô $(X, \mathcal{T})$ $A \subset X$. Điểm $x \in X$ được gọi là điểm giới hạn của tập A nên mọi lân cận của x đều chứa ít nhất một điểm của A khác x. Tập tất cả các điểm giới hạn của tập A được ký hiệu là A^d, và gọi là tập dẫn xuất của A.

Định lý2.4. Tập con A của không gian tôpô $(X,\mathcal{T})$ là tập đóng khi và chỉ khi A chứa mọi điểm giới hạn của nó.

Chứng minh.

Trước hết ta có nhận xét sau : A là tập đóng khi và chỉ khi $X \setminus A$ là mở, khi và chỉ khi mỗi điểm x tuỳ ý thuộc $X \setminus A$ có lân cận nằm trong $X \setminus A$ (hay nói cách khác với bất kỳ $x \in X \setminus A$ luôn tìm được lân cận của x không giao với A). Vì vậy tập A là đóng trong X khi và chỉ khi đối với mỗi $x \in X$ thoả mãn điều kiện mọi lân cận tuỳ ý của nó đều có giao khác rỗng với A thì suy ra $x \in A$.

Giả sử A là tập đóng và x là một điểm giới hạn tuỳ ý của A. Vì mọi lân cận của x đều có giao với A khác rỗng nên theo nhận xét trên ta có $x \in A$.

Ngược lại giả sử $A^d \subset A$. Lấy điểm y tuỳ ý thuộc $X \setminus A$, vì y không là điểm giới hạn của A nên có một lân cận của y không giao với A, lân cận đó nằm trong $X \setminus A$, suy ra $X \setminus A$ là tập mở. Vậy A là tập đóng. □

Ví dụ 2.3

■ Trong không gian tôpô thô $(\mathbb{R},\mathcal{T}_T)$ với tập con A tuỳ ý nhiều hơn một phần tử mọi điểm thuộc R đều là điểm giới hạn của A.

■ Trong không gian tôpô rời rạc $(\mathbb{R},\mathcal{T}_D)$ một tập con của R đều không có điểm giới hạn nào.

■ Trong không gian tôpô $(\mathbb{R},\mathcal{T})$, với $\mathcal{T}$ là tôpô tự nhiên, xét tập A = (a,b). Khi đó mọi điểm x $\in$ [a,b] đều là điểm giới hạn của A. Các tập $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ không có điểm giới hạn nào. Mọi số thực đều là điểm giới hạn của tập $\mathbb{Q}$.

Định lý 2.5 Nếu thêm vào một tập tất cả các điểm giới hạn của nó thì ta nhận được một tập đóng.

Chứng minh.

Giả sử A là tập con tuỳ ý trong không gian tôpô (X, $\mathcal{T}$), xét tập $X \setminus (A \cup A^d)$ ta thấy : $\forall x \in X \setminus (A \cup A^d)$ luôn tồn tại lân cận mở U của x sao cho $U \cap A = \varnothing$. Ta có $U \cap A^d = \varnothing$. Vì nếu $\exists y \in U \cup A^d \Rightarrow$ U là lân cận của y $\Rightarrow U \cup A \neq \varnothing$ (vô lý). Từ đó suy ra $U \cap (A \cup A^d) = \varnothing \Rightarrow U \subset X \setminus (A \cup A^d) \Rightarrow X \setminus (A \cup A^d$ là lân cận của niềm x. Theo định lý (2.1) ta có $X \setminus (A \cup A^d)$ là tập mở. Vậy $(A \cup A^d)$ là tập đóng. □

Hệ quả. Trong không gian tôpô mọi tập không có điểm giới hạn đều là tập đóng. □

Định nghĩa 2.6. Cho không gian tôpô (X, $\mathcal{T}$), A là tập con bất kỳ của X. Đối với mỗi phần tử x thuộc X ta nói :

(i) x là điểm trong của A nếu tồn tại ít nhất một lân cận của x nằm trong A.

(ii) x là điểm ngoài của A nếu tồn tại ít nhất một lân cận của x nằm trong X \ A.

(iii) x là điểm biên của A nếu x đồng thời không là điểm trong, không là điểm ngoài của A. Hay nói cách khác x là điểm biên của A nếu mọi lân cận của x đều giao khác rỗng với A và X \ A.

Định nghĩa 1.7 Giả sử A là tập con bất kỳ của không gian rộng (X, $\mathcal{T}$*)*. Tập con của X chứa tất cả các điểm trong (tương ứng đểm ngoài, điểm biên) của tập A được gọi là phần trong (tương ứng phần ngoài, biên) của tập A và sẽ ký hiệu là A^0 (tương ứng extA, b(A)).

Ví dụ 2.4

- Trong không gian tôpô $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_T)$, với bất kỳ A là tập con thực sự của $\mathbb{R}$ ta có $A^0 = \varnothing$, extA = $\varnothing$, b(A) = R.

- Trong không gian tôpô $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_D)$, vơi bất kỳ A = (a,b) $\subset \mathbb{R}$ ta có A^0 = (a, b), extA = $\mathbb{R}$ \ (a, b), b(A) = $\varnothing$.

Trong không gian tôpô $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ với $\mathcal{T}$ là tôpô tự nhiên, cho A = (a, b). Khi đó mọi điểm thuộc (a,b) đều là điểm trong của A :

A^0 = (a, b), các điểm a, b là điểm biên của A: b(A) = {a, b}, mọi điểm thuộc tập $\mathbb{R}$ \ [a.b] đều là điểm ngoài của A: extA = R \ [a,b].

Định lý 2.6. Cho không gian tôpô (X, $\mathcal{T}$)

a) Đối với bất kỳ A $\subset$ X ta có:

$$X = A^0 \cup b(A) \cup extA;\ extA = (X \setminus A)^0$$

Các tập A^0, extA là mở, tập b(A) là tập đóng.

b) Tập A^0 là tập mở lớn nhất trong A.

c) Tập A là mở khi và chỉ khi $A = A^0$.

d) Nếu $B \subset A \subset X$ thì $B^0 \subset A^0$. extA $\subset$ ext B.

e) Với mọi A, B $\not\in$ X ta có $(A \cap B)^0 - A^0 \cap B^0$.

f) Với mọi $A \subset X$ ta có $b(A) = b(X \setminus A)$.

Chứng minh.

a) Hiển nhiên $X = A^o \cup b(A) \cup extA$. Ta có $x \in extA \Leftrightarrow$ tồn tại một lân cận U của x sao cho $U \subset X \setminus A \Leftrightarrow$ x là điểm trong của $X \setminus A$, hay $x \in (X \setminus A)^0$. Vậy $extA = (X \setminus A)^0$.

Lấy tuỳ ý $x \in A^0$, khi đó tồn tại một lân cận mở U của x sao cho $x \in U \subset A$. Mặt khác do một phần tử thuộc tập mở U đều nhận U làm lân cận nên chúng đều là điểm trong của tập $A \Rightarrow U \subset AD$. Từ đó ta có A^0 là lân cận của mọi điểm thuộc nó, vậy A^0 là tập mở. Ta có $extA = (X \setminus A)^0$, nên extA là tập mở.

Do $A^0 \cup (X \setminus A)^0 = (A^0) \cup extA)$ là tập mở nên:

$$b(A) = X \setminus (A^0 \cup extA)$$

là tập đóng.

b) Giả sử V là tập mở bất kỳ trong A, khi đó V là lân cận của mọi điểm thuộc nó, nghĩa là $\forall x \in V$ ta có $x \in V \subset A$, suy ra $\forall x \in V$ đều là điểm trong của A. Vậy $V \subset A^0$, hay A^0 là tập mở lớn nhất trong A.

c) Sử dụng a), b) ta có ngay tập A là mở $\Leftrightarrow A = A^0$.

d) Giả sử $B \subset A \subset X$. Vì $B^0 \subset B \subset A$ và A^0 là tập mở lớn nhất trong A nên $B^0 \subset A^0$. Một cách tương tự ta có $extA \subset extB$.

e) Giả sử $A, B \subset X$. Vì $A^0 \cap B^0$ là tập mở trong $A \cap B$, theo b) ta có $A^0 \cap B^0 \subset (A \cap B)^0$. Ngược lại với bất kỳ $X \in (A \cap B)^0$, luôn tồn tại lân cận mở U của x sao cho $U \subset A \cap B \Rightarrow U \subset A$ và $U \subset B \Rightarrow x \in A^0$ và $x \in B^0$. Vậy $x \in A^0 \cap B^0 = (A \cap B)^0$.

f) Ta có :

$$b(A) = X \setminus (A^0 \cup extA)$$
$$= X \setminus ((X \setminus A)^0 \cup ext(X \setminus A)) = b(X \setminus A). \square$$

Định nghĩa 2.8. Giả sử A là tập con bất kỳ của không gian tôpô (X, $\mathcal{T}$). Giao của tất cả các tập đóng chứa A được gọi là bao đóng của tập A và ký hiệu là $\overline{A}$.

Theo định lý 2.3 bao đóng của tập A là tập đóng, vì vậy nó là tập đóng nhỏ nhất chứa A.

Định lý 2.7 Với $A \subset (X, \mathcal{T})$, ta có $\overline{A} = A \cup A^0 = A^0 \cup b(A)$.

Chứng minh.

a) Do $A \subset \overline{A}$ nên $A^d \subset (\overline{A})^d$. Theo định lý (2.4), do $\overline{A}$ là tập đóng nên nó chứa mọi điểm giới hạn của nó. Vì vậy $A^d \subset \overline{A}$. Từ đó suy ra $A \cup A^d \subset \overline{A}$. Mặt khác theo định lý (2.5), do $A \cup A^d$ là tập đóng chứa A, nên $\overline{A} \subset A \cup A^d$. vậy $\overline{A} = A \cup A^d$.

b) Trước hết ta có $A^0 \subset \overline{A}$, mặt khác do mỗi điểm biên của A hoặc thuộc A, hoặc là điểm giới hạn của A nên $b(A) \subset \overline{A}$. Vậy $A^0 \cup b(A) \subset \overline{A}$. Ngược lại theo định lý (2.6) từ $X = A^0 \cup b(A) \cup extA$, ta có $X \setminus (A^0 \cup b(A)) = extA$ là tập mở, nên $A^0 \cup b(A)$ là tập đóng chứa A. do đó $A \subset A^0 \cup b(A)$, ta có điều cần chứng minh. $\square$

Ta dễ đàng chứng minh định lý sau đây.

Định lý 2.8. Cho không gian tôpô (X, $\mathcal{T}$). Khi đó các khẳng định sau đây là đúng:

a) $\overline{\varnothing} = \varnothing$

b) Với mọi $A \subset X$ luôn có $A \subset \overline{A}$.

c) Với mọi $A \subset X$ luôn có $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$.

d) Với mọi $A, B \subset X$ luôn có:

$$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cup \bar{B}\ ;\ \overline{A \cap B} \subset \bar{A} \cap \bar{B}.$$

e) Tập A là đóng khi và chỉ khi $A = \overline{A}$.

g) nếu $A \subset B$ thì $\overline{A} \subset \overline{B}$

Định nghĩa 2.9. Cho không gian tôpô $(X, \mathcal{T})$, ánh xạ:

$$\mu: \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$$

cho tương ứng mỗi tập con A của X với bao đóng A của nó được gọi là toán tử bao đóng trên X tương thích với tôpô $\mathcal{T}$

Định lý 2.9. Cho tập hợp X khác rỗng; ký hiệu $\mathcal{P}(X)$ là tập tất cả các tập con của X. ánh xạ $f : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$ thoả mãn các điều kiện sau :

a) $f(\varnothing) = \varnothing$.

bị Với mọi $A \subset X$ luôn có $A \subset f(A)$.

c) Với mọi $A \subset X$ luôn có $f(f(A)) = f(A)$.

d) Với mọi $A, B \subset X$ luôn có $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.

Khi đó trên X tồn tại duy nhất một tôpô $\mathcal{T}$ sao cho với mỗi tập con A của X ta có $f(A) = \overline{A}$ (hay nói cách khác f là toán tử bao đóng trên X phù hợp với $\mathcal{T}$.

Chứng minh.

Ta ký hiệu: $\mathcal{B} = \{A \subset X \mid f(A) = A\}$;

$\mathcal{T} = \{B \subset X \mid B = X \setminus A,\ A \in \mathcal{B}\}$.

Ta sẽ chứng minh $\mathcal{T}$ là tôpô trên X thoả mãn kết luận của định lý.

Trước hết ta chứng minh họ $\mathcal{B}$ thoả mãn ba điều kiện của định lý (2.3). Thật vậy ta có :

(i) $\varnothing, X \in \mathcal{B}$ vì $f(\varnothing) = \varnothing$ theo điều kiện a), và theo điều kiện b) ta có $X \subset f(X)$. Vì vậy $F(X) = X$.

(ii) Trước hết ta chứng minh với A, B tuỳ ý trong $\mathcal{P}$(X) thoả mãn $A \subset B$ thì suy ra $f(A) \subset f(B)$. Thật vậy, do $B = A \cup B$ nên theo điều kiện (d) ta có:

$f(B) = f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$. Điều này chứng tỏ $f(A) \subset f(B)$. Bây giờ giả sử đã cho một họ $(A_i)_{i \in I}$ tuỳ ý các phần tử của $\mathcal{B}$ Đặt $A = \bigcap_{i \in I} A_i$ theo điều kiện (b) ta có $A \subset f(A)$. Mặt khác vì $A \subset A$; với mọi $i \in I$, nên $f(A) \subset f(A_i)$ với mọi $i \in I$, suy ra:

$$f(A) \subset \bigcap_{i \in I} f(A_i) = \bigcap_{i \in I} A_i = A.$$

vậy $A = F(A) \Rightarrow A \in \mathcal{B}$. Vậy giao của một họ $(A_i)_{i \in I}$ tuỳ ý các phần tử của $\mathcal{B}$ là một phần tử thuộc $\mathcal{B}$.

(iii) Hợp của hai phần tử bất kỳ $A, B \in \mathcal{B}$ là một phần tử thuộc $\mathcal{B}$ vì từ điều kiện $f(A) = A$, $f(B) = B$ và điều kiện (d) ta có:

$$f(A \cup B) = f(A) \cup f(B) = A \cup B$$

Theo định lý (2.3), họ $\mathcal{T} = \{ B \subset X \mid B = X \setminus A, A \in \mathcal{B}\}$ được xác định như trên là một tôpô trên X , và đối với nó họ $\mathcal{B} = \{ A \subset X \mid f(A) = A\}$ chính là họ tất cả các tập con đóng trong X.

Bây giờ ta sẽ chứng minh f là toán tử bao đóng trên X phù hợp với $\mathcal{T}$. Thật vậy giả sử M là một tập con tuỳ ý của X, vì $M \subset \overline{M}$ nên theo chứng minh trên ta có $f(M) \subset f(\overline{M})$, vì $\overline{M} \subset \mathcal{B}$ nên $f(\overline{M}) = \overline{M}$ suy ra $f(M) \subset \overline{M}$. Mặt khác theo điều kiện (c) la có $f(f(M)) = f(M)$, nghĩa là $f(M) \subset \mathcal{B}$ vậy f(M) là tập đóng trong X chứa M nên $\overline{M} \subset f(M)$. Nghĩa là $f(M) = \overline{M}$ với mọi tập con M của X.

Ta dễ dàng chứng minh được tính duy nhất của tôpô $\mathcal{T}$. Định lý được chứng minh. □

§3. CƠ SỞ CỦA KHÔNG GIAN TÔPÔ

Định nghĩa 2.10. Cho không gian tôpô $(X,\mathcal{T})$, x là phần tử của X. Họ $\mathcal{V}_x$ nào đó những lân cận của điểm x được gọi là cơ sở địa phương của tôpô $\mathcal{T}$ tại x (hay còn gọi là cơ sở lân cận tại x) nếu với mỗi lân cận bất kỳ U của x luôn tồn tại $V \in \mathcal{V}_x$ sao cho $x \in V \subset U$. Họ con $\mathcal{V}$ các phân tử của tôpô $\mathcal{T}$ được gọi là cơ sở của $\mathcal{T}$ trên X nếu mọi phần tử thuộc $\mathcal{T}$ đều là hợp nào đó của các phần tử thuộc $\mathcal{V}$. Họ con $\mathcal{M} \subset \mathcal{T}$ được gọi là tiền cơ sở của tôpô $\mathcal{T}$ nếu họ tất cả các giao hữu hạn có thể của các phần tử thuộc $\mathcal{M}$ tập thành một cơ sở của tôpô $\mathcal{T}$.

Ví dụ 2.5

Trong không gian tôpô rời rạc $(X, \mathcal{T}_D)$. họ tất cả các tập con có 1 phần tử là một cơ sở của $\mathcal{T}_D$. Họ tất cả các tập con của X có hai phần tử là một tiền cơ sở của $\mathcal{T}_D$. Với điểm x bất kỳ thuộc X, bản thân tập $\{x\}$ là một cơ sở địa phương tại x.

Định lý 2.10. Cho không gian tôpô $(X,\mathcal{T})$, họ con $\mathcal{V} \subset \mathcal{T}$. Ta có các mệnh đề sau là tương đương:

a) Họ $\mathcal{V}$ là cơ sở của tôpô.

b) Tại mỗi điểm $x \in X$ cùng với một lân cận U tuỳ ý của nó luôn tồn tại $V \in \mathcal{V}$ sao cho $x \in V \subset U$.

c) Đối với mỗi phần tử $x \in X$, họ $\mathcal{V}_x$ bao gồm tất cả các phần tử thuộc $\mathcal{V}$ chứa x tạo thành cơ sở địa phương của tôpô $\mathcal{T}$ tại x.

Chứng minh.

■ a) $\Rightarrow$ b) Giả sử $\mathcal{T}$ là cơ sở của tôpô $\mathcal{T}$. Lấy $x \in X$ bất kỳ và giả sử U là một lân cận tuỳ ý của điểm x. Khi đó tồn tại một tập mở W thoả mãn $x \in W \subset U$. Vì $W \in \mathcal{T}$ nên W là hợp nào đó các phần tử của $\mathcal{V}$ Do đó tồn tại phần tử $V \in \mathcal{V}$ sao cho $x \subset V \subset W \subset U$.

■ b) $\Rightarrow$ c) Giả sử $\mathcal{V}$ là một họ con nào đó của $\mathcal{T}$ thoả mãn điều kiện b. Đối với $x \in X$ tuỳ ý, giả sử $\mathcal{V}_x$ là họ bao gồm tất cả các phần tử thuộc $\mathcal{V}$ chứa x, và giả sử U là lân cận bất kỳ của x. Theo điều kiện b tồn tại $V \in \mathcal{V}$ sao cho $x \in V \subset U$. Vì V chứa x nên la có $V \in \mathcal{V}_x$ thoả mãn $x \in V \subset U$. Vậy họ $\mathcal{V}_x$ bao gồm tất cả các phần tử thuộc $\mathcal{V}$ chứa x tạo thành cơ sở địa phương của tôpô $\mathcal{T}$ tại x.

■ c) $\Rightarrow$ a) Giả sử với mỗi phần tử $x \in X$, họ $\mathcal{V}_x$ gồm tất cả các phần tử thuộc $\mathcal{V}$ chứa x tạo thành cơ sở địa phương của tôpô $\mathcal{T}$ tại x. Lấy W tuỳ ý thuộc $\mathcal{T}$, khi đó với mỗi phần tử $y \in W$ luôn tồn tại $V_y \in \mathcal{V}_y \subset \mathcal{V}$ sao Cho $y \in V_y \subset W$. Rõ ràng , hay $\bigcup_{y \in W} V_y = W$ nào đó các phần tử của $\mathcal{V}$. Theo định nghĩa ta có $\mathcal{V}$ là cơ sở của tôpô $\mathcal{T}$ □

Từ định nghĩa 2.10 ta thấy một tôpô có thể được xác định từ cơ sở của nó nhờ phép toán hợp các tập hợp, hơn nữa một tôpô có thể được xác định từ một tiền cơ sở nào đó của nó nhờ phép toán giao hữu hạn và phép toán hợp các tập hợp. Vấn đề đặt ra là với điều kiện như thế nào ta có thể xây dựng một tôpô trên X từ một họ nào đó các tập con của X. Để giải quyết câu hỏi đó trước hết ta xây dựng khái niệm phủ như sau.

Định nghĩa 2.11 Cho tập hợp X tuỳ ý khác rỗng, A là tập con nào đó của X. Một họ $(B_i)_{i \in I}$ các tập con của *X* được gọi là một phủ của tập con A nếu $A \subset \bigcup_{i \in I} B_i$ Khi đó ta cũng nói họ $(B_i)_{i \in I}$ Phủ tập A.

Nếu $(B_i)_{i \in I}$ là một phủ của tập A, họ con $(B_j)_{j \in k}$ $(K \subset I)$ của họ $(B_i)_{i \in I}$ được gọi là một phủ con của phủ trên nếu bản thân họ $(B_j)_{j \in k}$ cũng là một phủ của A.

Nếu (X, $\mathcal{T}$)là một không gian tôpô, B_i là tập mở (tương ứng đóng) với mọi $i \in I$, thì ta nói phủ $(B_i)_{i \in I}$ của tập A là một phủ mở (tương ứng đóng).

Định lý 2.11.

a) Họ $\mathcal{V}$ những tập con của tập hợp X là cơ sở của tôpô nào đó trên X khi và chỉ khi các điều kiện sau đây thoả mãn:

(i) $\mathcal{V}$ là một phủ của tập X, nghĩa là $X = U\ \{ B: B \in \mathcal{V} \}$.

(ii) Đối với hai phần tử tuỳ ý $U, V \in \mathcal{V}$ và với mỗi điểm $x \in U \cap V$ tồn tại phần tử $W \in \mathcal{V}$ sao cho $x \in W \subset U \cap V$.

b) Để họ $\mathcal{M}$ nào đó những tập con của tập X là tiền cơ sở của một tôpô trên X thì điều kiện cần và đủ là: họ $\mathcal{M}$ là một phủ của tập hợp X.

Chứng minh.

a) Giả sử $\mathcal{V}$ là cơ sở của một tôpô trên X. Khi đó hiển nhiên $\mathcal{V}$ là một phủ của X. Hơn nữa với hai phần tử tuỳ ý $U, V \in \mathcal{V}$ và với mỗi điểm $x \in U \cap V$, do U, V là các tập mở nên $U \cap V$ là tập mở chứa x. Vì thế tồn tại $W \in \mathcal{V}$ sao cho $x \in W \subset U \cap V$.

Ngược lại giả Sử $\mathcal{V}$ là một họ những tập con của X thoả mãn các điều kiện (i) và (ii). Gọi $\mathcal{T}$ là họ gồm tập $\varnothing$ và tất cả các tập con của X sao cho nó là hợp của những phần tử nào đó trong $\mathcal{V}$ Dễ dàng chứng minh được $\mathcal{T}$ là một tôpô trên X và nhận $\mathcal{V}$ là cơ sở.

b) Giả sử họ $\mathcal{M}$ nào đó những tập con của tập X thoả mãn $\mathcal{M}$ là một phủ của X. Gọi $\mathcal{V}$ là họ tất cả các giao hữu hạn có thể của các phần tử thuộc $\mathscr{M}$, rõ ràng $\mathscr{M}$ là một họ con của $\mathscr{V}$ nên $\mathscr{V}$ cũng là một phủ của X, hơn nữa đối với hai phân tử tuỳ ý U, V $\in \mathscr{V}$ ta có $U \cap V$ cũng là giao hữu hạn các phần tử thuộc $\mathscr{M}$ nên $U \cap V \in \mathscr{V}$**.** Vì vậy với mỗi điểm $x \in U \cap V$ tồn tại $W = U \cap V \in \mathscr{V}$ để Cho $x \in W \subset U \cap V$ Theo a) $\mathscr{V}$ là cơ sở của tôpô nào đó trên X. Vậy họ $\mathscr{M}$ là tiền cơ sở của một tôpô trên X. □

Định nghĩa 2.12. Ta nói rằng không gian tôpô (X, $\mathscr{T}$) thoả mãn tiên đề đếm được thứ nhất nếu tại mỗi điểm tuỳ ý trong X đều có cơ sở địa phương không quá đếm được.

Ta nói rằng không gian tôpô (X, $\mathscr{T}$) thoả mãn tiên đề đếm được thứ hai nếu tôpô $\mathscr{T}$ trên X có cơ sở không quá đếm được.

Rõ ràng mỗi không gian tôpô đã thoả mãn tiên đề đếm được thứ hai thì cũng thoả mãn tiên đề đếm được thứ nhất, nhưng tồn tại những không gian tôpô thoả mãn tiên đề đếm được thứ nhất nhưng không thoả mãn tiên đề đếm được thứ hai.

Ví dụ 2.6

Xét tập các số thực $\mathbb{R}$ với tôpô rời rạc, với $x \in X$ bất kỳ, ta thấy họ chỉ gồm một tập $\{x\}$ tập thành một cơ sở địa phương tại x. Vì thế đây là không gian thoả mãn tiên đề đếm được thứ nhất, nhưng nó không thoả mãn tiên đề đếm được thứ hai vì không có cơ sở đếm được

Định lý 2.12. Nếu không gian tôpô (X, $\mathscr{T}$) thoả mãn tiên đề đếm được thứ nhất, thì tại môi điểm $x \in X$ luôn tồn tại một cơ sở địa phương $(U_i)_{i\in\mathbb{N}}$ thoả mãn $U_{i+1} \subset U_i$ với mọi $i \in \mathbb{N}$.

Chứng minh.

Giả sử họ $(W_i)_{i\in\mathbb{N}}$ là một cơ sở địa phương đếm được tại điểm x. Đặt: $U_1 = W_1$, $U_2 = U_1 \cap W_2$, ……., $U_i = U_{i-1} \cap W_i$....

Rõ ràng họ $(U_i)_{i\in\mathbb{N}}$ thoả mãn : $U_{i+1} \subset U_i$ (với mọi $i \in \mathbb{N}$ và là một cơ sở địa phương tại điểm x. □

Định lý 2.13. Giả sử A là tập con không đếm được của không gian tôpô $(X, \mathcal{T})$ thoả mãn tiên đề đếm được thứ hai. Khi đó $A \cap A^d \neq \emptyset$

Chứng minh.

Giả sử $A \cap A^d = \emptyset$, nghĩa là mọi điểm thuộc A đều không phải là điểm giới hạn của A, và giả sử $\mathcal{V}$ là một cơ sở đếm được của tôpô $\mathcal{T}$. Khi đó với mỗi $x \in A$ tồn tại một lân cận mở Ux thoả mãn $U_x \cap (A \setminus \{X\}) = \emptyset$. DO $\mathcal{V}$ là cơ sở nên tồn tại lân cận $V_X \in \mathcal{V}$ của niềm x thoả mãn $x \in V_x \subset U_x$. Ta có $V_X \cap A = \{X\}$. Do đó có một đơn ánh từ tập A đến họ $\mathcal{V}$. Suy ra tập A có lực lượng đếm được, điều này mâu thuẫn với giả thiết ban đầu. Vậy trong A có điểm giới hạn của A. □

Định lý 2.14. (Định lý Linđơlôp) Mỗi một phủ mở bất kỳ của không gian tôpô $(X, \mathcal{T})$ thoả mãn tiên đề đếm được thứ hai luôn có phủ con đếm được.

Chứng minh.

Giả sử họ $(W_i)_{i\in I}$ là một phủ mở của X đối với tôpô $\mathcal{T}$, và $\mathcal{V}$ là một cơ sở đếm được của $\mathcal{T}$ với mỗi $i \in I$ ta thấy W_i là hợp nào đó các phần tử của $\mathcal{V}$. Như vậy trong $\mathcal{V}$ ta sẽ chọn được một họ con $\mathcal{K}$ có tính chất sau:

(i) Mỗi phần tử $V \in \mathcal{K}$ là tập con của một tập W_i nào đó.

(ii) Họ $\mathcal{K}$ là một phủ của X.

Đối với mỗi phần tử của $V \in \mathcal{K}$ ta chọn cố định phần tử $W_{f(v)}$ là phần tử của họ họ $(W_i)_{i\in I}$ chứa V. Như vậy ta chọn được họ con $(W_{f(V)})_{V\in\mathcal{K}}$ của họ $(W_i)_{i\in I}$ thoả mãn : họ $(W_{f(V)})_{V\in\mathcal{K}}$ có lực lượng đếm được và là phủ của X (vì $\mathcal{K}$ là phủ của X). □

Định nghĩa 2.13. Không gian tôpô (X, $\mathcal{T}$)được gọi là không gian Linđơlôp nếu mỗi phủ mở bất kỳ của nó có phủ con đếm được.

Định nghĩa 2.14. Ta nói tập con A của không gian tôpô (X,$\mathcal{T}$) là trù mật trong *X* nếu $\overline{A}$ = X. Không gian tôpô (X,$\mathcal{T}$) được gọi là không gian khả li nếu trong *X* có một tập con đếm được trù mật.

Vì dụ 2.7

Xét tập $\mathbb{R}$ với tổng tự nhiên $\mathcal{T}$, khi đó tập $\mathbb{Q}$ các số hữu tỷ là trù mật trong $\mathbb{R}$ vì mọi số thực thuộc $\mathbb{R}$ đều là điểm giới hạn của $\mathbb{Q}$, hơn nữa vì $\mathbb{Q}$ là đếm được nên ($\mathbb{R}$, $\mathcal{T}$) là không gian khả li.

Định lý 2.15 Không gian tôpô (X, $\mathcal{T}$) thoả mãn tiên đề đếm được thứ hai là không gian khả li.

Chứng minh.

Giả sử do là một cơ sở đếm được của không gian tôpô (X,$\mathcal{T}$). Với mỗi U $\in \mathcal{V}$ ta chọn 1 phần tử x $\in$ U. Gọi A là tập hợp tất cả các điểm x được chọn như trên, khi đó A là tập con đếm được của X. Mặt khác ta có X \ $\overline{A}$ là tập mở, giả sử $X \setminus \overline{A} \neq \varnothing$ khi đó tồn tại phần tử y $\in$ X \ $\overline{A}$. Ta có X \ $\overline{A}$ là lân cận của y. theo định nghĩa cơ sở tồn tại V $\in \mathcal{V}$ sao cho V $\subseteq$ (X \ $\overline{A}$), nghĩa là V $\cap$ A = $\varnothing$. Điều này mâu thuẫn với cách xây dựng A ở trên. do đó X \ $\overline{A}$ = $\varnothing$, nghĩa là X = $\overline{A}$. vậy A là tập đếm được trù mật trong X. theo định nghĩa X là không gian khả li. □

Định nghĩa 2.15 không gian tôpô (X, $\mathcal{T}$) được gọi là không gian Hausdorff (hay còn gọi là H - không gian, T_2 - không gian) nếu đối với hai điểm khác nhau tuỳ ý x, y $\in$ *X* luôn tồn tại các lân cận U của x và V của y sao cho $U \cap V = \varnothing$.

Định lý 2.16. Trong không gian tôpô Hausdorff (X, $\mathcal{T}$) mọi tập con hữu hạn đều là tập đóng.

Chứng minh.

Với $x \in X$ tuỳ ý, ta có tập $X \setminus \{x\}$ là tập mở. thật vậy, với y ∈ x \{X} bất kỳ ta luôn tìm được một lân cận của y không chứa x, và do đó lân cận này nằm hoàn toàn trong $X \setminus \{x\}$. Do vậy y là điểm trong của $X \setminus \{x\}$, nghĩa là $(X \setminus \{x\})^0 = X \setminus \{x\}$. Từ đó suy ra tập một điểm bất kỳ trong X là đóng.

Ta có $A = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\} = \bigcup_{i=1}^{n} \{x_i\}$ là tập đóng.

Ví dụ 2.8

1) Xét tập X với tổng rời rạc $\mathcal{T}_D = \mathcal{P}_{(X)}$.

- Tiền cơ sở, đồng thời là cơ sở của (X, $\mathcal{T}_D$) là họ tất cả các tập con của X có một phần tử.
- Họ tất cả các tập con của X có hai phần tử cũng là một tiền cơ sở của (X, $\mathcal{T}_D$)
- Không gian tôpô (X, $\mathcal{T}_D$) thoả mãn tiên đề đếm được thứ nhất, nhưng chưa chắc thoả mãn tiên đề đếm được thứ hai.
- Khi X có lực lượng không đếm được thì không gian tôpô (X, $\mathcal{T}_D$) không thoả mãn tiên đề đếm được thứ hai, cũng không phải là khả li.
- Không gian tôpô (X, $\mathcal{T}_D$) là không gian Hausdorff.

2) Xét không gian tôpô $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ với $\mathcal{T}$ là tôpô tự nhiên. Khi đó:

- $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ là không gian tôpô thoả mãn tiên đề đếm được thứ hai với cơ sở là họ đếm được tất cả các khoảng mở có dạng.

$$(x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n}), \text{ với } x \in \mathbb{Q}.$$

- $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ là không gian Hausdorff, và là không gian khả li..

3) Trong tập hợp $\mathbb{R}$ xét họ $\mathcal{T}_k = \{A : R \setminus A$ là tập hữu hạn $\}$. Ta có $\mathcal{T}_k$ là một tôpô trên $\mathbb{R}$ và gọi nó là tôpô tạo bởi phần bù của các tập hữu hạn. Khi đó các khẳng định sau là đúng.

- $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_K)$ là không gian tôpô không thoả mãn tiên đề đếm được thứ nhất.
- $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_K)$ không là không gian Hausdorff.
- $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_K)$ là không gian khả li.

4) trong không gian mêtric (X, d) với $\mathcal{T}$ là tôpô mêtric, ta có. Họ tất cả các hình cầu mở $S(x, r) \mid x \in X, r \in \mathbb{R}^+ \}$ là cơ sở của tôpô $\mathcal{T}$.

Họ tất cả các hình cầu mở $\{S(x_0, r) \mid r \in \mathbb{Q}^+)$ là cơ sở địa phương tại điểm x_0. Vì vậy (X, d) là không gian thoả mãn tiên đề đếm được thứ nhất.

- (X, d) là không gian Hausdorf.

BÀI TẬP

1. a) Hãy tìn tất cả các tôpô có thể xây dựng trên tập có hai phần tử.

   b) Có bao nhiêu tôpô khác nhau có thể xây dựng trên tập có ba phần tử.

2. Hãy xác định xem họ $\mathcal{T}$ các tập con của tập *X* được cho dưới đây có là tôpô trên X hay không:

   a) X = {a, b, c} ; $\mathcal{T}$= { ∅, {a}, {a, b}, {b, c}, X}.

   b) X = $\mathbb{R}$; $\mathcal{T}$ = {∅ , (-a, a) | a ∈ $\mathbb{R}$, a > 0}.

   c) *X* = $\mathbb{R}$;$\mathcal{T}$ = {∅, (a, b] | a, b ∈ $\mathbb{R}$, a < b}.

   d_ X = $\mathbb{R}$ x $\mathbb{R}$, trong đó $\mathbb{R}$ là tập số thực với tôpô tự nhiên ;

   $\mathcal{T}$ = { UX V | U, V là các tập thở trong $\mathbb{R}$}.

3. Chứng minh rằng giao của hai tôpô xác định trên tập X là một tôpô trên X. Hợp của hai tôpô xác định trên tập X có là một tôpô trên X không ? vì sao?
4. Hãy chỉ ra ví dụ để minh hoạ : Có những không gian tôpô trong đó giao của một họ vô hạn những tập con mở chưa chắc là tập mở; hợp của một họ vô hạn những tập con đóng chưa chắc là một tập đóng.
5. Chứng minh rằng trong không gian tôpô (X, $\mathcal{T}$) nếu U và V là hai tập mở không giao nhau thì : $\overline{U} \cap V = U \cap \overline{V} = \varnothing$.
6. Chứng minh rằng trong không gian tôpô (X, $\mathcal{T}$) với mọi tập con A ta luôn có b(A) = $\overline{A} \cap \overline{(x \setminus A)}$; A ∪ b(A) = A^0 ∪ b(A).
7. Chứng minh rằng trong không gian tôpô (X, $\mathcal{T}$*)* nếu U là tập con mở và A là tập con đóng trong X thì: U \ A là tập mở và A \ U là tập đóng trong X.
8. Trong tập các số thực $\mathbb{R}$ cho các tập con sau : (0, 1); [0, 1); (0, 1] ; [0, l]; $\mathbb{N}$, $\mathbb{Q}$ {0, 1, 2}. Hãy xét tính mở, đóng của các tập con trên trong $\mathbb{R}$ đối với các tôpô sau:

   a) Tôpô rời rạc.

   b) Tôpô tự nhiên.

c) Tôpô tạo bởi các phần bù của các tập hữu bạn.

9. Chứng minh rằng trong không gian tôpô (X, $\mathcal{T}$) tập con A là vừa mở, vừa đóng khi và chỉ khi b(A) = ∅.

10. Chứng minh rằng nếu A là tập con hữu hạn phần tử của không gian tôpô $\mathbb{R}$ với tổng tự nhiên thì b(A) = A.

11. Tìm tất cả các điểm giới hạn của tập con A = [0, 1] trong tập $\mathbb{R}$ với tôpô :

a) Tôpô thô.

B) Tôpô rời rạc.

c) Tôpô tự nhiên.

d) Tôpô tạo bởi các phần bù của các tập hữu hạn.

12. Chứng minh rằng trong không gian tôpô (X, $\mathcal{T}$) điểm x là điểm giới hạn của tập A khi và chỉ khi $x \in \overline{A \setminus \{x\}}$.

13. Giả sử (X, $\mathcal{T}$) là không gian tôpô. Hãy chứng minh các khẳng định sau đây:

a) Nếu $A \subseteq B$ thì $A^d \subseteq B^d$.

b) $(A \cup B)^d = A^d \cup B^d$.

c) Tập A là tập đóng khi và chỉ khi $A^d \subseteq A$. Hãy chỉ ra ví dụ chứng tỏ A là tập đóng nhưng $A^d \neq A$.

14. Cho không gian tôpô (X, $\mathcal{T}$) với A là tập con của X, những khẳng định sau đây là đúng hay sai? Vì sao:

a) $A^d \subseteq \overline{A}$. B) $A^d \subseteq$ b(A). c) b(A) $\subseteq A^d$. d) $\overline{A} \subseteq A^d$.

15. Trong không gian tôpô (X, $\mathcal{T}$) với A là tập con của X, các điểm của tập $A \setminus A^d$ được gọi là các điểm cô tập của tập A. Tập A được gọi là thưa trong X nếu $A^0 = \varnothing$. Tập A được gọi là không đâu trù mật trong X nếu $(\overline{A})^0 = \varnothing$. Tập A được gọi là tự trù mật nếu $A \subseteq A^d$. Hãy chứng minh các khẳng định

sau đây:

a) Điểm $x \in X$ là điểm cô tập của X nếu và chỉ nếu $\{x\}$ là tập mở.

b) tập A là trù mật trong X nếu và chỉ nếu mỗi tập mở khác rỗng trong X đều có điểm chung với A.

c) Tập A là thưa trong X nếu và chỉ nếu mỗi tập mở khác rỗng trong X đều có điểm chung với $X \setminus A$.

d) Tập A là không đâu trừ mật trong X nếu và chỉ nếu mỗi tập mở khác rỗng trong X đều chứa một tập mở khác rỗng không có điểm chung với A.

16. Chứng minh rằng họ $\mathcal{M}_1 = \{(a, +\infty) \mid a \in \mathbb{R}\}$, và họ $\mathcal{M}_2 = \{(-\infty, a) \mid a \in \mathbb{R}\}$ là các cơ sở của các tôpô nào đó trên $\mathbb{R}$. Hãy xác định các tính chất của các tôpô đó.

17. Chứng minh rằng họ $\mathcal{V} = \{[a, b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$ tạo nên cơ sở của tôpô trên $\mathbb{R}$, ký hiệu tôpô đó là $\mathcal{T}_s$. Hãy chứng minh không gian tôpô $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_s)$ là không gian thỏa mãn tiên đề đếm được thứ nhất, là không gian khả li, không gian Hausdorff nhưng không là không gian thỏa mãn tiên đề đếm được thứ hai.

18. Trên không gian tôpô $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_K)$ hãy chỉ ra một họ vô hạn các tập con mở nhưng giao của chúng không là tập mở.

19. Chứng minh rằng không gian mêtric (X, d) với $\mathcal{T}$ là tôpô mêtric là không gian thoả mãn tiên đề đếm được thứ II khi và chỉ khi X là không gian khả li.

Chương 3

ÁNH XẠ LIÊN TỤC, KHÔNG GIAN CON KHÔNG GIAN TÍCH, KHÔNG GIAN THƯƠNG

Việc nghiên cứu lớp ánh xạ giữa những không gian tôpô rất quan trọng, đặc biệt là các ánh xạ liên tục. Trong chương trình giải tích cổ điển chúng ta đã biết về các hàm liên tục. Ở đây khái niệm ánh xạ liên tục sẽ là khái quát hơn, sự hiểu biết về các ánh xạ liên tục từ không gian tôpô này đến không gian tôpô kia sẽ cho ta biết được những tính chất của không gian tôpô nguồn (hoặc đích), đặc biệt các phép đồng phôi giữa những không gian tôpô sẽ chuyển cấu trúc không gian tôpô này đến không gian tôpô kia với ý nghĩa là các tương đương tôpô. Các bất biến qua các phép đồng phôi được gọi là các bất biến tôpô. Dưới đây ta sẽ nghiên cứu cụ thể về ánh xạ liên tục.

§1. ÁNH XẠ LIÊN TỤC - PHÉP ĐỒNG PHÔI

Định nghĩa 3.1.

- Ta nói ánh xạ $f : X \to Y$, từ không gian tôpô X đến không gian tôpô Y, là liên tục tại điểm $x_0 \in X$ nếu với mỗi lân cận U của điểm $f(x_0) \in Y$ luôn tồn tại lân cận V của điểm x_0 thoả mãn $f(V) \subset U$.

■ Ánh xạ f được gọi là ánh xạ liên tục trên không gian tôpô X nếu nó liên tục tại mọi điểm $x \in X$.

Nhận xét.

Giả sử f: $X \to Y$ là ánh xạ từ không gian tôpô X đến không gian tôpô Y. Ánh xạ f là liên tục tại điểm $x_0 \in X$ nếu và chỉ nếu, với mọi lân cận U của $f(x_0)$ trong Y, tạo ảnh $f^{-1}(U)$ là lân cận của x_0 trong X.

Thật vậy, nếu ánh xạ f là liên tục tại x_0 hiển nhiên tồn lại lân cận V của x_0 để $f(V) \subset U \Rightarrow V \subset f^{-1}(f(V)) \subset f^{-1}(U) \Rightarrow f^{-1}(U)$ là lân cận của x_0 trong X. Ngược lại giả sử với mọi lân cận U của $f(x_0)$ luôn có $f^{-1}(U)$ là lân cận của điểm x_0 trong X. Khi đó chọn $V = f^{-1}(U)$, ta có $f(V) = f(f^{-1}(U)) \subset U$ Vậy f là liên tục tại x_0.

Định lý 3.1. Cho f : $X \to Y$ là ánh xạ từ không gian tôpô X đến không gian tôpô Y. Khi đó các điều kiện sau đây là tương đương:

a) Ánh xạ f là liên tục.

b) Đối với mỗi tập con A bất kì của X luôn có $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$.

c) Tạo ảnh của mỗi tập con đóng tùy ý trong Y là tập con đóng trong X.

d) Tạo ảnh của mỗi tập con mở tùy ý trong Y là tập mở trong X.

e) Tạo ảnh của mỗi phần tử thuộc tiền cơ sở nào đó của tôpô trong Y là tập mở trong không gian tôpô X.

g) Đối với mỗi tập con B bất kì trong Y luôn có $\overline{f^{-1}(B)} \subset f^{-1}(\overline{B})$.

Chứng minh.

■ a) $\Rightarrow$ b). Giả sử $A \subset X$, và f là ánh xạ liên tục. Nếu $f(\overline{A}) \neq \varnothing$. lấy tuỳ ý $y \in f(\overline{A})$, khi đó $\exists x \in \overline{A}$ thoả mãn $f(x) = y$. Giả sử U là lân cận tuỳ ý của $y = f(x)$. Vì f là liên tục, nên tồn tại lân cận V của x sao cho $f(v) \subset U$, do đó $V \subset f^{-1}(U)$.

Vì $x \in \overline{A} \Rightarrow V \cap A \neq \varnothing \Rightarrow f^{-1}(U) \cap A \neq \varnothing$, nghĩa là tồn tại $x' \in f^{-1}(U) \cap A$. Đối với phần tử x' đó ta có $f(x') \in U \cap f(A)$, nghĩa là $U \cap f(A) \neq \varnothing$ (lân cận tùy ý của điểm y luôn có giao khác rỗng với tập f(A)) $\Rightarrow f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$.

■ b) $\Rightarrow$ c). Giả sử B là tập đóng tùy ý trong Y, đặt $A = f^{-1}(B) \subset X$.

Theo giả thiết ta có: $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)} = \overline{f[f^{-1}(B)]} = \overline{B \cap f(X)} \subset \overline{B} \Rightarrow \overline{A} \subset f^{-1}[f(\overline{A})] \subset f^{-1}(B) = A \subset \overline{A}$. Vậy $A = \overline{A} \Rightarrow f^{-1}(B)$ là tập đóng trong X.

■ c) $\Rightarrow$ d). Giả sử B là tập mở tuỳ ý trong Y. Khi đó $Y \setminus B$ là tập đóng trong $Y \Rightarrow tf^{-1}(y \setminus B)$ là tập đóng, nhưng lấy $f^{-1}(Y \setminus B) = X \setminus f^{-1}(B)$ là đóng nên $f^{-1}(B)$ là tập mở trong X.

■ d) $\Rightarrow$ e). Hiển nhiên, vì mỗi phần tử thuộc tiền cơ sở của tôpô trong Y là tập mở trong Y nên tạo ảnh của nó là mở trong X.

■ e) $\Rightarrow$ a). Giả sử ánh xạ f thoả mãn điều kiện (e), với x_0 là điểm bất kì trong X, và U là lân cận tuỳ ý của điểm $f(x_0)$ trong Y. Giả sử $\mathcal{V}$ là một cơ sở của tôpô trên Y, và $\mathcal{M}$ là một tiền cơ sở của tôpô đó.

Theo định lý (2.10), tồn tại $W \in \mathcal{V}$ sao cho $f(x_0) \in W \subset U$, từ định nghĩa tiền cơ sở ta thấy W là giao hữu hạn nào đó của các phần tử trong $\mathscr{M}$, nghĩa là $W = V_1 \cap ... \cap V_k$ ($V_i \in \mathscr{M}$) vì $f^{-1}(W) = f^{-1}(V_1) \cap .... \cap f^{-1}(V_k)$ theo (e) các tập $f^{-1}(V_1)$,..., $f^{-1}(V_k)$ đều là tập mở trong X, nên $f^{-1}(W)$ là tập mở trong X. Đặt $f^{-1}(W) = V$ ta có $x_0 \in f^{-1}(W) = V$. Ta có:

$$f(V) = f(f^{-1}(W)) = W \cap f(X) \subset W \subset U.$$

Theo định nghĩa f là liên tục tại điểm x_0. Do x_0 là điểm bất kỳ trong X nên ánh xạ f là liên tục trên X.

- b) $\Rightarrow$ g). Giả sử $B \subset Y$ tuỳ ý, đặt $A = f^{-1}(B)$. Theo b) ta có:

$$f(\bar{A}) \subset \overline{f(A)} \subset \bar{B} \Rightarrow \bar{A} \subset f^{-1}(\overline{f(A)}) \subset f^{-1}(\bar{B})$$
$$\Rightarrow \overline{f^{-1}(B)} \subset f^{-1}(\bar{B}).$$

- g) $\Rightarrow$ b). Giả sử $A \subset X$ tuỳ ý. Đặt B = trai c Y.

Ta có $\bar{A} \subset \overline{f^{-1}(B)} \subset f^{-1}(\bar{B}) \Rightarrow f(\bar{A}) \subset f(\overline{f^{-1}(B)}) \subset \bar{B} = \overline{f(A)}$. □

Định lý 3.2. Giả sử X, Y, Z là ba không gian tôpô, $f : X \to Y$ và $g : Y \to Z$ là các ánh xạ liên tục. Khi đó ánh xạ $h = g.f : X \to Z$ cũng là ánh xạ liên tục.

Chứng minh.

Giả sử W là một tập mở tuỳ ý trong Z, do g là liên tục nên $g^{-1}(W)$ là một tập mở trong Y. Vì f là liên tục nên:

$$f^{-1}[g^{-1}(W)] = (gf)^{-1}(W) = h^{-1}(W)$$

là tập mở trong X. Vậy h là ánh xạ liên tục. □

Định nghĩa 3.2. *Á*nh xa $f : X \to Y$ từ không gian tôpô X đến không gian tôpô Y được gọi là ánh xạ mở (tương ứng đóng), nếu ảnh của mỗi tập mở (tương ứng đóng) bất kì trong X qua ánh xạ f là tập mở (tương ứng đóng) trong Y.

Định nghĩa 3.3. Ánh xạ $f : X \to Y$ từ không gian tôpô X đến không gian tôpô Y được gọi là phép đồng phôi nếu f là song ánh và f, f^{-1} đều là các ánh xạ liên tục. Hai không gian tôpô X và Y được gọi là đồng phôi nếu tồn tại một phép đồng phôi từ X đến Y.

Ví dụ 3.1

1) Xét tập hợp số thực $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ với tôpô tự nhiên, các hàm liên tục từ $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ là các ánh xạ liên tục.
2) Đối với không gian tôpô $(X, \mathcal{T})$ tuỳ ý, ánh xạ đồng nhất từ X $\to$ X là một phép đồng phôi.
3) Ánh xạ $f : X \to Y$ từ không gian tôpô $(X, \mathcal{T}_x)$ đến không gian tôpô $(Y, \mathcal{T}_y)$ cho mọi phần tử $x \in X$ ứng với một phần tử cố định nào đó trong Y là liên tục (gọi là ánh xạ hằng).
4) ánh xạ từ một không gian tôpô rời rạc đến không gian tôpô tuỳ ý là liên tục.
5) ánh xạ từ không gian tôpô tuỳ ý tới không gian tôpô rời rạc là ánh xạ mở, nhưng chưa chắc liên tục.
6) Tồn tại những ánh xạ là song ánh, liên tục nhưng chưa chắc là phép đồng phôi. Thật vậy giả sử $(X, \mathcal{T})$ là không gian tôpô rời rạc, $(X, \mathcal{U})$ là không gian tôpô thô. Khi đó ánh xạ đồng nhất $id_x : (X, \mathcal{T}) \to (X, \mathcal{U})$ là song ánh, liên tục nhưng không là phép đồng phôi.
7) Ánh xạ $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (với tổng tự nhiên) là liên tục khi và chỉ khi $\forall \varepsilon > 0$, tồn tại $\delta > 0$, sao cho $\forall x \in \mathbb{R}$ thoả mãn $|x - x_0| < \delta$ thì: $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Thật vậy, giả sử ánh xạ f là liên tục tại điểm x_0, $\varepsilon > 0$ tuỳ ý. Khi đó ta có khoảng $I = (f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon)$ là một lân cận của điểm $f(x_0)$. Vì f liên tục nên tồn tại một lân cận V của x_0 sao cho $f(V) \subset I$. Vì cơ sở của tôpô tự nhiên là những khoảng mở, nên tồn tại một khoảng mở $J \subset V$ chứa x_0. Khi đó tồn tại $\delta > 0$ thỏa mãn $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset J$. Như vậy tồn tại δ xác định sao cho $\forall x \in \mathbb{R}$ thỏa mãn $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ thì $f(x) \in I$, nghĩa là $|X - x_0 < \delta\ |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Ngược lại, giả sử ánh xạ f thoả mãn điều kiện đã đưa ra ở trên.

Với U là lân cận tuỳ ý của điểm $f(x_0)$ khi đó có một khoảng mở $I \subset U$ sao cho $f(x_0) \in I$. Ta có thể giả thiết rằng: $I = (f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon)$, Với $\varepsilon > 0$ xác định. Theo giả thiết ta tìm được số $\delta > 0$ xác định để từ điều kiện $|x - x_0| < \delta$ sẽ kéo theo $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$. Đặt $J = (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. Ta có J là lân cận của X_0 thoả man $f(J) \subset I \subset U$. Do U lấy tuỳ ý nên ta có f là liên tục.

8) Sau đây là một vài ví dụ về ánh xạ không liên tục.

a) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ được xác định bởi:

$$f(x)= \begin{cases} 0 & \text{khi } x \le 0 \\ 1 & \text{khi } x > 0 \end{cases}$$

là hàm liên tục tại mọi điểm $x \neq 0$, nhưng không liên tục tại điểm $X_0 = 0$.

b) Hàm Đirichlê $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ xác định bởi:

$$f(x) = \begin{cases} 1 \text{ khi } x \in \mathbb{Q} \\ 0 \text{ khi } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

là hàm không liên tục tại $\forall x \in \mathbb{R}$.

Thực vậy giả sử $x_0 \in \mathbb{Q}$ tuỳ ý ta có $f(x_0) = 1$. Chọn một lân cận của $1 = f(x_0)$ là $U = (l/2,3/2)$. Khi đó với một lân cận V bất kì của x_0 ta có $V \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \neq \emptyset \Rightarrow f(V) \not\subset U$, Vì luôn Có $x \in V$: $f(x) = 0$. Như vậy f không liên tục tại mọi điểm của $\mathbb{Q}$. Chứng minh tương tự ta có tại mọi $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, f cũng không liên tục.

Ta có thể dễ dàng chứng minh kết quả sau:

Định lý 3.3.

a) Để ánh xạ $f : X \to Y$ là ánh xạ mở thì điều kiện cần và đủ là ảnh f(U) của phần tử U tuỳ ý trong cơ sở $\mathcal{V}$ nào đó của tôpô trên X là mở trong Y.

b) Hợp thành của hai ánh xạ mở là ánh xạ mở.

c) Song ánh $f : X \to Y$ là một phép đồng phôi khi và chỉ khi f là ánh xạ hen tục và mở. □

§2. SO SÁNH HAI TÔPÔ

Định nghĩa 3.4. Cho hai tôpô $\mathcal{T}_1$, $\mathcal{T}_2$ trên cùng một tập hợp X, ta nói rằng $\mathcal{T}_1$ là mịn hơn $\mathcal{T}_2$ (hoặc $\mathcal{T}_2$ thô hơn $\mathcal{T}_1$, $\mathcal{T}_1$ mạnh hơn $\mathcal{T}_2$ hay $\mathcal{T}_2$ yếu hơn $\mathcal{T}_1$) nếu $\mathcal{T}_2 \subset \mathcal{T}_1$. Ta nói rằng hai tôpô $\mathcal{T}_1$, $\mathcal{T}_2$ trên X là so sánh được nếu $\mathcal{T}_2 \subset \mathcal{T}_1$, hoặc $\mathcal{T}_1 \subset \mathcal{T}_2$. Trong trường hợp không có quan hệ trên ta nói rằng $\mathcal{T}_1$ và $\mathcal{T}_2$ là không so sánh được.

Ví dụ 3.2

1) Trên tập số thực $\mathbb{R}$ ta kí hiệu :

$\mathcal{T}_T$= Tôpô thô,

$\mathcal{T}_D$ = Tôpô rời rạc,

$\mathcal{T}_K$ = Tôpô tạo bởi phần bù của các tập hữu hạn,

$\mathcal{T}_S$ = Tôpô có cơ sở là họ v = {[a, b] | a, b ∈ ℝ} (bài tập ch2. 16),

$\mathcal{T}$ = là Tôpô tự nhiên.

Khi đó ta có dãy bao hàm sau : $\mathcal{T}_T \subset \mathcal{T}_K \subset \mathcal{T} \subset \mathcal{T}_S \subset \mathcal{T}_D$
Trên tập *X* tuỳ ý với A và B là 2 tập con thực sự, khác nhau của X, các tôpô $\mathcal{T}_1 = \{X, \emptyset, A\}$, $\mathcal{T}_2 = \{X, \emptyset, B\}$ là không so sánh được

Định lý3.4. Giả sử $\mathcal{T}_1$ và $\mathcal{T}_2$ là 2 tôpô trên X. Khi đó các điều kiện sau là tương đương:

a) $\mathcal{T}_1$ là mạnh hơn $\mathcal{T}_2$.

b) Ánh xạ đồng nhất $id_x : (X, \mathcal{T}_1) \to (X, \mathcal{T}_2)$ là liên tục.

c) Mọi phần tử thuộc tiền cơ sở của $\mathcal{T}_2$ cũng là phần tử của $\mathcal{T}_1$
Chứng minh.

■ a) ⇒ b). Hiển nhiên nếu U ∈ $\mathcal{T}_2$ ta có $id_X^{-1}(U) = U \in \mathcal{T}_2 \subset \mathcal{T}_1$, vậy ánh xạ id_x là liên tục.

■ b) ⇒ c). Áp dụng định lý (2.l), tạo ảnh của mọi phần tử thuộc tiền cơ sở của $\mathcal{T}_2$ là phần tử của $\mathcal{T}_1$. Vậy mọi phần tử thuộc tiền cơ sở của $\mathcal{T}_2$ cũng là phần tử của $\mathcal{T}_1$.

■ c) ⇒ a) Áp dụng định lý (2.l), ánh xạ id_x là liên tục. Suy ra với bất kỳ U ∈ $\mathcal{T}_2$ ta có $id_X^{-1}(U) = U \in \mathcal{T}_1$, vậy $\mathcal{T}_2 \subset \mathcal{T}_1$. □

Ta dễ dàng chứng minh các khẳng định sau:

Định lý 3. 5

a) Cho ánh xạ f : X → Y , trong đó X là không gian tôpô, Y là tập hợp trên đó đã xác định hai tôpô $\mathcal{B}_1$ và $\mathcal{B}_2$ thỏa mãn: $\mathcal{B}_1 \subset \mathcal{B}_2$ Khi đó nếu ánh xạ f liên tục đối với tôpô $\mathcal{B}_2$ thì cũng liên tục đối với $\mathcal{B}_1$.

b) Cho ánh xạ f : X $\rightarrow$ Y , trong đó Y là không gian tôpô, X là tập hợp tuỳ ý. Giả sử $\mathcal{T}_1$, $\mathcal{T}_2$ là hai tôpô xác định trên X thoả mãn $\mathcal{T}_1 \subset \mathcal{T}_2$. Khi đó nếu đối với $\mathcal{T}_1$ ánh xạ f liên tục thì đối với $\mathcal{T}_2$ ánh xạ f cũng liên tục. □

§3. TÔPÔ XÁC ĐỊNH BỞI MỘT HỌ ÁNH XẠ

Định lý 3.6. Giả sử X là một tập hợp, $\{(Y_i,\mathcal{B}_i)\}_{i\in I}$ là một họ những không gian tôpô. Giả thiết rằng với mỗi i $\in$ I đã cho một ánh xạ $f_i : X \rightarrow Y_i$. Khi đó trong số các tôpô xác định trên X sao cho tất cả các ánh xạ f_i đều liên tục sẽ tồn tại một tôpô $\mathcal{T}$ yếu nhất , và $\mathcal{T}$ có một tiền cơ sở là họ $\mathcal{M}$ tất cả các tập con của tập hợp X có dạng $f^{-1}(U_i)$ (trong đó i $\in$ I và U_i là tập mở nào đó trong không gian Y_i). $\mathcal{T}$ được gọi là tôpô đầu xác định bởi họ ánh xạ $\{f_i\}_{I\in I}$.

Chứng minh.

Dễ dàng thấy rằng họ $\mathcal{M} = \{\, f_i^{-1}(U_i) | i\in I,\ U_i \in \mathcal{B}_i\}$ là một phủ của X nên theo định lý (1.11) tồn tại một tôpô ? trên X nhận $\mathcal{M}$ là tiền cơ sở với mỗi i $\in$ I, và một tập mở tuỳ ý U $\in$ Y_i ta có f_i^{-1} (U) là phần tử của $\mathcal{M} \in \mathcal{T}$. Do đó $f_i^{-1}(U)$ là tập $\mathcal{T}$ - mở trong X. Như vậy đến với $\mathcal{T}$ ta có ánh xạ f_i là liên tục đối với mọi i $\in$ I. Ta có $\mathcal{T}'$ là tôpô yếu nhất trong các tôpô trên X sao cho mỗi f_i đều liên tục. Thật vậy, giả sử V $\subset$ X là một tôpô trên X sao cho tất cả f_i đều liên tục với mọi i $\in$ I. Giả sử V $\subset$ X thoả mãn V $\in$

$\mathcal{T}$, khi đó V là hợp của một họ nào đó các giao hữu hạn có thể của các phần tử thuộc $\mathcal{M}$. Do tính liên tục của f_i đối với tôpô $\mathcal{T}'$ ($i \in I$) ta suy ra rằng mỗi phần tử của $\mathcal{M}$ là tập mở đối với tôpô $\mathcal{T}'$. Do vậy mọi giao hữu hạn có thể của các phần tử thuộc $\mathcal{M}$ là tập mở đối với $\mathcal{T}'$. Suy ra $V \in \mathcal{T}$. Vậy $\mathcal{T} \in \mathcal{T}'$ .Ta có điều phải chứng minh. □

Định lý 3.7 Giả sử $\{f_i\}_{i\in I}$ là một họ ánh xạ $f_i : X \to Y$; từ tập hợp X vào các không gian tôpô (Y_i, $\mathcal{B}_i$), $\mathcal{T}$ là tôpô đầu trên X xác định bởi họ ánh xạ $\{f_i\}_{i\in I}$, $g : Z \to X$ là ánh xạ từ không gian tôpô (Z, $\mathcal{D}$) vào không gian (X, $\mathcal{T}$). Khi đó g là ánh xạ liên tục nếu và chỉ nếu, với mỗi $I \in I$, ánh xạ $f_i g : Z \to Y_i$ là liên tục.

Chứng minh.

Hiển nhiên nếu g liên tục thì mỗi $f_i g$ là liên tục vì nó là tích của hai ánh xạ liên tục. Giả sử với mỗi $i \in I$, ánh xạ $f_i g : Z \to Y_i$; là liên tục và $V = f_i^{-1}(U_i)$ (trong đó $i \in I$ và U_i là tập hợp mở nào đó trong không gian Y_i) là một phần tử tuỳ ý thuộc tiền cơ sở $\mathcal{M}$ của tôpô. Ta có $g^{-1}(V) = g^{-1}[f_i^{-1}(U_i)] = (f_i g)^{-1}(U_i)$. Vì $f_i g$ liên tục nên $(f_i g)^{-1}(U_i)$ là tập mở trong Z. Do đó $g^{-1}(V) \in \mathcal{D}$. Vậy g là ánh xạ liên tục. □

Nhận xét.

Giả sử $\{(X_s, \mathcal{T}_s\}_{s\in S}$ là một họ không gian tôpô, (Y là một không gian tôpô, $\{f_s\}_{s\in S}$ là một họ ánh xạ $f_s : X_s \to Y$ liên tục. Hiển nhiên nếu thay $\mathcal{B}$ bằng một tôpô $\mathcal{B}'$ trên Y yếu hơn $\mathcal{B}$ thì mỗi ánh xạ f_s của họ nói trên vẫn liên tục. Nhưng nói ta thay $\mathcal{B}$ bằng một tôpô $\mathcal{B}''$ mạnh hơn thì tính liên tục của ánh xạ f_s có thể không được bảo toàn. Bây giờ giả sử $\{f_s\}_{s\in S}$ là một họ ánh xạ $f_s : X_s \to Y$ từ không gian tôpô X_s vào tập hợp Y. Định lý dưới đây chỉ ra rằng trong tất cả các tôpô xác định trên Y, sao cho mọi ánh xạ của họ $\{f_s\}_{s\in S}$ đều liên tục, tồn tại một tôpô mạnh nhất.

Định lý 3.8. Giả sử $\{(X_s, \mathcal{T}_s\}_{s\in S}$ là một họ không gian tôpô, Y là một tập hợp , $\{f_s\}_{s\in S}$ là một họ ánh xạ $f_s : X_s \to Y$. Khi đó trong tất cả các tôpô xác định trên Y, sao cho tất cả các ánh xạ f_s đều liên tục, tồn tại một tôpô $\mathcal{B}$ mạnh nhất, thoả mãn mỗi tập con V của Y là phần tử của $\mathcal{B}$ khi và chỉ khi, với mỗi $s \in S$, luôn có $f_i^{-1}(V) \in \mathcal{T}_s$, $\mathcal{B}$ gọi là tôpô cuối xác định bởi họ ánh xạ 1 $\{f_s\}_{s\in S}$.

Chứng minh.

Dễ thấy rằng $\mathcal{B}$ xác định như trên là một tôpô trên Y. Ta sẽ chứng minh $\mathcal{B}$ là tôpô mạnh nhất trong tất cả các tôpô xác định trên Y sao cho tất cả các ánh xạ f_s đều liên tục. Thật vậy, giả sử $\mathcal{B}'$ là một tôpô trên Y sao cho mọi f_s đều liên tục với mọi $s \in S$, và $U \in \mathcal{B}'$. Khi đó $f_s^{-1}(U) \in \mathcal{T}_s$ với mọi $s \in S$. Do đó $U \in \mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{B}' \subset \mathcal{B}$. □

Định lý 3.9. Giả sử $\{f_s : X_s \to Y\}_{s\in S}$ là một họ ánh xạ từ các không gian tôpô $(X_s, \mathcal{T}_s)$ vào tập hợp Y, $\mathcal{B}$ là tôpô cuối trong Y xác định bởi họ ánh xạ $\{f_s\}_{s\in S}$, $h : Y \to Z$ là ánh xạ từ không gian tôpô $(Y, \mathcal{B})$ vào không gian tôpô $(Z, \mathcal{D})$. Khi đó h liên tục nếu và chỉ nếu, với mỗi $s \in S$, ánh xạ họ : $X \to Z$ là liên tục.

Chứng minh.

Hiển nhiên nếu g liên tục thì họ liên tục với mọi $s \in S$. Giả sử ánh xạ hợp hf_s liên tục với mọi $s \in S$ và $W \in \mathcal{D}$ tuỳ ý. Khi đó: $(hf_s)^{-1}(W) = f_s^{-1}[h^{-1}(W)] \in \mathcal{T}_s$ Với mọi $s \in S$. Do đó $h^{-1}(W)$ là một tập hợp mở trong Y đối với tôpô $\mathcal{B}$ Vậy h là ánh xạ liên tục. □

§4. CÁC TIÊN ĐỀ TÁCH

Định nghĩa 3.5 Không gian tôpô (X, $\mathcal{T}$) được gọi là T_0-không gian nếu với hai điểm khác nhau bất kì x, y $\in$ X tồn tại ít nhất một điểm có lân cận không chứa điểm kia.

Định lý 3.10. Không gian tôpô (X, $\mathcal{T}$) là T_0 - không gian nếu và chỉ nếu đối với hai điểm khác nhau tuỳ ý x, y $\in$ X ta có hoặc $x \neq \overline{\{y\}}$ hoặc $y \neq \overline{\{x\}}$

Chứng minh.

Giả sử X là T_0-không gian. Khi đó với $x \neq y$ tùy ý trong X, nếu tồn tại lân cận mở U_x thoả mãn $y \notin U_x$, thì vì $y \in X \setminus Ux$ là tập đóng nên $\overline{\{y\}} \subset X \setminus U_x$ Do đó $x \notin \overline{\{y\}}$. Nếu tồn tại lân cận mở U_y thoả mãn $x \notin U_y$, thì tương tự ta có $y \notin \overline{\{x\}}$. Ngược lại, giả sử $x \notin \overline{\{y\}}$ hoặc $y \notin \overline{\{x\}}$ Khi đó $X \setminus \overline{\{y\}}$ là lân cận của x không chứa y hoặc $X \setminus \overline{\{x\}}$ là lân cận của y không chứa x. vì vày X là T_0-không gian. □

Định nghĩa 3.6. Không gian tôpô (X, $\mathcal{T}$) được gọi là T_1-không gian nếu với hai điểm khác nhau bất kỳ x, y $\in$ X luôn tồn tại các lân cận U_x của x và V_y của y sao cho $y \notin U_x$ và $x \notin U_y$

Định lý 3.11. Không gian tôpô (X, $\mathcal{T}$) là T_1-không gian nếu và chỉ nếu với mỗi x $\in$ X tập {x} là tập đóng.

Chứng minh.

Giả sử X là T_1 - không gian. với $x \in X$ ta có tập $X\setminus \{x\}$ là tập mở. Thật vậy, lấy bất kỳ $y \in X \setminus \{x\}$ theo định nghĩa tồn tại lân cán và của y thoả mãn $x \notin V_y$. suy ra $y \in V_y \subset X \setminus \{x\}$, nên y là điểm trong của X \ {x }. Như vậy mọi điểm thuộc X \ {x} đều là điểm trong của nó. Vậy X \ {x} là tập mở. Do đó {x} là tập đóng.

Ngược lại, giả sử với mọi $x \in X$ luôn có {x} là tập đóng trong X. Giả sử x,y là hai phần tử khác nhau tuỳ ý thuộc X, tập $V = X \setminus \{x\}$ là mở và nó là lân cận của y không chứa x. Tương tự tập $U = X \setminus \{y\}$ tập là tập mở và nó là lân cận của x không chứa y. Vậy X là T_1-không gian. □

Định nghĩa 3.7 Không gian tôpô (X, $\mathcal{T}$) được gọi là T_2-không gian nếu với hai điểm khác nhau bất kỳ $x,y \in X$ luôn tồn tại các lân cận U_x của x và V_y của y sao cho $U_x \cap V_y = \varnothing$

Địnhnghĩa 3.8. Không gian tôpô (X, $\mathcal{T}$) được gọi là T_3-không gian (hoặc không gian chính quy) nếu X là T_1-không gian và với mọi $x \in X$, với mọi tập đóng $F \subset X$ thoả mãn $x \notin F$, luôn tồn tại các lan cận mở U_x của x và V của F sao cho $U_x \cap V = \varnothing$.

Định lý 3.12. T_1-không gian (X, $\mathcal{T}$) là T_1-không gian nếu và chỉ nếu với mọi $x \in X$ và với mọi lân cận mở V của x luôn tồn tại lân cận U của x sao cho $x \in U \subset \overline{U} \subset V$.

Chứng minh.

■ Giả sử X là T_1-không gian, $x \in X$ và V là một lân cận mở nào đó của x. Khi đó tập $E = X \setminus V$ là tập đóng trong X thoả mãn $x \notin F$, theo định nghĩa, tồn tại các lân cận mở U của x và W của F sao cho $U \cap W = \varnothing$ nghĩa là $U \subset X \setminus W$. Vì $X \setminus W$ là tập đóng nên $U \subset X \setminus W \subset X \setminus F = V$.

■ Giả sử (X, $\mathcal{T}$) là T_1-không gian thoả mãn điều kiện với mọi $x \in X$ và với mọi lân cận mở V của x luôn tồn tại lân cận U của x sao cho $x \in U \subset \overline{U} \subset V$. Lấy tùy ý $x \in X$ và giả sử $F \subset X$ là một tập đóng sao cho $x \notin F$. Theo giả thiết, vì $X \setminus F$ là lân cận mở của x, nên tồn tại lân cận U của x sao cho $x \in U \subset \overline{U} \subset X \setminus F$. Rõ ràng $V = X \setminus \overline{U}$ là lân cận mở của F thoả mãn $U \cap V = \varnothing$ □

Định nghĩa 3.9. Không gian tôpô $(X, \mathcal{T})$ được gọi là $T_{3\frac{1}{2}}$-không gian (hoặc không gian hoàn toàn chính quy) nếu X là T_1-không gian và với mọi $x \in X$, với mọi tập đóng $F \subset X$ không chứa x, luôn tồn tại hàm liên tục $f : X \to [0, 1]$ thoả mãn $f(x) = 0$ với mọi $f(y) = 1$ với mọi $y \in F$.

Định nghĩa 3.10 Không gian tôpô $(X, \mathcal{T})$ được gọi là T_4-không gian (hoặc không gian chuẩn tắc), nếu X là T_1 -không gian và với hai tập đóng rời nhau bất kỳ $A, B \subset X$ luôn tồn tại các lân cận mở U của A và V của B sao cho $U \cap V = \varnothing$.

Ví dụ 3.3

a) Không gian tôpô $(X, \mathcal{T}_D)$ với $\mathcal{T}_D$ là tôpô rời rạc là T_0-không gian, T_1 -không gian, là không gian Hausdorff, không gian chính quy hoàn toàn chính quy, chuẩn tắc.

công gian tôpô $(X, \mathcal{T}_T)$ khi X có nhiều hơn một phần tử không phải là T_0-không gian vì mọi x thuộc X chỉ có duy nhất một lân cận là X.

b) Không gian tôpô $(X, \mathcal{T})$ với $X = \{ a, b \}$, $\mathcal{T} = \{\varnothing, X, \{a\}\}$ là T_0 không gian nhưng không là T_1-không gian.

c) Không gian tôpô $(X, \mathcal{T}_k)$ với X là vô hạn, là T_1-không gian vì mọi tập một điểm là tập đóng, nhưng không là T_2-không gian vì hai tập mở khác rỗng tuỳ ý trong không gian tôpô $(X, \mathcal{T}_K)$ luôn có giao khác rỗng.

d) Trên tập các số thực $\mathbb{R}$, ký hiệu Y = { $\frac{1}{k}$ { $k \neq 0$, $k \in \mathbb{Z}$ }.

với mỗi $x \in \mathbb{R}$, $i \in \mathbb{N}^*$ ký hiệu $O_i(x) = (x - \frac{1}{i}, x + \frac{1}{i})$.

Gọi : $\mathscr{B}(x) = \{O_i(x) \mid i \in \mathbb{N}^*\}$ nếu $x \neq 0$,

$\mathscr{B}(x) = \{O_i(x) \setminus Y \mid i \in \mathbb{N}^*\}$ nếu $x = 0$.

Ta nhận thấy họ $\{\mathscr{B}(x)\}_{x \in \mathbb{R}}$ thoả mãn các điều kiện trong định lý (2.11), do đó trên $\mathbb{R}$ có một tôpô $\mathscr{M}$ trên $\mathbb{R}$ nhận họ $\{\mathscr{B}(x)\}_{x \in \mathbb{R}}$ $\mathbb{R}$ làm cơ sở. Rõ ràng với hai điểm tuỳ ý $x \neq y$ trong $\mathbb{R}$ có thể chọn được m và n đủ lớn để $O_m(x) \subset O_n(y) = \varnothing$. vì vậy $(\mathbb{R}, \mathscr{M})$ là T_2-không gian.

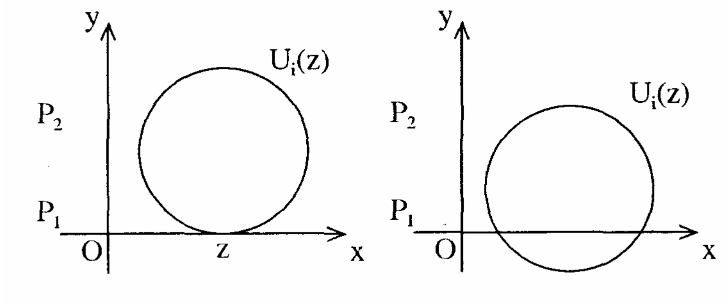
Mặt khác, ta có Y là một tập đóng trong $(\mathbb{R}, \mathscr{M})$ không chứa điểm 0. Với U là lân cận bất kỳ của điểm 0, và V là lân cận bất kỳ của Y ta luôn có $U \cap V \neq \varnothing$. Điều đó chứng tỏ $(\mathbb{R}, \mathscr{M})$ không phải là T_3-không gian.

d) Nếu $(X, \mathscr{T})$ là không gian hoàn toàn chính quy thì $(X, \mathscr{T})$ là T_3-không gian. Thật vậy trong X ta xét các tập $U = f^{-1}([0, 1/2))$, và $V = f^{-1}((1/2,1])$, do đó f là ánh xạ liên tục và các tập [0, 1/2), (1/2 , 1] là tập mở trong không gian tôpô [0, 1] nên ta có U và V là mở trong X thoả mãn $x \in U$, $F \subset V$ và $U \cap V = \varnothing$.

Tồn tại những không gian tôpô là T_3 - không gian nhưng không là không gian tôpô hoàn toàn chính quy. Nhưng do việc xây dựng những không gian đó khá phức tạp nên ta không đưa ra ở đây.

Nếu $(X, \mathscr{T})$ là T_4 không gian thì $(X, \mathscr{T})$ là T_3-không gian (hiển nhiên). Từ bổ đề Urison dưới đây ta sẽ chứng minh được rằng mỗi T_4-không gian là một không gian hoàn toàn chính quy. Ta cũng sẽ đưa ra một phản ví dụ để chứng tỏ rằng tồn tại những không gian tôpô hoàn toàn chính quy nhưng không là không gian chuẩn tắc.

g) Trong mặt phẳng tọa độ Oxy ký hiệu $P = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq 0\}$ là tập hợp các điểm nằm ở nửa phía trên trục hoành, $P_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 0\}$; $P_2 = P \setminus P_1$. Với mỗi $z \in P_1$ và $r > 0$, gọi $U(z, r)$ là tập tất cả các điểm của P_2 nằm trong hình tròn bán kính r tiếp xúc với P_1 tại z. Đặt $U_i(z) = U(z, 1/i) \cup \{ z \}$, ($i = 1, 2,...$) (H.1). Với mỗi $z \in P_2$) và $r > 0$, gọi $U(z, r)$ là tập tất cả các điểm của P nằm trong hình tròn tâm z bán kính r. Đặt $U_i(z) = U(z, 1/i)$, ($i = 1, 2,...$) (H.2).



H.1 H.2

Họ $\{U_i(z)\}_{z \in P,\, i \in N}$ thỏa mãn các điều kiện của định lý (2.11), nên nó là cơ sở của tôpô $\mathcal{T}$ xác định trên P. Ta có thể chứng minh được $(P, \mathcal{T})$ là không gian tôpô hoàn toàn chính quy nhưng không là không gian chuẩn tắc.

Đính lý 3.13. (bổ đề Urison). Với hai tập đóng rời nhau bất kỳ A, B trong không gian chuẩn tắc $(X, \mathcal{T})$ luôn tồn tại hàm liên tục $f : X \to I$ sao cho $f(x) = 0, \forall x \in A$ và $f(y) = 1, \forall y \in B$.

Chứng minh.

Trước hết ta chứng minh bằng phương pháp quy nạp rằng: với mỗi số hữu tỷ $r \in [0, 1]$ ta có thể chọn được tập mở V_r thoả mãn các điều kiện sau:

$A \subset V_0$, $V_1 = X \setminus B$ và nếu $r < r'$ thì $\overline{V_r} \subset V_{r'}$ (*)

Thật vậy vì tập các số hữu tỷ $\mathbb{Q}$ có lực lượng đếm được nên ta có thể sắp xếp các số hữu tỷ trong đoạn [0, 1] thành một dãy $\{r_i\}_{i \in \mathbb{N}^*}$ trong đó $r_1 = 0$, $r_2 = 1$.

Do A, B là hai tập đóng rời nhau trong $(X, \mathcal{T})$ nên theo giả thiết tồn tại các lân cận mở U của A và V của B sao cho $U \cap V = \emptyset$. Đặt $V_0 = U$, $V_1 = X \setminus B$. Khi đó do $V_0 \subset X \setminus V$, vì $X \setminus V$ là tập đóng nên $\overline{V_0} \subset X \setminus V \subset V_1$.

Như vậy ta được $\overline{V_{ri}} \subset V_{ij}$ nếu $r_i < r_j$ (với $i, j \leq 2$).

Giả sử với mọi $i \leq n$ ta đã xác định được một tập mở V_{ri} thoả mãn điều kiện $\overline{V_{ri}} \subset V_{rj}$ nếu $r_i < r_j$ (**), Trong tập $\{ r_1, r_2 \ldots . r_n, r_{n+1}\}$ gọi r_1 là số lớn nhất trong các số $r_1, r_2 \ldots . r_n$, nhỏ hơn r_{n+1}, và r_p là số nhỏ nhất trong các số $r_1, r_2 \ldots . r_n$ lơn hơn r_{n+1}. Khi đó theo giả thiết quy nạp vì $r_t < r_p$ nên ta có $\overline{V_{rt}} \subset V_{rp}$. Hơn nữa vì $\overline{V_{rt}}$ và tập $X \setminus V_{rp}$ là hai tập hợp đóng rời nhau và $(X, \mathcal{T})$ là không gian chuẩn tắc, nên tồn tại các tập mở U' và V' là lân cận của các tập $\overline{V_{rt}}$ và $X \setminus V_{rp}$ thoả mãn $U' \cap V' = \emptyset$. Đặt $V_{r_{n+1}} = U'$ ích; đó $V_{r_{n+1}} \subset X \setminus V'$. Do $X \setminus V'$ là tập đóng nên $\overline{V_{r_{n+1}}} \subset X \setminus V' \subset V_{r_p}$. Như vậy ta đã xây dựng được các tập mở $V_{\eta}, \ldots\ldots, V_{r_{n+1}}$ thoả mãn điều kiện (**).

Gọi $f : X \to I = [0, 1]$ là hàm xác định bởi $f(x) = 1$ nếu $x \in B$,

$f(x) = \inf_{r \in V_r} \{r\}$ nếu $x \in V_1 = X \setminus B$.

Khi đó ta có f(x) = 0 với mọi $x \in A$ và f(y) = 1 với mọi $y \in B$. Mặt khác do họ $\mathcal{V}$ các tập có dạng [0, a), (b, 1] , (c. d) ($0 < a \leq 1$, $0 \leq b < 1$, $0 \leq c < d \leq 1$) là cơ sở của tôpô trên I = [0, 1] , mà (c d) = [0, d) d) $\cap$ (c, 1] nên để chứng minh ánh xạ f là liên tục ta chỉ cần chứng minh tạo ảnh của các tập có dạng [0, a) và (b,1] là tập mở trong X. Với $x \in X$ ta thấy f(x) < $\Leftrightarrow \exists r_j < a$ sao cho $x \in Vr_j$. Vì vậy $f^{-1}([0, a)) = \{x \in X : f(x) < a\} = \bigcup_{r_j < a} V_{r_j}$ là một tập mở.

Tương tự với $y \in X$, ta có $f(y) > b \Leftrightarrow \exists r_i > b$ sao cho $y \notin V_{rj}$ $\Leftrightarrow \exists r_i > b$ sao cho $y \notin \overline{V_{ri}}$. Vì vậy $f^{-1}((b,1]) = \bigcup_{r_i > b} (X \setminus \overline{V_{r_i}})$ cũng là tập mở. Do đó f là ánh xạ liên tục. □

Định lý 3.14. Không gian chính quy X có một cơ sở đếm được là không gian chuẩn tắc.

Chứng minh.

Giả sử A, B là hai tập con đóng bất kỳ trong X thỏa mãn $A \cap B = \varnothing$, và $\{U_n\}_{u \in N}$ là một cơ sở đếm được trong X. Vì X là chính quy nên với mỗi $x \in A$ tồn tại $V \in \{U_n\}_{u \in N}$ sao cho $x \in V \subset \overline{V} \subset X \setminus B$ (theo định lý 3.12). Cho x chạy khắp trong A ta nhận được $\{V_k\}_{k \in N}$ là họ con của họ $\{U_u\}_{u \in N}$ thỏa mãn $\overline{V}_k \subset X \setminus B$ ($\forall k$), và $\bigcup_{k=1}^{\infty} V_k \supset A$

Một cách tương tự ta cũng chỉ ra được một họ con $\{W_k\}_{k \in N}$ của họ $\{U_u\}_{u \in N}$ thỏa mãn $\overline{W}_k \subset X \setminus A$ ($\forall k$), và $\bigcup_{k=1}^{\infty} W_k \supset B$.

Đặt:

$$P_1 = V_1, Q_1 = W_1 \setminus \overline{P}_1, P_2 = V_2 \setminus \overline{Q}_1, Q_2 = W_2 \setminus (\overline{P}_1 \cup \overline{P}_2)$$

$$\ldots$$

$$P_k = V_k \setminus \bigcup_{i=1}^{k-1} \overline{Q}_i, Q_k = W_k \setminus \bigcup_{i=1}^{k} \overline{P}_i, \ldots$$

$$P = \bigcup_{i=1}^{\infty} P_i, Q = \bigcup_{i=1}^{\infty} Q_i.$$

Khi đó P và Q là hai tập mở không có điểm chung, thỏa mãn $A \subset P$ và $B \subset Q$. Thật vậy, vì P_k Và Q_k đều là những tập mở trong X ($\forall k$) nên P và Q là những tập mở trong X. Hơn nữa với mọi $k, t \in N$ ta đều có $P_k \cap Q_t = \varnothing$. Vì nếu $k \le t$ thì

$Q_t = W_t \setminus \bigcup_{i=1}^{t} \overline{P}_i \subset W_t \setminus \overline{P}_k \Rightarrow$ $P_k \cap Q_t = \varnothing$ và nếu $t < k$ thì

$$P_k = V_k \setminus \bigcup_{i=1}^{k-1} \overline{Q}_i \subset V_k \setminus \overline{Q}_t \Rightarrow P_k \cap Q_t = \emptyset.$$

Từ đó suy ra $P \cap Q = \varnothing$.

Do $\bigcup_{k=1}^{\infty} V_k \supset A$.. Nên nếu $x \in A$ thì $\exists n_o \in \mathbb{N}$ để $x \in V_{n0.}$

$$\text{Do } \overline{W}_k \subset X \setminus A\ (\forall k) \Rightarrow x \notin \overline{W}_k\ (\forall k) \Rightarrow x \notin \overline{Q}_k, (\forall k)$$

$$\Rightarrow x \in V_{n_0} \setminus \bigcup_{i=1}^{n_0-1} \overline{Q}_i = P_{n_0} \text{ và vì vậy } x \in \bigcup_{k=1}^{\infty} P_k = P \Rightarrow A \subset P.$$

Chứng minh tương tự ta có $B \subset Q$. Vậy X là không gian chuẩn tắc. □

§5, KHÔNG GIAN CON CỦA MỘT KHÔNG GIAN TÔPÔ

Ta sẽ nghiên cứu và xây dựng tôpô bằng phương pháp tự nhiên trên các tập con của các không gian tôpô.

Định nghĩa 3.11 Cho không gian tôpô $(X, \mathcal{T})$ $A \subset X$. Khi đó trên A có thể xác định một tôpô $\mathcal{T}_A$ như sau: $\mathcal{T}_A$ là họ tất cả các giao của các phần tử của $\mathcal{T}$ với tập A($\mathcal{T}_A = \{A \cap U \mid U \in \mathcal{T}\}$).$\mathcal{T}_A$ được gọi là tôpô cảm sinh bởi tôpô $\mathcal{T}$ trên A. Cặp $(A, \mathcal{T}_A)$ được gọi là không gian tôpô con của không gian tôpô $(X, \mathcal{T})$.

Các phần tử của $\mathcal{T}_A$ được gọi là các tập mở trong A. Phần bù của chúng trong A được gọi là các tập đóng trong A (gọi tắt là $\mathcal{T}_A$- mở, $\mathcal{T}_A$ - đóng). Rõ ràng tập A đồng thời là tập đóng và là tập mở trong chính nó, mặc dù nó có thể không mở, không đóng trong X.

Định lý 3.15 Cho không gian tôpô $(X, \mathcal{T})$ và $(A, \mathcal{T}_A)$ là không gian con. Khi đó tôpô cảm sinh $\mathcal{T}_A$ là tập tất cả các tạo ảnh của các phần tử của $\mathcal{T}$ qua phép nhúng chính tắc $i : A \to X$, $(i(x) = x)$.

Chứng minh.

Giả sử $U \in \mathcal{T}_A$ tuỳ ý, khi đó theo định nghĩa tồn tại $W \in \mathcal{T}$ sao cho $U = W \cap A$. Rõ ràng $U = i^{-1}(W)$ (là tạo ảnh của W qua ánh xạ i).

Một câu hỏi được đặt ra là: nếu $(A, \mathcal{T}_A)$ là không gian con của không gian tôpô $(X, \mathcal{T})$, và $(B, \mathcal{B})$ là không gian con của không gian $(A, \mathcal{T}_A)$ thì $(B, \mathcal{B})$ có là không gian con của $(X, \mathcal{T})$ hay không? Câu trả lời là có và tính bắc cầu này được minh hoạ nhờ định lý sau đây □

Định lý 3.16. Giả sử (A, $\mathcal{T}_A$) là không gian con của không gian tôpô (X, $\mathcal{T}$) B ⊂ A. Khi đó tôpô $\mathcal{B}$ trên B cảm sinh bởi tôpô $\mathcal{T}_A$ trên A sẽ trùng với tôpô trên B cảm sinh bởi tôpô $\mathcal{T}$ trên X.

Chứng minh.

Gọi $\mathcal{T}_B$ là tôpô trên B cảm sinh bởi $\mathcal{T}$ (ta sẽ chứng minh $\mathcal{B} = \mathcal{T}_B$). Lấy U ∈ $\mathcal{B}$ tuỳ ý ⇒ tồn tại U' ∈ $\mathcal{T}_A$ sao cho U = U' ∩ B. vì U' ∈ $\mathcal{T}_A$ ⇒ tồn tại W ∈ $\mathcal{T}$ sao cho U' = W ∩ A ta có:

U = U' ∩ B = (W ∩ A) ∩ B = W ∩ B ⇒ U ∈ $\mathcal{T}_B$ ⇒ vậy $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}_B$. Ngược lại lấy tuỳ ý U ∈ $\mathcal{T}_B$ ⇒ ∃W ∈ $\mathcal{T}$ sao cho U = W ∩ B. Đặt U' = W ∩ A, ta có U = W ∩ B = (W ∩ A) ∩ B = U' ∩ B Suy ra U ∈ $\mathcal{B}$ Từ đó suy ra $\mathcal{T}_B \subset \mathcal{B}$ hay $\mathcal{T}_B = \mathcal{B}$. □

Định nghĩa 3.12. Không gian con A của không gian tôpô X được gọi là không gian con mở (đóng) của X nếu bản thân A là tập mở (đóng) trong X.

Giả sử (X, $\mathcal{T}$) là không gian tôpô và (A, $\mathcal{T}$) là không gian tôpô con của (X, $\mathcal{T}$) Khi đó với tập con M bất kỳ của A ta ký hiệu M_A^0 là phần trong của tập M trong A, $b_A(M)$ là biên của tập M trong không gian tôpô A, $\overline{M_A}$ là bao đóng của tập M trong không gian tôpô con A, và ta vẫn hiểu M^0, $\overline{M}$, b(M) là phần trong, bao đóng và biên của M trong X.

Định lý 3.17 Cho (X, $\mathcal{T}$) là không gian tôpô và (A , $\mathcal{T}_A$) là không gian con. Khi đó :

a) Đối với tập con bất kỳ M ⊂ A ta có :

$$M^0 = M_A^0 \cap A^0, \quad b_A(M) \subset b(M) \cap A, \quad \overline{M_A} = \overline{M} \cap A.$$

b) Nếu M ⊂ A là một tập mở (tương tự là tập đóng) trong X thì nó là mở (tương tự là đóng) trong A.

c) Nêu A là không gian con mở (đóng) trong X, thì mỗi tập mở (đóng) trong A đều là mở (đóng) trong X.

Chứng minh.

a) Ta chứng minh $M^0 = M_A^0 \cap A^0$.

Trước hết ta chứng minh: $M^0 \subset M^0 \cap A^0$.

Từ $M \subset A$ suy ra $M^0 \subset A^0$ (*). Mặt khác vì $M^0 \subset M \subset A$ nên $M^0 \cap A = M^0$ Và rõ ràng rằng M^0 là tập mở trong A (vì nó là giao của tập mở trong X với A). Theo định nghĩa phần trong của một tập hợp ta có M_A^0 là tập mở lớn nhất (đối với tôpô $\mathcal{T}_A$) được chứa trong M, mà $M^0 \subset M$. Vì vậy $M^0 \subset M_A^0 \Rightarrow M^0 \subset M_A^0$ go A^0. (*)

Bây giờ ta chứng minh bao hàm thức ngược lại. Giả sử $x \in M_A^0 \cap A^0$ tuỳ ý. Khi đó $x \in M_A^0$ và $x \in A^0$. Vì $x \in M_A^0$ nên tồn tại lân cận mở V của điểm x trong A thoả mãn $V \subset M$. Theo định nghĩa không gian con, tồn tại lân cận mở W_1 của x trong X sao cho $V = W_1 \cap A$, từ điều kiện $x \in A^0 \Rightarrow \exists$ lân cận W_2 của x trong X sao cho $W_2 \subset A$. Đặt $U = W_1 \cap W_2$, rõ ràng U là lân cận của x trong X, hơn nữa $U \subset W_1 \cap A = V \subset M$. Như Vậy điểm x là điểm trong của tập M (đối với tôpô $\mathcal{T}$ trên X). Từ đó suy ra $M_A^0 \cap A^0 \subset M^0$ (**)

Từ (*) Và (**) Suy ra $M^0 = M_A^0 \cap A^0$.

Lấy $X \in b_A(M)$ tuỳ ý gọi U là lân cận của x trong X. Khi đó $U \cap A$ là lân cận của x trong A, rõ ràng $(U \cap A) \cap M \neq \varnothing$. Do đó $u \cap M \neq \varnothing$. Tương tự $(U \cap A) \cap (A \setminus M) \neq \varnothing \Rightarrow U \cap (A \setminus$

M) $\neq \emptyset \Rightarrow U \cap (M \setminus M) \neq \emptyset$. Vậy $x \in B(M)$, vì $x \in b_A(M) \subset A$ $\Rightarrow x \in b(M) \cap A$, Suy ra $b_A(M) \subset b(M) \cap A$.

Ta chứng minh: Với $M \subset A$ tuỳ ý ta có $\overline{M_A} = \overline{M} \cap A$.

Ta có $\overline{M} \cap A$ là một tập đóng trong A đối với tổng $\mathcal{T}_A$ chứa M.

Vậy $\overline{M_A} \subset M \cap A$.

Ngược lại, ta có $x \in \overline{M} \cap A \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \overline{M} \\ x \in A \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x \in M \\ x \in b(M) \end{array}\right. \\ x \in A \end{cases}$.

+ Nếu x thuộc M thì ta có ngay $x \in M \cup b_A(M) = \overline{M_A}$.

+ Nếu $x \notin M$ thì $x \in b(M)$ và $x \in A \setminus M$.

Giả sử U là một lân cận bất kỳ của x trong A. Khi đó tồn tại lân cận V của x trong X sao cho $U = V \cap A$. Suy ra:

$$\begin{cases} V \cap M \neq \emptyset \\ V \cap (X \setminus M) \neq \emptyset \end{cases}$$

Do $M \subset A$, nên từ $V \cap M \neq \emptyset \Rightarrow V \cap A \cap M \neq \emptyset \Rightarrow U \cap M \neq \emptyset$.

Mặt khác vì $\begin{cases} x \in U \\ x \in (A \setminus M) \end{cases} \Rightarrow U \cap (A \setminus M) \neq \emptyset$

Vậy x là điểm biên của M trong A. Suy ra $x \in \overline{M_A}$

b) Nếu $M \subset A$ là tập mở trong X, thì $M \cap A = M$ là mở trong A (định nghĩa).

Nếu $M \subset A$ là đóng trong X thì $X \setminus M$ là mở trong X $\Rightarrow A \cap (X \setminus M) = A \setminus (A \cap M) = A \setminus M$ là tập mở trong A. Vậy M là tập đóng trong A.

c) Nếu A là tập mở trong X, M là tập mở trong A $\Rightarrow$ M = A $\cap$ U với U là tập mở nào đó trong X. Vậy M là tập mở trong X.

Nếu A là tập đóng trong X, M là tập đóng trong A, thì $\overline{M} \subset \overline{A} = A$. Ta có $\overline{M_A} = M = M \cap A = \overline{M} \cap A = \overline{M}$. Vậy M là tập đóng trong X. □

Ví dụ 3.4

Trong không gian tôpô (R,$\mathcal{T}$), xét tập con I = [0,1] với tổng cảm sinh bởi tôpô. Do tiền cơ sở của $\mathcal{T}$ là họ tất cả các tập có dạng (-∞, a), (b, ∞) nên tiền cơ sở của tôpô $\mathcal{T}_I$ trên I là họ các tập có dạng [0,a), (b, 1] với $0 < a \leq 1$, $0 \leq b < 1$. Hiển nhiên [0,l] là không gian con đóng trong (R,$\mathcal{T}$).

Định lý 3.18.

a) Với $i < 3\frac{1}{2}$, không gian con bất kỳ của một T_i-không gian là T_i-không gian.

b) Không gian con đóng của không gian chuẩn tắc là chuẩn tắc.

c) Không gian con của không gian tôpô thoả mãn tiên đề đếm được thứ nhất (tương ứng thứ hai) là không gian tôpô thoả mãn tiên đề đếm được thứ nhất (tương ứng thứ hai).

Chứng minh.

a) Ta chứng minh cho trường hợp i = 2 và i = 3, các trường hợp còn lại chứng minh tương tự.

Giả sử không gian tôpô (X, $\mathcal{T}$) là T_2-không gian và (A, $\mathcal{T}_A$) là không gian tôpô con của nó. Với hai điểm khác nhau tuỳ ý x,y $\in$A, do (X, $\mathcal{T}$) là T_2-không gian nên tồn tại các lân cận mở U của x và V của y trong X thoả mãn $U \cap V = \varnothing$. Khi đó U' = U

$\cap$ A, và V' = V $\cap$ A là các tập mở trong A thoả mãn x $\in$ U', y $\in$ V' và U' $\cap$ V' = $\emptyset$. Vậy (A, $\mathcal{T}_A$) là T_2-không gian.

Giả sử (A, $\mathcal{T}_A$) là không gian con bất kỳ của không gian chính quy (X, $\mathcal{T}$). Lấy x $\in$ A tuỳ ý, và giả sử F là tập đóng trong A không chứa x. Khi đó $F = \overline{F_A} = \overline{F} \cap A$ (theo định lý trên). Vì x $\notin$ F nên ta có x $\notin$ $\overline{F}$. Khi đó tồn tại U, V mở trong X sao cho: x $\in$ U, F $\subset$ V và U $\cap$ V = $\emptyset$.

Đặt U_1 = U $\cap$ A, V_1 = V $\cap$ A. Rõ ràng U_1, và V_1 là những tập mở trong A thoả mãn x $\in$ U_1 , F $\subset$ V_1 và U=1 $\cap$ V_1 = $\emptyset$.

Dễ thấy A là T_1-không gian. Vì vậy A là không gian chính quy.

b) Giả sử A là không gian con đóng bất kỳ của không gian chuẩn tắc (X, $\mathcal{T}$). Với hai tập đóng không giao nhau tùy ý M và N trong A suy ra M và N là đóng trong X $\Rightarrow$ tồn tại các tập mở không giao nhau U và V thỏa mãn M $\subset$ U, N $\subset$ V. Đặt U' = U $\cap$ A, V' = V $\cap$ A, khi đó U' và V' là các lân cận không giao nhau của M và N trong A. Vậy A là không gian chuẩn tắc.

c) Hiển nhiên. □

Như vậy trong cấu trúc của không gian tôpô, các tính chất T_1 không gian, với i < $3\frac{1}{2}$, thỏa mãn tiên đề đếm được thứ nhất, thứ hai vẫn được duy trì cho các không gian con.

§6 TÍCH ĐỀ CÁC CỦA CÁC KHÔNG GIAN TÔPÔ

1 Tích Đề các của hai không gian tôpô

Định nghĩa 3.13. Cho X và Y là các không gian tôpô, XxY là tích Đề các của X và Y. Ký hiệu $\mathcal{B}$ là họ tất cả các tập con của XxY có dạng UxV, trong đó U là tập mở trong X, và V là tập mở trong Y.

Rõ ràng $\mathcal{B}$ là một phủ của XxY và giao của hai phần tử tùy ý thuộc $\mathcal{B}$ lại thuộc $\mathcal{B}$, do đó họ $\mathcal{B}$ là cơ sở của tôpô nào đó trên tập XxY, tôpô này được gọi là tôpô tích (hay tôpô Tichonov) trên tập XxY.

Như vậy một tập con M $\subset$ XxY là tập mở đối với tôpô tích nếu và chỉ nếu với mỗi phần tử $(x, y) \in M$ tìm được các tập mở U chứa x trong X, và tập mở V chứa y trong Y sao cho UxV $\subset$ M. Các không gian tôpô X, Y được gọi là các không gian toạ độ.

Các ánh xạ p_1: XxY $\to$ X, p_2 : XxY $\to$ Y được xác định bởi $p_1(x, y) = x$, và $p_2(x, y) = y$ được gọi là các phép chiếu chính tắc lên các không gian toạ độ. Rõ ràng các ánh xạ p_1, p_2 là liên tục đối với tôpô tích và các tôpô trên X, trên Y, vì nếu U mở trong X thì p_1^{-1} (U) = UxY là mở đối với tôpô tích. Tương tự nếu V mở trong Y thì p_2^{-1} (V) = XxV là mở.

Tính liên tục của các phép chiếu p_1 và p_2 là cơ sở để mô tả tôpô tích. Thực vậy, giả sử $\mathcal{T}$ là một tôpô nào đó xác định trên XxY sao cho các ánh xạ $p_1$và p_2 là liên tục. Khi đó với U mở trong X, V mở trong Y ta có tập UxV là mở trong tôpô $\mathcal{T}$, (UxV $\in \mathcal{T}$) vì $U\times V = p_1^{-1}(U) \cap p_2^{-1}(V)$, mà các tập hợp ở vế phải là mở đối với tổng $\mathcal{T}$. Như vậy, tôpô $\mathcal{T}$ là mạnh hơn tôpô tích, hay nói cách khác tôpô tích là tôpô yếu nhất trong các tôpô xác định trên XxY, mà đối với chúng, các phép chiếu p_1, P_2 lên các không gian toạ độ là liên tục.

Định lý 3.19. Giả sử XxY là không gian tôpô tích được xác định như trên. Khi đó:

a) Các phép chiếu chính tắc lên các không gian toạ độ là ánh xạ mở.

b) Giả sử X, Y là các không gian tôpô. Với mỗi $x_0 \in X$, ánh xạ $f : Y \to \{x_0\} xY$ cho tương ứng $y \mapsto (x_0, y)$ là một phép đồng phôi từ Y lên không gian con $\{x_0\} xY$ của không gian tôpô XxY.

c) Giả sử X, Y, Z là các không gian tôpô, XxY là không gian tôpô tích, ánh xạ $f : XxY \to Z$ là liên tục tại điểm (x_0, y_0). Khi đó ánh xạ $g : Y \to Z$ xác định bởi $g(y) = h(x_0, y)$ là ánh xạ liên tục tại điểm y_0.

d) Ánh xạ $g : XxY \to YxX$, $(x, y) \mapsto (y, x)$, là một phép đồng phôi.

Chứng minh.

a) Giả sử M là tập mở bất kỳ trong không gian tôpô XxY. Khi đó M là hợp nào đó các phần tử thuộc cơ sở của tôpô tích trên XxY : $M = \bigcup_{i\in I}(V_i \times W_i)$, (V_i là các tập mở trong X, W_i là các tập mở trong Y với mọi $i \in I$). Khi đó $p_1(M) = \bigcup_{i\in I} V_i$, $p_2(M) = \bigcup_{i\in I} W_i$ là các tập mở trong các không gian toạ độ X và Y.

b) Ta chỉ cần chứng minh ánh xạ f và ánh xạ ngược f^{-1} liên tục tại mọi điểm là đủ vì rõ ràng f là song ánh. Lấy tuỳ ý điểm $y \in Y$, giả sử U là lân cận bất kỳ của điểm $(x_0, y) \in \{x_0\}$ xy khi đó tồn tại một tập mở $V \subset XxY$ sao cho $V \cap \{ x_0 \} xY \subset U$. Do đó tồn tại các lân cận V_1 của x_0 và V_2 của y sao cho V_1 x $V_2 \subset U$ (Vì V là mở). Ta có $\{x_0\}$ x $V_2 = (V_1$ x $V_2) \cap \{ X_o \}$ x $Y \subset U \Rightarrow$ $\{X_0\}$ x $V2 \subset U$ thoả mãn $V_2 \subset f^{-1}(U)$, do đó tạo ảnh của một lân cận bất kỳ của (x_0, y) là lân cận của y. Vậy ánh xạ f là liên tục tại y. Suy ra f là liên tục. Ánh xạ ngược f^{-1} của f là thu hẹp của p_2 lên không gian $\{x_0\}$ x$Y \subset$ XxY, và vì vậy nó là liên tục. Vậy f là phép đồng phôi.

c) Xét $Y \xrightarrow{f} \{x_0\} \times Y \xrightarrow{h} Z$. Ta có $\forall y \in Y$ thỏa mãn $g(y) = h(x_0, y) = hf(y)$ nghĩa là g = hf. Vậy g là hợp thành của hai ánh xạ liên tục tại điểm y_0 và (x_0, y_0), nên nó là ánh xạ liên tục tại y_0.

d) Hiển nhiên. □

Như định nghĩa trên ta đã thấy tôpô Tikhonov trên XxY chính là tôpô đầu xác định bởi các ánh xạ p_l, P_2, sau đây ta sẽ mở rộng khái niệm trên để định nghĩa tôpô tích của một họ tuỳ ý các không gian tôpô.

2 Tích Đề các của một họ không gian tôpô

Định nghĩa 3.14. Giả sử $\{X_s\}_{s \in S}$ là một họ các tập hợp. Tập hợp tất cả các ánh xạ x : $S \to \bigcup_{s \in S} X_s$ sao cho với mỗi $s \in S$, $x(s) \in X_s$, được gọi là tích Đề các của họ tập hợp $\{X_s\}_{s \in S}$ và ký hiệu là $\prod_{s \in S} X_s$.

Ta ký hiệu phần tử $x \in \prod_{s \in S} X_s$ là $x = \{x_s\}_{s \in S}$ trong đó $x_s = x(s) \in X_s$ với mỗi $s \in S$. Phần tử x_s của X_s gọi là toạ độ thứ s của phần tử x. Ánh xạ $p_s : \prod_{s \in S} X_s \to X_s$ xác định bởi $p_s(x) = x_s$ gọi là phép chiếu chính tắc lên thành phần X_s. Nếu S là một tập hợp hữu hạn, (S = {1, 2, 3,..., n}) , thì tích Đề các của các không gian tôpô $\{X_i\}$, $(i = 1,\dots, n)$, được ký hiệu là $X_1xX_2x \dots xX_n$ hoặc $\prod_{i=1}^{n} X_i$ .Nếu tất cả các không gian của họ $\{x_s\}_{s \in S}$ đều bằng nhau, tức là $X_s = X$ với mỗi $s \in S$ thì tích Đề các $\prod_{s\in S} X_s$ được ký hiệu là X^S.

Định nghĩa 3.15 Giả sử $\{x_s, \mathcal{T}_s\}_{s \in S}$ là họ nào đó các không gian tôpô. Tập hợp $\prod_{s\in S} X_s$ với tôpô đầu $\mathcal{T}$ xác định bởi họ ánh xạ $\{p_s,\}_{s \in S}$ được gọi là tích Đề các của họ không gian tôpô $\{x_s, \mathcal{T}_s\}_{s \in S}$ tôpô $\mathcal{T}$ được gọi là tôpô tích (hay còn được gọi là tôpô Tikhônốp).

Từ nay về sau, nếu $\{x_s, \mathcal{T}_s\}_{s \in S}$ là một họ không gian tôpô thì ký hiệu $\prod_{s\in S} X_s$ luôn dùng để chỉ không gian tôpô tích với tổng $\mathcal{T}$ xác định như trên.

Định lý 3.20. Họ tất cả các tập con của $\prod_{s\in S} X_s$ có dạng $\prod_{s\in S} W_s$ trong đó Ws là tập mở trong không gian X_s và $W_s \neq X_s$ chỉ với một số hữu hạn phần tử của S, tạo thành một cơ sở của tích Đề các $\prod_{s\in S} X_s$

Chứng minh.

Theo định lý (2.6) họ tất cả các tập hợp dạng (trong đó $\bigcap_{i=1}^{n} p_{s_i}^{-1}(W_{s_i})$ $s_1, s_2 \dots\dots s_n \in S$, W_{si} là tập trong X_{si} , và $i = 1 ,\dots n)$ là một cơ sở của không gian tích $\prod_{s\in S} X_s$ Ta có $p_{s_0}^{-1}(W_{s_0}) = \bigcap_{i=1}^{n} p_{s_i}^{-1}(W_{s_i})$

trong đó $W_{si} = X_{si}$ với mọi $s_i \neq s_0$. Mặt khác ta có thể viết $(\prod_{s\in S} W_s) \cap (\prod_{s\in S} W'_s) = \prod_{s\in S}(W_s \cap W'_s)$. Do đó $\bigcap_{i=1}^{n} p_{s_i}^{-1}(W_{s_i}) = \prod_{s\in S} W_s$, trong đó $W_s = X_s$ với mọi $s \in \{s_1 ,\dots , s_n\}$. Ta có điều phải chứng minh. □

Định lý 3.21. Nếu $As \subset Xs$ với mỗi $s \in S$ thì trong tích Đề các $\prod_{s\in S} X_s$ ta có : $\overline{\prod_{s\in S} A_s} = \prod_{s\in S} \overline{A}_s$

Chứng minh.

Giả sử , $x = (x_s)_{s\in S} \in \overline{\prod_{s\in S} A_s}$, t là một phần tử bất kỳ của S, và giả sử W_t là môt lân cận tuỳ ý của điểm x_t trong không gian X_t. Khi đó tập $\prod_{s\in S} W_s$ trong đó W_t là lân cận của x_t trong X_t đã chọn ở trên, còn $W_s = X_s$ với mọi $s \neq t$, là một lân cận của điểm x trong không gian $\prod_{s\in S} W_s$. Do đó $(\prod_{s\in S} A_s) \cap (\prod_{s\in S} W_s) = \prod_{s\in S}(A_s \cap W_s)$ là một tập hợp khác rỗng. Từ đó $A_t \cap W_t \neq \emptyset$. Vậy $x_t \in \bar{A}_t$ vì $x_s \in \bar{A}_s$ với mọi $s \in S$ nên $x = (x_s)_{s\in S} \in \prod_{s\in S} \bar{A}_s$ Từ đó suy ra $\overline{\prod_{s\in S} A_s} \subset \prod_{s\in S} \bar{A}_s$.

Đảo lại, giả Sử $x = (x_s)_{s\in S} \in \prod_{s\in S} \bar{A}_s$ Và V là lân cận của niềm X trong không gian $\prod_{s\in S} X_s$. Khi đó theo định lý (3.20), tồn tại một phần tử thuộc cơ sở của tôpô tích là $\prod_{s\in S} W_s$ trong đó $W_s = X_s$ với mọi $s \notin \{s_1, \ldots\ldots, s_n\}$, các tập W_{s1}, W_{s2} ……. W_{sn} là mở trong các không gian tương ứng X_{s1}, X_{s2} ……. X_{sn} sao cho $x \in \prod_{s\in S} W_s \subset V$ Với mỗi $s \in S$, ta có $x_s \in \bar{A}_s$ nên với mỗi $s \in S$, $A_s \cap W_S \neq \emptyset$. Từ đó ta có $(\prod_{s\in S} A_s) \cap (\prod_{s\in S} W_s) = \prod_{s\in S}(A_s \cap W_s) \neq \emptyset$

Do đó $V \cap \prod_{s\in S} A_s \neq \emptyset$ vậy $x \in \overline{\prod_{s\in S} A_s}$ Ta có điều phải chứng minh. □

Hệ quả 1. Nếu với mỗi $s \in S$, tập A_s là đóng trong X_s, thì tập $\prod_{s\in S} A_s$ là đóng trong không gian tích . $\prod_{s\in S} X_s$

Chứng minh.

Theo định lý vừa chứng minh:

$$\overline{\prod_{s\in S} A_s} = \prod_{s\in S} \bar{A}_s = \prod_{s\in S} A_s . \square$$

Hệ quả 2. Nếu với mỗi $s \in S$, tập A_s là trù mật trong không gian X_s thì tập con $\prod_{s\in S} A_s$ là trù mật trong không gian $\prod_{s\in S} X_s$

Chứng minh.

Vì với mỗi $s \in S$ ta có $\overline{As} = X_s$ nên:

$$\overline{\prod_{s\in S} A_s} = \prod_{s\in S} \overline{A}_s = \prod_{s\in S} X_s . \square$$

Định lý 3.22. Ánh xạ $f : Ys \to \prod_{s\in S} X_s$ tư không gian tôpô Y vào tích Đề các $\prod_{s\in S} X_s$ của họ không gian tôpô $\{x_S\}_{s\in S}$ là liên tục khi và chỉ khi với mỗi $s \in S$ ánh xạ $p_s.f : Y \to X_s$ là liên tục.

Chứng minh. Hiển nhiên theo định lý (2.7). $\square$

Định lý 3. 23.

1) Với $i \le 3\frac{1}{2}$, tích Đề các của một họ các T_i-không gian là T_i-không gian.

2) Với $i \le 4$, nếu tích Đề các $\prod_{s\in S} X_s$ của họ không gian tôpô $\{x_S\}_{s\in X}$ là T_i-không gian, thì Xs là một T_i -không gian (với mọi $s \in S$). Chứng minh.

1) Ta chứng minh cho trường hợp $i = 3\frac{1}{2}$, các trường hợp khác được chứng minh tương tự. Trước hết ta chứng minh nếu với mỗi $s \in S$ không gian X_s là T_1-không gian thì $\prod_{s\in S} X_s$ cũng là T_1-không gian.

Thật vậy, giả sử $x = (x_S)_{s\in S}$ là một điểm bất kỳ của không gian $\prod_{s\in S} X_s$ ta có $\overline{\{x\}} = \overline{\prod_{s\in S}\{x_s\}} = \prod_{s\in S}\{(\overline{x}_s)\} = \prod_{s\in S}\{x_s\} = (x_s)_{s\in S} = x.$

Như vậy mọi tập con có một phần tử trong $\prod_{s\in S} X_s$ đều là tập đóng nên $\prod_{s\in S} X_s$ là T_1-không gian.

Bây giờ giả sử với mọi $s \in S$ không gian X_s là hoàn toàn chính quy. Xét phần tử tùy ý $x_0 = (x_s^0)_{s\in S} \in \prod_{s\in S} X_s$ và giả sử V là một phần tử thuộc cơ sở của tôpô tích trong không gian $\prod_{s\in S} X_s$ Chứa điểm x_0. Khi đó V có dạng $V = \bigcap_{i=1}^{n} p_{s_i}^{-1}(W_{s_i})$ trong đó các tập W_{s1}, W_{s2} ....W_{sn} là các lân cận mở của các điểm x^0_{sl}, x^0_{s2} ..... x^o_{sn} trong các không gian tương ứng X_{s1},X_{s2} ....X_{sn}. Ta sẽ chứng minh tồn tại một ánh xạ liên tục f : $\prod_{s\in S} X_s \to I$ Sao Cho $f(x_0) = 0$ và $f(x) = 1$ với mọi $x \in \prod_{s\in S} X_s \setminus V$. Thật vậy vì X_{si} ($i = 1, 2$ .... n) là không gian hoàn toàn chính quy nên tồn tại một hàm số g_i; $X_{si} \to I$ là liên tục sao cho $g_i(x^o_{si}) = 0$ và $g_i(x_{si}) = 1$ với mọi $x_{si} \in X_{si} \setminus W_{si}$ (với $i = 1$ ..... n). Ta có ánh xạ $f_i = g_i$. p_{si} : $\prod_{s\in S} X_s \to I$ là liên tục thỏa mãn $f_i(x_0) = 0$ và $f_i(x) = 1$ với mọi $x \in \prod_{s\in S} X_s \setminus p_{s_i}^{-1}(W_{s_i})$ với $i = 1 ,\dots , n$.

Đât $f = \max\{f_i,\dots , f_n\}$. Khi đó f là ánh xạ liên tục trên $\prod_{s\in S} X_s$, lấy giá trị trong I, thoả mãn $f(x_0) = 0$. Hơn nữa, nếu $x \in \prod_{s\in S} X_s$ thì $X \in p_s^{-1}(W_{si})$ với một i nào đó thỏa mãn $1 \le i \le n$, do đó ta có $f_i(x) = 1$ nghĩa là $f(x) = 1$. Vậy $\prod_{s\in S} X_s$ là không gian hoàn toàn chính quy.

2) Giả sử $\prod_{s\in S} X_s$ là một T_i-không gian và t là một phần tử bất kỳ của S. Ta chứng minh X, là T_i-không gian. Lấy tùy ý $x_0 = (x_s^0)_{s\in S}$ thuộc $\prod_{s\in S} X_s$. Đạt $X_t^* = \prod_{s\in S} A_s$ trong đó $A_t = X_t$ và

$A_S = \{x_s^0\}$ với mọi s ≠ t. Dễ dàng thấy rằng ánh xạ $i_t : X_t = X_t^*$ xác định bởi $i_t(u) = x = (x_s)_{s\in S}$ trong đó xs : x_s^0 (vơi mọi s ≠ t), và $x_t = u$ là một phép đồng phôi. Như vậy X, được nhúng đồng phôi vào không gian tích $\prod_{s\in S} X_s$. Do đó theo định lý (3.18) nếu $\prod_{s\in S} X_s$ là một T_i-không gian thì X_t cũng là một T_i-không gian với $i < 3\frac{1}{2}$.

Ta cũng thấy ngay rằng nếu $\prod_{s\in S} X_s$ là một T_1-không gian thì X_t^* là một tập hợp con đóng của $\prod_{s\in S} X_s$. Thật Vậy, Vì $\overline{A_t} = \overline{X_t} = X_t = A_t$ Và $\overline{A_s} = \overline{X_s^0} = X_s^0 = A_s$ Với mọi s ≠ t, nên ta có:

$$\overline{X_t^*} = \overline{\prod_{s\in S} A_s} = \prod_{s\in S} \bar{A}_s = \prod_{s\in S} A_s = X_t^*.$$

Ta đã biết, nếu $\prod_{s\in S} X_s$ là một T_4-không gian thì mọi không gian con đóng cũng là T_4-không gian. Vì vậy khi $\prod_{s\in S} X_s$ là một T_4-không gian thì X_t cũng là T_4-không gian. □

Ví dụ 3.5

a) Không gian tôpô Euclid :

Giả sử $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ là không gian tôpô với tôpô tự nhiên, $n \in \mathbb{N}^*$. Khi đó tôpô tích trên tập $\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, \ldots, n\}$ được gọi là tôpô tự nhiên hay tôpô Euclid. $\mathbb{R}^n$ cùng với tổng đó được gọi là không gian tôpô Euclid. Ta có thể chọn một cơ sở của tôpô này là họ tất cả các hình chữ nhật mở dạng: $K_{a,b} = I_1 x I_{2x} \ldots x I_n$, trong đó $a = (a_1, \ldots, a_n)$, $b = (b_1, \ldots, b_n)$, và $I_i = (a_i, b_i)$.

Tôpô cảm sinh trên một tập con của không gian Euclid cũng được gọi là tôpô Euclid.

Dễ dàng chứng minh được rằng với $k \le n$, không gian Euclid $\mathbb{R}^k$ đồng phôi với không gian con:

$$A = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_i = 0 \text{ với } i = k+1, k+2, \dots, n\}$$

Phép đồng phôi cho tương ứng $(x_1, x_2 \dots\dots x_k)$ với:

$$(x_1, x_2 \dots\dots x_k, 0, \dots, 0)$$

gọi là phép nhúng chính tắc $\mathbb{R}^k$ vào $\mathbb{R}^n$.

Tá sẽ gọi tập $\mathbb{R}^n_- = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_i \le 0\} \subset \mathbb{R}^n$ với tôpô cảm sinh là nửa không gian trong $\mathbb{R}^n$

Không gian con $\partial\mathbb{R}^n_- = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_n = 0\} \subset \mathbb{R}^n_-$ gọi là biên của $\mathbb{R}^n_-$. Dễ dàng thấy rằng trong $\mathbb{R}^n$ ta có $b(\mathbb{R}^n_-) = \partial\mathbb{R}^n_-$.

b) Hàm liên tục trên không gian tôpô

Giả sử $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ là tập số thực với tôpô tự nhiên, X là không gian tôpô bất kỳ, khi đó các ánh xạ từ X tới $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ được gọi là các hàm trên X. Ta có các khẳng định sau: Nếu g, f là các ham liên tục trên X thì $(f + g)$, $f.g$ xác định bởi $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$, $(f.g)(x) = f(x).g(x)$, cũng là các hàm liên tục trên X.

Thật vậy gọi $h = (f + g)$, lấy tùy ý $x_0 \in X$ và giả sử V là lân cận tuỳ ý của $h(x_0)$, khi đó $\exists\varepsilon > 0$ sao cho $(h(x_o) - \varepsilon, h(x_o) + \varepsilon)$ C V. Ta có $(f(x_o) - \varepsilon/2, f(x_o) + \varepsilon/2)$ là lân cận của $f(x_o)$ và $(g(x_o) - \varepsilon/2, g(x_o) + \varepsilon/2)$ là lân cận của điểm $g(x_o)$.

Vì f liên tục tại xo nên tồn tại lân cận mở U_1 của x_o sao cho tâm $f(U_1) \subset f(x_0) - \varepsilon/2, f(x_o) + \varepsilon/2)$ nghĩa là với mọi $x \in U_1$ ta có:

$$f(x) \in (f(x_0) - \varepsilon/2, f(x_0) + \varepsilon/2) \Leftrightarrow |f(x) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (*)$$

Tương tự, vì g liên tục tại x_0 nên tồn tại lân cận mở U_2 của x_o

sao cho giun $g(U_1) \subset (g(x_0)- \varepsilon/2, g(x_0) + \varepsilon/2)$ nghĩa là với mọi $x \in U_2$ ta có: $g(x) \in (g(x_0) - \varepsilon/2, g(x_o) + \varepsilon/2) \Leftrightarrow |g(x) - g(x_0)| < \varepsilon/2$. (**)

Từ (*) và (**) với mọi $x \in U = U_1 \cap U_2$ ta có:

$$|f(x) - f(x_0) + g(x) - g(x_0)| \le |f(x) - f(x_0)| + |g(x) - g(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Suy ra $|h(x) - h(x_o)| = \varepsilon \Leftrightarrow h(x) \in (h(x_o) - \varepsilon, h(x_o) + e) \subset V$ tức là $h(U) \subset V$. Vậy ta có $h = (f + g)$ là hàm liên tục trên X.

Đặt $q = f.g$, giả sử x_o là điểm tuỳ ý của X, ta sẽ chứng minh với mọi $\varepsilon > 0$ luôn tồn tại lân cận U của x_o sao cho với mọi $x \in U$ ta có: $|q(x) - q(x_o)| < \varepsilon$.

Đặt $\delta = \frac{1}{2}\left[\sqrt{(|f(x_0)| + |g(x_0)|)^2 + 4\varepsilon} - |f(x_0)| - |g(x_0)|\right]$ ta có $\delta > 0$.

Tương tự như trên do các ánh xạ f và g là liên tục tại x_o nên tồn tại các lân cận mở U_1 của x_o và lân cận mở U_2 của x_o sao cho $|f(x) - f(x_0)| < \delta$ (với mọi $x \in U_l$) và $|g(x) - g(x_o)| < \delta$ (với mọi $x \in U_2$).

Đãi $U = U_1 \cap U_2$ khi đó với mọi $x \in U$ ta có:

$$\begin{aligned}
|q(x) - q(x_0)| &= |f(x).g(x) - f(x_0).g(x_0)| \\
&= |[f(x) - f(x_0)].[g(x) - g(x_0)] \\
&\quad + f(x).g(x_0) + f(x_0).g(x) - f(x_0).g(x_0) - f(x_0).g(x_0)| \\
&\le |f(x) - f(x_0)|.|g(x) - g(x_0)| + |g(x_0)|.|f(x) - f(x_0)| \\
&\quad + |f(x_0)|.|g(x) - g(x_0)| \\
&< \delta^2 + \delta(|g(x_0)| + |f(x_0)|) = \delta(\delta + |g(x_0)| + |f(x_0)|)
\end{aligned}$$

$$= \left[\frac{1}{2}\sqrt{(|f(x_0)| + |g(x_0)|)^2 + 4\varepsilon}\right]^2 - \left[\frac{1}{2}(|f(x_0)| + |g(x_0)|)\right]^2 = \varepsilon.$$

Chứng tỏ q là ánh xạ liên tục tại x_o. Vì x_o lấy tuỳ ý nên ta có q liên tục trên X.

Một cách tương tự ta chứng minh được hàm $r(x) = \dfrac{1}{f(x)}$ xác định và liên tục trên không gian con X \ {x | f(x) = 0}.

c) Áp dụng kết quả trên ta chứng minh được tính liên tục của các phép toán cộng và nhân trên tập hợp số thực với tôpô tự nhiên. Thật vậy, ta đã biết các phép chiếu chính tắc p_1, P_2 từ tích Đề các $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ lên $\mathbb{R}$ là các ánh xạ liên tục, nên các hàm sau đay là liên tục:

$$\begin{aligned}(p_1 + p_2) : \mathbb{R}\times\mathbb{R} &\to \mathbb{R}\\ (s, t) &\mapsto s + t\end{aligned}$$

$$\text{và}\quad \begin{aligned}p_1.p_2 : \mathbb{R}\times\mathbb{R} &\to \mathbb{R},\\ (s, t) &\mapsto s.t.\end{aligned}$$

Mở rộng kết quả trên ta có thể chứng minh được tính liên tục của phép cộng hai véc tơ trong không gian Euclid $\mathbb{R}^n$, và phép nhân một số thực với một véc tơ trong $\mathbb{R}^n$ đối với tôpô tự nhiên.

d) Tôpô tự nhiên trên không gian véc tơ hữu hạn chiều:

Giả sử E là không gian véc tơ n chiều trên $\mathbb{R}$ có cơ sở là $\{_e1$, e_2 ………. $e_n\}$, khi đó mỗi véc tơ x $\in$ E có thể biểu diễn duy nhất dưới dạng: $x = a_1.e_1 +... + a_n.a_e$ $(a_i \in \mathbb{R})$. Ta đã biết ánh xạ f: E $\to \mathbb{R}^n$, xác định bởi $f(x) = (a_1, a_2 \ldots\ldots a_n)$, là một đẳng cấu tuyến tính. Nếu xét $\mathbb{R}^n$ với tôpô Euclid $\mathcal{T}$, khi đó họ $\mathcal{B}$ tất cả các tạo ảnh của các phần tử của $\mathcal{T}$ sẽ là một tôpô trên E và rõ ràng đối với các tôpô $\mathcal{B}$, $\mathcal{T}$ ánh xạ f là một phép đồng phôi. Ta thấy rằng tôpô $\mathcal{B}$ xác định như trên hoàn toàn không phụ thuộc vào cơ sở $\{e_1, e_2 \ldots\ldots e_n\}$ gã chọn ban đầu trên E. Ta cũng sẽ gọi tôpô này là tôpô tự nhiên trên không gian véc tơ E.

e) Tôpô tự nhiên trên tập hợp số phức $\mathbb{C} = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{R}\}$. Xét ánh xạ f : $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}\times\mathbb{R}$ xác định bởi f(a + bi) = (a, b).

Ta có f là một song ánh, họ $\mathscr{M}$ tất cả các tạo ảnh của các tập mở trong $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ tạo nên một tôpô trên $\mathbb{C}$, ta gọi $\mathscr{M}$ là tổng tự nhiên trên $\mathbb{C}$, với tổng này f là một phép đồng phôi, và do vậy ta cũng chứng minh được phép cộng và phép nhân các số phức đối với tôpô tự nhiên $\mathscr{M}$ là liên tục.

§7. TỔNG TRỰC TIẾP CỦA MỘT HỌ KHÔNG GIAN TÔPÔ

Giả sử $\{(X_s, \mathscr{T}_s)_{s\in S}$ là một họ không gian tôpô đôi một không có điểm chung, tức là $X_s \cap X_t = \varnothing$ với mọi $s \neq t$.

Với mỗi $s \in S$ gọi $i_s : X_s \rightarrow \underset{s\in S}{\cup} X_s$ là ánh xạ xác định bởi $i_s(x) = x$, với $x \in X_s$.

Định nghĩa 3.16. Tập hợp $\underset{s\in S}{\cup} X_s$ cùng tôpô cuối $\mathscr{T}$ xác định bởi họ ánh xạ $\{i_s\}_{s\in S}$ được gọi là tôpô trực tiếp của họ không gian tôpô $\{(X_s, \mathscr{T}_s)\}_{s\in S}$ và ký hiệu là $\underset{s\in S}{\oplus} X_s$. Dễ dàng thấy rằng với mỗi tập con bất kỳ A của không gian $\underset{s\in S}{\oplus} X_s$, A là mở trong $\underset{s\in S}{\oplus} X_s$ khi và chỉ khi $A \cap X_S \in \mathscr{T}_S$ với mọi $s \in S$.

Định lý 3.24. Tập con $F \subset \underset{s\in S}{\oplus} X_s$ là đóng khi và chỉ khi $F \cap X_S$ là đóng trong X_s với mọi $s \in S$.

Chứng minh.

Tập con F là đóng trong $\underset{s\in S}{\oplus} X_s$ khi và chỉ khi $\underset{s\in S}{\oplus} X_s \setminus F$ là tập mở trong $\underset{s\in S}{\oplus} X_s$, tức là khi và chỉ khi $(\underset{s\in S}{\oplus} X_s \setminus F) \cap X_s$ là mở trong X_s với mọi $s \in S$. Kết luận của định lý được suy ra từ đẳng thức $(\underset{s\in S}{\oplus} X_s \setminus F) \cap X_S = Xs \setminus (F \cap Xs)$. □

Hệ quả. Mỗi tập hợp X_s là vừa mở vừa đóng trong $\underset{s\in S}{\oplus} X_s$.

Dễ dàng thấy rằng với mỗi $s \in S$, do $\mathcal{T}_s$ là tôpô cảm sinh bởi $\mathcal{T}$ trên X_s suy ra mỗi X_s là một không gian con vừa đóng vừa mở của $\underset{s\in S}{\oplus} X_s$ với mỗi $s \in S$ ánh xạ $i_s : X_s \to \underset{s\in S}{\oplus} X_s$ xác định bởi $i_S(x) = x$, gọi là phép nhúng đồng phôi X_s vào $\underset{s\in S}{\oplus} X_s$.

Định lý 3.25 Nếu không gian tôpô X là hợp của họ $\{X_S\}_{s\in S}$ những không gian con mở đôi một không có điểm chung thì $X = \underset{s\in S}{\oplus} X_s$.

Chứng minh.

Hiển nhiên hai tập hợp X và $\underset{s\in S}{\oplus} X_s$ là bằng nhau. Ta sẽ chứng minh các tôpô trên X và $\underset{s\in S}{\oplus} X_s$ là trung nhau. Thật vậy, nếu U là một tập hợp mở trong X thì với mỗi $s \in S$, tập hợp $U \cap X_S$ là mở trong $\underset{s\in S}{\oplus} X_s$. Do đó U là mở trong $\underset{s\in S}{\oplus} X_s$. Đảo lại nếu U là một tập mở trong $\underset{s\in S}{\oplus} X_s$ thì với mỗi $s \in S$ tập hợp $U \cap X_S$ là mở trong X_s, (vì X_s là tập mở trong X). Do đó $U = \underset{s\in S}{\cup} (U \cap X_s)$ là tập mở trong X. □

Định lý 3.26. Ánh xạ f : $\underset{s\in S}{\oplus} X_s \rightarrow$ Y liên tục khi và chỉ khi với mỗi s $\in$ S ánh xạ f.i_s : $X_s \rightarrow$ Y là liên tục.

Chứng minh. Hiển nhiên theo định lý (3.9). □

§8. TÔPÔ THƯƠNG

Giả sử X là một không gian tôpô, $\mathcal{R}$ là một quan hệ tương đương trên X. Gọi X/$\mathcal{R}$ là tập các lớp tương đương và i : X $\rightarrow$ X/$\mathcal{R}$ là ánh xạ thương, tức là ánh xạ xác định bởi i(x) = [x], trong đó [x] là lớp tương đương chứa x.

Định nghĩa 3.17 Tôpô cuối trên tập X/$\mathcal{R}$ xác định bởi ánh xạ được gọi là tôpô thương trên. Đó là tôpô mạnh nhất trong các tôpô xác định trên X/$\mathcal{R}$ sao cho ánh xạ i liên tục. Tập X/$\mathcal{R}$ với tôpô thương được gọi là không gian thương.

Định lý 3.27 Tập V $\subset$ X/$\mathcal{R}$ là mở đối với tổng thương khi và chỉ khi i^{-1} (V) = $\underset{s\in S}{\mathrm{U}}[X]$ là tập mở trong X.

Chứng minh: Suy ra từ định lý (3.8). □

Định lý 3.28. Tập F là đóng trong không gian thương X/$\mathcal{R}$ khi và chỉ khi i^{-1}(F) đóng trong không gian X.

Chứng minh.

Ta có tập F đóng trong không gian thương X/$\mathcal{R}$ khi và chỉ khi (X/$\mathcal{R}$\F là tập mở. Điều ngược lại tương đương với i^{-1}(F)((/$\mathcal{R}$)\F = X \ i^{-1}(F) mở trong X, tức là i^{-1}(F) đóng trong X. □

Hệ quả. Không gian thương X/$\mathcal{R}$ là T_1-không gian khi và chỉ khi tất cả các lớp tương đương trong X theo quan hệ tương đương $\mathcal{R}$ đều là những tập đóng trong *X*.

Nhận xét.

Nếu f : $X/\mathcal{R} \to Y$ là một ánh xạ từ không gian thương $X/\mathcal{R}$ vào không gian tôpô Y thì f liên tục khi và chỉ khi ánh xạ f.i : X → Y là liên tục.

§9. TÔPÔ MÊTRIC, KHÔNG GIAN MÊTRIC HÓA

Định lý 3.29. Giả sử (A, d_A) là không gian con của không gian mêtric (X, d). Gọi $\mathcal{T}$ là tôpô mêtric trên X phù hợp với mêtric d, và $\mathcal{T}_A$ là tôpô trên A cảm sinh bởi $\mathcal{T}$. Khi đó tôpô mêtric d_A trên A phù hợp với mêtric d_A trùng với $\mathcal{T}_A$.

Chứng minh.

Với mỗi x ∈ A và r > 0, ký hiệu $S_A(x, r) = \{ y \in A \mid d(x, y) < r)$ là hình cầu mở trong A. Ta có họ $\{S_A(x, r)\}_{x\in A.r>0}$ là cơ sở của tôpô $\mathcal{B}$ trên A, hơn nữa ta có $S_A(x, r) = A \cap S(x, r)$ nên $S_A(x, r) \in \mathcal{T}_A$ nghĩa là $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}_A$(1) Ngược lại lấy tuỳ ý $U \in \mathcal{T}_A$, khi đó $\exists V \in \mathcal{T}$ sao cho $U = V \cap A$, do họ S(x, r) là một cơ sở của $\mathcal{T}$ nên với bất kỳ x ∈ U, luôn ∃ε > 0 sao cho $S(x, \varepsilon) \subset V \Rightarrow A \cap S(x, \varepsilon) = S_A(x, \varepsilon) \subset U$. vậy ta có $\mathcal{T}_A \subset \mathcal{B}$ (2). Từ (l) và (2) suy ra $\mathcal{T} = \mathcal{B}$. □

Định lý 3.30. Cho (X_1, d_1) và (X_2, d_2) là hai không gian mêtric. Giả sử $\mathcal{T}_1$(tương ứng $\mathcal{T}_2$) là tôpô mêtric trên X_1 phù hợp với d_2 (tương ứng d_2 trên X_2 phù hợp với d_2). Gọi $\mathcal{T}$ là tôpô tích trên $X = X_1 \times X_2$. Giả sử

$\mathcal{T}_d$ là tôpô mêtric trên $X_1 \times X_2$ phù hợp với mêtric d trên $X_1 \times X_2$ xác định bởi định nghĩa 1.12. Khi đó $\mathcal{T} = \mathcal{T}_d$.

Chứng minh.

Ta sẽ chứng minh mọi phần tử thuộc cơ sở của $\mathcal{T}$ là thuộc $\mathcal{T}_d$ và ngược lại. Thật vậy với bất kỳ $(x_1, x_2) \in X_1 \times X_2$ và với mọi số thực dương r ta dễ dàng chứng minh được:

$$S_d((x_1, x_2), \frac{r}{2})) \subset S_{d_1}(x_1, \frac{r}{2}) \times S_{d_2}(x_2, \frac{r}{2}) \subset S_d((x_1, x_2), r)).$$

Điều đó chứng tỏ $S_d((x_1, x_2), r)) \in \mathcal{T}$ với mọi $(x_1, x_2) \in X_1 \times X_2$, $r \in \mathbb{R}^+$, và $S_{d_1}(x_1, r_1) \times S_{d_2}(x_2, r_2) \in \mathcal{T}_d$, với mọi $x_1 \in X_1$, $x_2 \in X_2$ $r_1, r_2 \in \mathbb{R}^+$. Do vậy ta có $\mathcal{T} = \mathcal{T}_d$. □

Định nghĩa 3.18. Không gian tôpô $(X, \mathcal{T})$ được gọi là không gian mêtric hóa nếu tồn tại một mêtric $d: X \times X \to \mathbb{R}$ sao cho tôpô sinh bởi d trùng với tổng $\mathcal{T}$

nhận xét. Do không gian mêtric là không gian thỏa mãn tiên đề đếm được thứ nhất nên mỗi không gian mêtric hóa là không gian thỏa mãn tiên đề đếm được thứ nhất.

Sau đây ta sẽ chỉ ra một điều kiện đủ để một không gian tôpô là mêtric hóa.

Định lý 3.31 (Urisơn) Không gian tôpô chính quy $(X, \mathcal{T})$ thỏa mãn tiên đề đếm được thứ hai là không gian mêtric hóa.

Chứng minh.

Giả sử $\mathcal{B}=\{U_n\}_{n=1}^{\infty}$ là một cơ sở đếm được của không gian tôpô $(X, \mathcal{T})$. Với mỗi $x \in U_m$, vì X là chính quy nên tồn tại U_n sao cho $x \in U_n \subset \overline{U_n} \subset U_m$ (định lý 3.12). Như vậy, tồn tại những cặp tập hợp (U_n, U_m) thuộc $\mathcal{B}$ sao cho $\overline{U_n} \subset U_m$. Hiển nhiên họ những cặp như

Vậy là đếm được. Ta đánh số những cặp này như sau:

$$(U_{n_1}, U_{m_1}), (U_{n_2}, U_{m_2}), \ldots, (U_{n_k}, U_{m_k}), \ldots$$

Do X là không gian chính quy có cơ sở đếm được nên nó là không gian chuẩn tắc theo định lý (3.14). Với mỗi k ∈ N, do $\overline{U_{nk}}$ và $X \backslash U_{mk}$ là các tập đóng rời nhau, nên theo bổ đề Urisơn (định lý 3.13) tồn tại các hàm liên tục $f_k : X \to I$ thỏa mãn f(x) = 0 ($\forall x \in \overline{U_{nk}}$), và $f_k(y) = 1$ ($\forall y \in X \setminus U_{mk}$).

Gọi d là hàm xác định trên X x X bởi:

$$d(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \left| f_k(x) - f_k(y) \right| \ (x, y \in X). \quad (*)$$

Do $\left| f_k(x) - f_k(y) \right| \le 1 \ (\forall x, y \in X, \forall k)$ nên ta có chuỗi hàm ở vế phải của (*) ở trên là hội tụ $\forall x, y \in X$.

Dễ dàng chứng minh được d là một mêtric trên X. Thực vậy, tiên đề đồng nhất được kiểm tra như sau: Nếu $x, y \in X$ thỏa mãn $x \neq y$, thì tồn tại một tập $U_m \in \mathcal{B}$ sao cho $x \in U_m$ và $y \neq U_m$. Khi đó tồn tại sao cho $x \in U_n \subset \bar{U}_n \subset U_m$. Cặp ($U_n$, U_m) trùng với một cặp (U_{nk},U_{mk}) nào đó. vì $x \in \overline{U_{nk}}$ và $y \in X \backslash U_{mk}$, nên $f_k(x) = 0$, và $f_k(y) = 1$. Do đó $d(x, y) \ge \frac{1}{2^k} > 0$. vậy $d(x, y) = 0 \Rightarrow x = y$.

Ký hiệu $\mathcal{T}_M$ là tôpô trên X sinh bởi mêtric d. Ta chứng minh $\mathcal{T}_M = \mathcal{T}$.

Lấy tùy ý $V \in \mathcal{T}_M$, giả sử $x_o \in V$. Khi đó tồn tại $\varepsilon > 0$ Sao cho hình cầu mở $S(x_o, \varepsilon) \subset V$.

Chuỗi hàm $d(x, x_0) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k}|f_k(x) - f_k(x_0)|$ hội tụ đều trên X, mỗi hạng tử của nó là một hàm liên tục trên X, cho nên tổng d(x, x_o) của chuỗi hàm là một hàm liên tục trên X. Ánh xạ $x \mapsto d(x, x_o)$ (cho tương ứng mỗi $x \in X$ với số $d(x, x_0)$ là liên tục tại điểm $x_o \in X$, nên tồn tại $U_u \in \mathcal{B}$ sao cho $x_o \in U_u$ và với mỗi $x \in U_u$ ta có:

$$d(x, x_o) = |\, d(x, x_o) - d(xo, x_o)\, | < \varepsilon.$$

tức là $U_n \subset S(X_0, \varepsilon) \subset V$. Như vậy tập V là $\mathcal{T}$-mở suy ra $\mathcal{T}_M \subset \mathcal{T}$

Ngược lại, nếu $V \in \mathcal{T}$, và giả sử $x_o \in V$. Khi đó tồn tại một tập $U_m \in \mathcal{B}$ sao cho $x_o \in U_m \subset V$. Gọi U_n là phần tử thuộc $\mathcal{B}$ sao cho $x \in U_n \subset \bar{U}_u \subset U_m$. Cặp (U_n, U_m) trùng với một cặp (U_{nk}, U_{mk}) nào đó.

Với bất kỳ điểm $x \in S(x_0, \frac{1}{2^k})$ ta có $d(x, x_0) < \frac{1}{2^k}$

Mặt khác ta lại có:

$$d(x, x_0) \geq \frac{1}{2^k}|f_k(x) - f_k(x_0)| = \frac{1}{2^k} f_k(x) \text{ (do } f_k(x_0) = 0)$$

$$\Rightarrow f_k(x) < 1 \Rightarrow x \notin X \setminus U_{m_k} \Rightarrow x \in U_m$$

$$\Rightarrow S(x_0, \frac{1}{2^k}) \subset U_m \subset V \Rightarrow V \in \mathcal{T}_M \Rightarrow \mathcal{T} \subset \mathcal{T}_M.$$

Ta có hai tôpô $\mathcal{T}$ và $\mathcal{T}_M$ là trùng nhau. Vậy X là không gian mêtric hóa. □

Định lý 3.32. Tích Đề các của một họ đếm được $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ các không gian mêtric hóa là một không gian mêtric hóa.

Chứng minh.

Trước hết, theo bài tập 26. chương I ta có khẳng định sau:

Với mọi không gian mêtric (X, d) tồn tại trên X một mêtric δ tương đương với d, thỏa mãn $\delta(x, y) \le 1$ ($\forall x, y \in X$). Trong đó δ được xác định như sau: $\delta(x, y) = \min\{d(x, y), 1\}$.

Với mỗi $n \in \mathbb{N}$, ký hiệu d_n là mêtric bi chăn bởi đơn vi và sinh ra tôpô $\mathcal{T}_n$ trên X_n. Với moi $x = (x_n)_{n=1}^{\infty}$, $y=(y_n)_{n=1}^{\infty} \in \prod_{n=1}^{\infty} X_n$ đặt: $d(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} d_n(x_n, y_n)$. (*)

Ta nhận thấy chuỗi số ở vế phải của (*) là hội tụ, vì $d_n(x_n, y_n) \le 1$ với mọi $x_n, y_n \in X_n$ và với mọi n. Dễ thấy d là một mêtric trên $\prod_{n=1}^{\infty} X_n$ Ký hiệu $\mathcal{T}$ là tôpô tích trên $\prod_{n=1}^{\infty} X_n$ và $\mathcal{T}_M$ là tôpô sinh bởi mêtric d trên $\prod_{n=1}^{\infty} X_n$ Ta chứng minh $\mathcal{T}$ và $\mathcal{T}_M$ là trùng nhau.

Với mỗi số tự nhiên n ta luôn có $d(x,y) \ge \frac{1}{2^n} dn(x_u,y_n) \Rightarrow d_n(x_n,y_n) \le 2^n d(x, y)$. Điều đó chứng tỏ với mỗi n, phép chiếu pu: $\prod_{n=1}^{\infty} X_n \to X_n$ là liên tục. $\Rightarrow \mathcal{T} \subset \mathcal{T}_M$.

Ngược lại, lấy tùy ý $V \in \mathcal{T}_M$ giả sử $x_o = (x_n^0)_{n=1}^{\infty}) \in V$. Khi đó tồn tại $\varepsilon > 0$ sao cho hình cầu mở $S(x_0, \varepsilon) \subset V$. Gọi n_0 là một số tự nhiên sao cho $\sum_{n=n_0+1}^{\infty} \frac{1}{2^n} < \frac{\varepsilon}{2}$ Với mỗi $n \le n_0$, ký hiệu hình cầ $S_n(x_n^0, \frac{\varepsilon}{2}) = B_n$

Khi đó tập $U = S_1 \times S_2 \times \ldots \times S_{n_0} \times \prod_{n=n_0+1}^{\infty} X_n$ là một phần tử thuộc cơ sở của tôpô tích $\mathcal{T}$ trên $\prod_{n=1}^{\infty} X_n$ Chứa x_0 thỏa mãn U ⊂ $S(x_0, \varepsilon)$. Thật Vậy, với $x = \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \in U$ tùy ý ta có:

$$d(x, x_0) = \sum_{n=1}^{n_0} \frac{1}{2^n} d_n(x_n, x_n^0) + \sum_{n=n_0+1}^{\infty} \frac{1}{2^n} d_n(x_n, x_n^0) < \frac{\varepsilon}{2} \sum_{n=1}^{n_0} \frac{1}{2^n} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

$\Rightarrow x \in S(x_0, \varepsilon). \Rightarrow U \subset S(x_0, \varepsilon) \subset V \Rightarrow V \in \mathcal{T}.$

vậy $\mathcal{T}_M \in \mathcal{T}$. Ta có điều phải chứng minh. □

BÀI TẬP

1. Trên tập các số thực $\mathbb{R}$ ta ký hiệu ($\mathcal{T}_T$, $\mathcal{T}_K$, $\mathcal{T}$, $\mathcal{T}_S$, $\mathcal{T}_D$ lần lượt là tôpô thô, tôpô tạo bởi phần bù của các tập hữu hạn, tôpô tự nhiên, tôpô Sorgent, tôpô rời rạc. Cho các ánh xạ $f, g : (\mathbb{R}, \mathcal{T}) \to \mathbb{R}$, xác định như sau: $f(x) = x + 1$, $g(x) = x^2$. Hãy xét tính liên tục của các ánh xạ f, g với tôpô của tập đích lần lượt là: $\mathcal{T}$, $\mathcal{T}_K$, $\mathcal{T}_T$, $\mathcal{T}_S$, $\mathcal{T}_D$

2. Cho $f : (\mathbb{R}, \mathcal{T}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{T})$ là hàm Đirichlê được xác định như sau :

$$f(x) = \begin{cases} 1 \text{ khi } x \in \mathbb{Q} \\ 0 \text{ khi } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

Chứng minh rằng hàm $g : (\mathbb{R}, \mathcal{T}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{T})$ thoả mãn với mỗi $x \in \mathbb{R} : g(x) = x.f(x)$ là ánh xạ chỉ liên tục tại một điểm.

3. Cho tập X = {1, 2, 3, 4, 5 }, và $\mathcal{U}$ = { ∅. {l}, {1, 2}, {1, 2,

3}, {1 , 2 , 4 } , { 1 , 5 } }. Chứng minh rằng $\mathcal{U}$ là cơ sở của tôpô nào đó trên X. Hãy xác định tôpô đó. Giả sử f, g, h : X → X là các ánh xạ được xác định như sau:

f(1)= 1 , f(2) = 1 , f(3) = 2, f(4) = 4, f(5) = 5.

G(1) = 3, g(2) = 1, g(3) = 2, g(4) = 5, g(5) = 1.

H(1) = 3, h(2) = 2, h(3) = 3, h(4) = 4, h(5) = 4.

Hãy xét tính liên tục của các ánh xạ trên.

4. Chứng minh rằng ánh xạ f : (X, $\mathcal{T}_X$) → (Y, $\mathcal{T}_Y$) là một phép đồng phôi khi và chỉ khi f là song ánh và $f(\overline{A}) = \overline{f(A)}$ với mọi tập con A của X.

5. Cho f : $(\mathbb{R}, \mathcal{T}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{T})$ là ánh xạ được xác định như sau :

$$f(x) = \begin{cases} 0 \text{ khi } x \le 0 \\ x \text{ khi } 0 < x < 1 \\ 1 \text{ khi } x \ge 1 \end{cases}$$

Chứng minh rằng ánh xạ f là đóng nhưng không là ánh xạ mở.

6. Xét $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ trong đó $\mathcal{T}$ là tôpô tự nhiên, và xét các tập con của $\mathbb{R}$ với tôpô cảm sinh từ $\mathcal{T}$. Chứng minh rằng các không gian tôpô sau đây là đồng phôi :

a) X = (a, b), Y = (c, d). b) X = [a, b], Y = [c, d]

c) X = (a, b), Y = $\mathbb{R}$. D) X = [a, b), Y = [c, d).

trong đó a, b, c, d là các số thực tuỳ ý.

7. Có thể xác định các tôpô trên các tập số hữu tỷ, và vô tỷ để được hai không gian tôpô đồng phôi không?

8. Hãy tìm hai ví dụ về các loại ánh xạ trên tục đóng nhưng không mở, liên tục mở nhưng không đóng, liên tục nhưng đồng thời không đóng và không mở.

9. Có tồn tại hãy không những ánh xạ giữa các không gian tôpô thoả mãn đồng thời vừa là ánh xạ đóng vừa là ánh xạ mở nhưng không phải là ánh xạ liên tục?

10. Giả sử trên tập X đã cho hai tôpô $\mathcal{T}_1$ và $\mathcal{T}_2$ thoả mãn $\mathcal{T}_1 \subset \mathcal{T}_2$, biết rằng $(X, \mathcal{T}_1)$ là không gian Hausdorff, chứng minh rằng

a) Không gian $(X, \mathcal{T}_2)$ cũng là Hausdorff.

b) Nếu A là tập con đóng của X đối với $\mathcal{T}_1$ thì A cũng đóng đối với $\mathcal{T}_2$.

11. cho các ánh xạ $f : A \to Y$, $g : X \to Y$, với $A \subset X$. Ánh xạ g được gọi là mở rộng (thác triển) của ánh xạ f lên X (hay ta còn nói f là thu hẹp (hạn chế) của g lên tập con A), nếu với mọi $x \in A$ ta có $f(x) = g(x)$. Khi đó ta sẽ viết $f = g|_A$.

Giả sử $f : X \to Y$ và $g : X \to Z$ là hai ánh xạ, $Y \subset Z$, ta nói rằng ánh xạ f thu được từ ánh xạ g bằng cách thu hẹp (hạn chế) miền giá trị nếu $f(x) = g(x)$ $(\forall X \in X)$. Trong trường hợp này ta cũng nói ánh xạ g thu được từ f bằng cách mở rộng miền giá trị. Chứng minh rằng:

a) Thu hẹp của một ánh xạ liên tục lên không gian tôpô con là một ánh xạ liên tục.

b) Giả sử $f : X \to Y$ là một ánh xạ liên tục giữa các không gian tôpô Y_1 là không gian tôpô con của Y thoả mãn $f(X) \subset Y_1$ Thế thì ánh xạ g. $X \to Y_1$ thu được bằng cách thu hẹp miền giá trị của f là một ánh xạ liên tục

c) Giả sử $f : X \to Y$ là ánh xạ liên tục giữa các không gian tôpô. Y là không gian tôpô con của Y_2. Khi đó ánh xạ $g : X \to Y_2$ thu được từ f bằng cách mở rộng miền giá trị là một ánh xạ liên tục.

12. Cho f, g : X $\to$ Y là hai ánh xạ liên tục từ không gian tôpô X vào không gian tôpô Hausdorff Y. Chứng minh rằng: tập

A = { x $\in$ X | f(x) = g(x) } là đóng.

13. Giả sử f, g là hai hàm liên tục từ không gian tôpô X vào tập $\mathbb{R}$ với tổng tự nhiên.

a) Chứng minh rằng nếu a $\in \mathbb{R}$ thì ánh xạ: a.f : X $\to \mathbb{R}$, xác định bởi (a.f)(x) = a.f(x), với mọi x $\in$ X, là liên tục.

b) Chứng minh rằng ánh xạ: |f|: X $\to \mathbb{R}$, xác định bởi |f|(x) = |f(x)|, với mọi x $\in$ X, là liên tục.

c) Chứng minh rằng các ánh xạ: f + g, f - g, f.g : X $\to \mathbb{R}$xác định bởi:

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x),$$
$$(f - g)(x) = f(x) - g(x),$$
$$(f.g)(x) = f(x).g(x),$$

với mọi x s $\in$ X là liên tục. Hơn nữa nếu g(x) $\neq$ 0 với mọi x $\in$ X thì ánh xạ 1/g cũng liên tục.

d) Các ánh xạ: max(f, g), min(f, g) : X $\to \mathbb{R}$ cũng liên tục, trong đó max(f, g) $=\frac{1}{2}$ (f + g + |f - g|), min(f,g) $=\frac{1}{2}$ (f + g - |f - g|).

14. Giả sử $\mathbb{R}$ là tập số thực với tổng tự nhiên, với hai điểm tuỳ ý

$x, y \in \mathbb{R}^n$, $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ đặt:

$$d(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \ldots + (x_n - y_n)^2}$$

Với bất kỳ $a \in \mathbb{R}^n$, và $r \in \mathbb{R}^+$, đặt: $B(a, r) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid d(x, a) < r\}$. Tập B(a,r) được gọi là hình cầu mở tâm a bán kính r trong $\mathbb{R}^n$.

a) Chứng minh rằng họ tất cả các hình cầu mở trong $\mathbb{R}^n$ là cơ sở của tôpô nào đó trên $\mathbb{R}^n$.

b) Chứng minh rằng tôpô tìm được ở trên chính là tôpô Euclid trên in.

c) Chứng minh rằng không gian Euclid $\mathbb{R}^n$ là không gian tôpô thoả mãn tiên đề đếm được thứ hai, và là không gian tôpô khả li.

15. Trong không gian tôpô Euclid $\mathbb{R}^2$, xét các tập sau đây với tôpô cảm sinh:

$K = (-1, 1)\times(-1, 1)$. (hình vuông mở)

$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\}$ (hình tròn mở)

$S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ (đường tròn)

$L = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 = 1, -1 \leq y \leq 1\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y^2 = 1, -1 \leq x \leq 1\}$

a) Chứng minh rằng: Các không gian tôpô K và B là đồng phôi.

b) Các không gian tôpô S^1 và L là đồng phôi.

c) Các không gian tôpô $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ và $S^1 \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^3$ là đồng phối.

d) Hãy xét xem ánh xạ $f : [0, 1) \to S^1$, xác định bởi:

$$f(t) = (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$$

có là phép đồng phôi hay không?

16. Cho X và Y là hai không gian tôpô, $f : X\text{x}Y \to Z$ là ánh xạ từ không gian tôpô tích vào không gian tôpô Z. Ta nói rằng f là liên tục đối với biến $x \in X$ nếu với mỗi $y_0 \in Y$ ánh xạ $X \to Z$ $(x \mapsto f(x, y_0))$ là liên tục.

Tương tự ta nói rằng f là liên tục đối với biến $y \in Y$ nếu với mỗi $x_0 \in X$ ánh xạ $Y \to Z$ $(y \mapsto f(x_0, y))$ là liên tục. Nếu f là liên tục theo biến x và biến y thì ta nói rằng f liên tục theo hai biến x và y.

a) Chứng minh rằng nếu f là ánh xạ liên tục thì f liên tục theo hai biến x và y.

b) Hãy chỉ ra ví dữ chứng tỏ rằng tồn tại những ánh xạ liên tục theo cả hai biến x và y, nhưng không phải là ánh xạ liên tục.

Chương 4
KHÔNG GIAN COMPẮC,
KHÔNG GIAN LIÊN THÔNG

§ 1. KHÔNG GIAN COMPẮC

Định nghĩa 4.1 Không gian tôpô *X* được gọi là không gian compắc nếu mỗi phủ mở bất kỳ của X luôn có phủ con hữu hạn. Tập con A của không gian tôpô X gọi là tập compắc nếu A là không gian compắc với tổng cảm sinh.

Ví dụ 4.1

1. Mọi không gian tôpô gồm hữu hạn phần tử đều là không gian compăc.

2. Không gian tôpô $\mathbb{R}$(với tôpô tự nhiên) không phải là không gian compắc vì phủ mở $\sigma = \{(-n, n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ của $\mathbb{R}$ không có phủ con hữu hạn nào.

3. Không gian tôpô $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_K)$ là không gian compắc.

Định nghĩa 4.2. Họ $\mathcal{F} = \{F_s\}_{s \in S}$ những tập con của không gian tôpô X được gọi là họ có tâm nếu giao của mỗi họ con hữu hạn bất kỳ của $\mathcal{F}$ là khác rỗng. Nghĩa là với tập con hữu hạn bất kỳ $\{s1 ,\dots , sk\} \subset S$ ta luôn có $\bigcap_{i=1}^{k} F_{s_i} \neq \emptyset$

Định lý 4.1. Không gian tôpô *X* là compắc nếu và chỉ nếu mỗi họ có tâm những tập con đóng bất kỳ của X đều có giao khác rỗng.

Chứng minh.

■ (⇒) Giả sử X là không gian compắc, $\mathcal{F} = \{F_s\}_{s\in S}$ là một họ có tâm những tập đóng trong X. Ta chứng minh $\bigcap\limits_{s\in S} F_s \neq \phi$

Thật vậy, giả sử ngược lại $\bigcap\limits_{s\in S} F_s \neq \phi$ Khi đó ta có :

$$X = X\setminus(\bigcap_{s\in S} F_s) = \bigcap_{s\in S}(X\setminus F_s)$$

trong đó họ $\{X \setminus F_s\}_{s\in S}$ là phủ mở của X. Do X là com pắc , theo định nghĩa phủ $\{X \setminus F_s\}_{s\in S}$ của X có phủ con hữu hạn , nghĩa là tồn tai s_1, s_2 ....$s_n \in S$ sao cho: $\bigcup\limits_{i=1}^{n}(X\setminus F_{s_i}) = X$

Từ đó suy ra $X\setminus(\bigcap\limits_{i=1}^{n} F_{s_i}) = X$ và do đó $\bigcap\limits_{i=1}^{n} F_{s_i} = \emptyset$ Chứng tỏ họ $\mathcal{F}$ không phải là họ có tâm. Mâu thuẫn với giả thiết, vậy $\bigcap\limits_{s\in S} F_s \neq \phi$

■ (⇐) Giả Sử mọi họ có tâm các tập đóng trong X luôn có giao khác rỗng, và giả sử $\{U_s\}_{s\in S}$ là một phủ mở tuỳ ý của X. Với mỗi $s \in S$ đặt $F_s = X \setminus U_s$, khi đó F_s là tập đóng với $\forall s \in S$.

Ta có:

$$\bigcap_{s\in S} F_s = \bigcap_{s\in S}(X\setminus U_s) = X\setminus(\bigcup_{s\in S} U_s) = \emptyset.$$

Điều này chứng tỏ họ $\{F_s\}_{s\in S}$ không phải là họ có tâm những tập đóng, do vậy $\exists s_1, s_2$ ....$s_n \in S$. Sao cho $\bigcap\limits_{i=1}^{n} F_{s_i} = \emptyset$

Suy ra

$$\bigcup_{i=1}^{n} U_{s_i} = \bigcup_{i=1}^{n}(X \setminus F_{s_i}) = X \setminus (\bigcap_{i=1}^{n} F_{s_i}) = X \setminus \emptyset = X.$$

Như vậy phủ $\{U_s\}_{s\in S}$ có phủ con hữu hạn là $\{U_{si} | i = 1, 2, \ldots, n\}$. Vậy X là không gian compắc. □

Định lý 4.2. Tập con A của không gian tôpô X là compắc khi và chỉ khi mỗi phủ mở bất kỳ của A trong X luôn có một phủ con hữu hạn.

Chứng minh.

■ (⇒)Giả sử A là tập compắc của không gian tôpô X, $\{U_i\}_{i\in I}\}$ là một phủ mở của A, (các U_i ($i \in I$) là các tập mở trong X), khi đó các tập $V_i = U_i \cap A$ là mở trong A và ta có:

$$\bigcup_{i\in I} V_i = \bigcup_{i\in I}(U_i \cap A) = (\bigcup_{i\in I} U_i) \cap A = A.$$

Do A là tập compắc , theo định nghĩa suy ra họ $\{V_i\}_{i\in I}$ có phủ con hữu hạn , giả sử đó là $\{V_{s_i} : i = 1, 2, \ldots, k\}$, $(A = \bigcup_{i=1}^{k} V_{s_i})$

khi đó ta có họ $\{U_{si} : i = 1, 2, \ldots k)$ là phủ con hữu hạn của phủ $\{U_i\}_{i \in I}$ đối với A trong X.

■ (⇐) Giả sử $\{V_i\}_{i\in I}$ là một phủ mở bất kỳ của A, trong đó V; là mở trong A với mọi $i \in I$. Theo định nghĩa không gian con , $\exists \{U_i\}_{i \in I}$ là họ các tạp mở trong X thoả mãn $V_i = U_i \cap A$ ($\forall i \in I$). Hiển nhiên họ $\{U_i\}_{i \in I}$ là phủ mở của A trong X, theo giả thiết ta tồn được phủ con hữu hạn $\{U_{si} | i = 1, 2, \ldots, n\}$ của phủ $\{U_i\}_{i \in I}$ nghĩa là

$$A \subset \bigcup_{i=1}^{n} U_{s_i}. \text{ Ta có } \bigcup_{i=1}^{n} V_{s_i} = \bigcup_{i=1}^{n}(U_{s_i} \cap A) = A \cap (\bigcup_{i=1}^{n} U_{s_i}) = A.$$

Vậy A là tập compắc. □

Hệ quả. Tập con đóng của không gian compắc là tập compắc.

Chứng minh.

Giả sử A là tập con đóng trong X , và họ $\{U_s\}_{s \in S}$ là một phủ mở bất kỳ của A. Khi đó họ $\{U_s\}_{s \in S}$ cùng với tập X \ A là một phủ m của X, vì X là không gian compắc nên X có phủ con hữu hạn, giả sử đó là X \ A, U_{s1} …….. $U_{sn.}$ Khi đó họ $\{U_{s_i}\}_{i=1}^{n}$. là một phủ con hữu hạn của A. Vậy A là compắc. □

Nhận xét.

Tập con compắc trong không gian compắc chưa chắc đã đóng. Ví dụ nếu X là không gian tôpô thô (có nhiều hơn một phần tử) khi đó mọi tập con của X đều là tập compắc, nhưng không phải là tập đóng. □

Định lý 4.3. Tập con compắc trong không gian Hausdorff là tập đóng.

Chứng minh.

Giả sử A là tập compắc. Nếu A = X thì hiển nhiên A là tập đóng.

Nếu A ≠ X thì X \ A ≠ ∅. Lấy bất kỳ x ∈ X \ A. Với mỗi y ∈ A ta có thể chọn một lân cận mở V_y của y sao cho x ∉ V_y. Rõ ràng họ $\{V_y\}_{y \in A}$ là một phủ mở của A, vì A là tập compắc nên họ trên có phủ con hữu hạn.là $\{V_{y_i}\}_{i=1}^{\infty}$. Đặt $V = \bigcup_{i=1}^{n} V_{y_i}$. Ta có A ⊂ V, và x ∉ $\overline{V}$. Vì vậy X \ $\overline{V}$ là lân cân của phần tử x thoả mãn X \ $\overline{V}$ ⊂ X \ A. ⇒ x là điểm trong của X \ A. Vì mọi x ∈ X \ A đều là điểm trong của X \ A nên X \ A là tập mở. Vậy A là tập đóng. □

Hệ quả. Nếu A là tập con compắc trong không gian

Hausdorff X và $x \in X \setminus A$ thì tồn tại các lân cận của x và tập A không giao nhau.

Định lý 4.4. Cho X là không gian tôpô Hausdorff, A và B là các tập con compắc không giao nhau của X. Khi đó tồn tại các lân cận không giao nhau của A và B. Do đó mỗi không gian Hausdorff compắc là không gian chuẩn tắc.

Chứng minh.

Theo chứng minh của định lý (4.3), với mỗi $x \in A$ tồn tại các lân cận mở V_X của x, và U_x của B sao cho $U_x \cap V_x = \varnothing$. Họ $\{V_x\}_{x \in A}$ là phủ mở của tập A nên có phủ con hữu hạn. Giả sử đó là là $\{ U_{x1} ,\ldots..,U_{xn} \}$. Ta có $V = \bigcup_{i=1}^{n} V_{x_i}$ và là lân cận của A , và $U = \bigcap_{i=1}^{n} U_{x_i}$ là lân cận của B. Rõ ràng $U \cap V = \varnothing$ ta có điều phải chứng minh. □

Định lý 4.5. Nếu X là không gian tôpô chính quy, A là tập con compắc và U là lân cận của A thì tồn tại lân cận V đóng cửa A sao cho $V \subset U$

Chứng minh.

Do X là chính quy nên với mỗi $x \in A$ tồn tại một lân cận mở W_x của x sao cho $\bar{W}_x \subset U$. Họ $(W_x)_{x\in A}$ là một phủ mở của A. Do A là tập compắc nên phủ $(W_x)_{x\in A}$ Có phủ con hữu hạn. Giả sử đó là $W_{x1},\ldots\ldots ,W_{xn}$ thoả mãn $A \subset \bigcup_{i=1}^{n} W_{x_i}$ Đặt $V = \bigcup_{i=1}^{n} \bar{W}_{x_i}$ rõ ràng V là lân cận đóng của A và $V \subset U$. □

Định lý 4.6. Ảnh của một tập compắc qua ánh xạ liên tục cũng là một tập compắc.

Chứng minh.

Giả sử A là một tập compắc trong không gian tôpô X, f : X → Y là ánh xạ liên tục. Đặt B = f(A). Giả sử $(U_s)_{s\in S}$ là một phủ mở bất kỳ của B. Vì $A \subset f^{-1}(B)$ nên họ $f^{-1}(U_s)_{s\in S}$ là một phủ mở của A (do f liên tục). Vì A là không gian compắc nên phủ này có phủ con hữu han, nghĩa là tồn tại các chỉ số $s_1, \ldots, s_n \in S$ sao cho $A \subset \bigcup_{i=1}^{n} f^{-1}(U_{s_i})$ Do đó $B = f(A) \subset \bigcup_{i=1}^{n} U_{s_i}$ vậy $\{U_{s_i}\}_{i=1}^{n}$ là phủ của B, và đó chính là phủ con hữu hạn của phủ $(U_s)_{s\in S}$ đối với B. Vậy B là tập compắc. □

Hệ quả. Cho f: X → Y là song ánh liên tục từ không gian compắc X lên không gian tôpô Hausdorff Y. Khi đó f là phép đồng phôi.

Chứng *minh.*

Khi Y là không gian Hausdorff và f là song ánh ta có f là ánh xạ đóng. Thật vậy, giả sử A là tập đóng trong X. Khi đó A là tập compắc (hệ quả định lý 4.2) suy ra tập f(A) là compắc. Vì Y Hausdorff nên f(A) là đóng trong Y (định lý 4.3).

Do vậy ta có với A là tập đóng trong X thì $(f^{-1})^{-1}(A) = f(A)$ đóng trong Y. Suy ra f^{-1} là liên tục. Vậy f là phép đồng phôi. □

Định lý 4.7 Cho X là không gian chính quy compắc, A là tập compắc và U là lân cận mở của A. Khi đó tồn tại trên X một hàm f liên tục lấy giá trị trên khoảng đơn vị đóng [0, 1] thỏa mãn f(x) = 0 nếu $x \in A$, f(x) = 1 nếu $x \in X \setminus U$.

Chứng minh. Do X là không gian chính quy compắc nên X là không gian chuẩn tắc (theo định lý 4.4). Theo giả thiết A là compắc trong X nên A là tập đóng trong X. Đặt $B = X \setminus U$. Vì U là tập mở chứa A nên B là tập đóng thỏa mãn $A \cap B = \varnothing$. Theo bổ đề Urisơn ta có điều phải chứng minh. □

Định lý 4.8. Tổng trực tiếp $\underset{s\in S}{\oplus} X_s$ của một họ không gian tôpô $\{X_s\}_{s\in S}$ là compắc khi và chỉ khi S là hữu hạn và Xs là compắc với mọi $s \in S$.

Chứng minh.

■ Giả sử $\underset{s\in S}{\oplus} X_s$ là không gian compắc. Khi đó hiển nhiên S là tập hữu hạn, vì nếu S là vô hạn thì họ $\{X_s\}_{s\in S}$ là một phủ mở vô hạn của $\underset{s\in S}{\oplus} X_s$ họ nay không có phủ con hữu hạn nào (do các X_s đôi một không giao nhau). Do X_s là tập đóng trong không gian compắc $\underset{s\in S}{\oplus} X_s \Rightarrow X_s$ là tập Compắc với mọi $s \in S$.

■ Giả sử $X_1, \ldots , X_n$ là các không gian com pắc không giao nhau từng đôi một, $S = \{ 1 , 2 , \ldots , n \}$. ta chứng minh tổng trực tiếp $\underset{s\in S}{\oplus} X_s$ là không gian compắc.

Giả sử $\{U_i\}_{i\in I}$ là một phủ mở bất kỳ của $\underset{s\in S}{\oplus} X_s$ Khi đó $\{ X_s \cap U_i\}_{i\in I}$ là một phủ mở của $X_s(1 \le s \le n)$, do đó từ X_s là compắc nên tồn tại một phủ con hữu hạn của $\{U_i\}_{i\in I}$ phủ X_s. Do s chỉ nhận một số hữu hạn giá trị, nên có một phủ con hữu hạn của $\{U_i\}_{i\in I}$ phủ $\underset{s\in S}{\oplus} X_s$ vậy $\underset{s\in S}{\oplus} X_s$ là không gian compắc. □

Định lý 4.9. Cho họ không gian tôpô $\{X_s\}_{s\in S}$. Tích Đề các $\prod_{s\in S} X_s$ là không gian compắc khi và chỉ khi X_s là không gian compắc với mọt $s \in S$.

Chứng minh.

■ ($\Rightarrow$) Giả sử $\prod_{s\in S} X_s$ là không gian compắc với tôpô tích, do p_1 là ánh xạ liên tục với mọi t ∈ S, nên $X_t = P_t(\prod_{s\in S} X_s)$ là không gian compắc với mọi t ∈ S.

■ (⇐) Giả sử $(X_s, \mathcal{T}_s)$ là các không gian tôpô compắc (với mọi s ∈ S) Ta chứng minh $\prod_{s\in S} X_s$ là không gian compắc. Giả sử $\mathcal{R}$ là họ bất kỳ những tập con đóng có tâm trong $\prod_{s\in S} X_s$. Ta chứng minh họ $\mathcal{R}$ có giao khác rỗng.

Thật vậy theo bổ đề Zooc tồn tại một họ có tâm cực đại $\mathcal{R}_0$ chứa $\mathcal{R}$ trong $\prod_{s\in S} X_s$. Ta có $\bigcap_{A\in\mathfrak{R}} A = \bigcap_{A\in\mathfrak{R}} \bar{A} \supset \bigcap_{A\in\mathfrak{R}_0} \bar{A}$ Ta sẽ chứng minh $\bigcap_{A\in\mathfrak{R}_0} \bar{A} \neq \emptyset$.

Do tính cực đại của $\mathcal{R}_0$ ta có :

a) Nếu $A_1,\dots, A_m \in \mathcal{R}_0$ thì $B = \bigcap_{i=1}^{m} A_i \in \mathfrak{R}_0$.

b) Nếu $A_0 \in \prod_{s\in S} X_s$ thoả mãn $A_0 \cap A \neq \emptyset$ ($\forall A \in \mathcal{R}_0$) thì $A_0 \in \mathcal{R}_0$.

Vì $\mathcal{R}_0$ là họ có tâm nên ∀s ∈ S ta có $\{\overline{p_s(A)}\}_{A\in\mathfrak{R}_0}$ là họ có tâm những tập con đóng của $X_s \Rightarrow (\forall s\in S)\ \bigcap_{A\in\mathfrak{R}_0} \overline{p_s(A)} \neq \emptyset$ (vì X_s (vì X_s là không gian compắc, mọi họ có tâm những tập con đóng đều có giao khác rỗng).

Với mỗi s ∈ S lấy một phần tử $x_s \in \bigcap_{A\in\mathfrak{R}_0} \overline{p_s(A)}$ ta chứng minh khi đó đó $x = (x_s)_{s\in S} \in \bar{A}, (\forall A \in \mathfrak{R}_0)$

Thật vậy giả sử V là một lân cận mở bất kỳ của x, khi đó tồn tại các lân cận mở W_1 , W_2 ……..W_m của các điểm x_{s1}, x_{s2} ……..x_{sm} là trong các không gian tương ứng X_{s1}, X_{s2} ……..X_{sm} sao cho $\bigcap\limits_{i=1}^{m} p_{s_i}^{-1}(W_i) \subset V$. Vì $x_{s_i} \in \bigcap\limits_{A\in\Re_0} \overline{p_{s_i}(A)}$ nên với mọi A ∈ $\mathscr{R}_0$, i ∈ {1, 2,...m}, có $w_i \cap p_{si}$; (A) ≠ ∅ ⇒ $p_{s_i}^{-1}(W_i) \cap A \neq \emptyset$ với mọi A∈ $\mathscr{R}_0$. Do tính chất b) của $\mathscr{R}_0$ suy ra $p_{s_i}^{-1}(W_i) \in \Re_0$ với mọi i ∈ {1, 2,...m}. Do tính chất a) ta có $\bigcap\limits_{i=1}^{m} p_{s_i}^{-1}(W_i) \in \Re_0$. Do đó với mọi A∈ $\mathscr{R}_0$ ta có $\bigcap\limits_{i=1}^{m} p_{s_i}^{-1}(W_i) \cap A \neq \emptyset \Rightarrow V \cap A \neq \emptyset$ Từ đó suy ra $x = (x_s)_{s\in S} \in \overline{A}$ (∀ A ∈ $\mathscr{R}_0$). Suy ra $\bigcap\limits_{A\in\Re_0} \overline{A} \neq \emptyset$ Vậy $\prod\limits_{s\in S} X_s$ là không gian compắc. □

Định lý 4.10. Khoảng đóng [a, b] ∈ (R, $\mathscr{T}$) là tập compắc.

Chứng minh.

Giả sử $\{U_s\}_{s\in S}$ là một phủ mở bất kỳ trong R của đoạn [a,b]. Gọi A là tập tất cả các điểm c ∈ [a, b] thỏa mãn [a, c] nằm trong hợp của một số hữu hạn các phân tử của phủ $\{U_s\}_{s\in S}$. Ta chứng minh b ∈ A.

Hiển nhiên A ≠ ∅ vì a ∈ A. Vì A là tập giới nội trong R nên A có cận trên đúng d = sup A ≤ b, (vì A ⊂ [a, b]). Ta chứng minh d = b.

Tồn tại tập mở $U_{s0} \in \{U_s\}_{s\in S}$ thỏa mãn d ∈ U_{s0}, khi đó tồn tại δ > 0 thỏa mãn (d - δ, d + δ) ⊂ U_{s0} . Vì d = supA, nên tồn tại phần tử x ∈ A sao cho x ∈ (d - δ, d]. Theo cách xác định của tập A, ta có [a, x] được phủ bởi một số hữu hạn các phần tử của phủ $\{U_s\}_{s\in S}$ giả sử các phần tử đó là: {U_{s1}, U_{s2}, …..U_{sn}}. Khi đó

$\{U_{s0}, U_{s1}, U_{s2} \ldots U_{sn}\}$ là một phủ hữu hạn của đoạn [a, d] $\Rightarrow$ d $\in$ A.

Giả sử d < b, theo trên trong đoạn [a, b] tồn tại $y \in (d, d + \delta) \subset (d - \delta, d+ \delta) \subset U_{s0}$, nghĩa là [a, y] được phủ bởi một số hữu hạn các phần tử $\{U_{s0}, U_{s1}, U_{s2} \ldots U_{sn}\}$ của phủ $\{U_s\}_{s\in S}$, $\Rightarrow y \in$ A. Điều này mâu thuẫn với d = supA. Vậy d = b. □

Định nghĩa 4.3. Tập con A của không gian Euclid $\mathbb{R}^n$ được gọi là giới nội nếu tồn tại khoảng đóng J = [a, b] sao cho $A \subset J^n$.

Ánh xạ f: $X \to \mathbb{R}$ (từ không gian tôpô X đến tập số thực R) được gọi là giới nội nếu f(X) là giới nội trong R.

Hệ quả. Tập con của không gian Euclid n chiều $\mathbb{R}^n$ là compắc khi và chỉ khi nó đóng và giới nội.

Chứng minh.

- ($\Rightarrow$)Giả sử A là tập compắc trong $\mathbb{R}^n$. Do $\mathbb{R}^n$ là không gian mêtric nên nó là không gian tôpô Hausdorff $\Rightarrow$ A là tập đóng trong $\mathbb{R}^n$ (theo định lý 4.3). Với mỗi số tự nhiên $i \in \mathbb{N}$ đặt M_i = (-i, i), và đặt $U_i = M_i^n$, khi đó họ $\{U_i\}_{i\in \mathbb{N}}$ là một phủ mở của A, do A là compắc nên có phủ con hữu hạn, hơn nữa do $U_i \subset U_{i+1}$ ($\forall i \in$ N) nên tồn tại i_0 để $A \subset U_{i0}$. Đặt $J = [-i_0, i_0]$, hiển nhiên $A \subset J^n$,vậy A là tập giới nội trong $\mathbb{R}^n$.

- ($\Leftarrow$) Nếu tập con A của không gian Euciid $\mathbb{R}^n$ là đóng và giới nội, tồn tại khoảng đóng J = [a, b] sao cho $A \subset J^n$: Theo các định lý (4.9) và (4.10) ta có J^n là tập compắc, vì A đóng trong J^n nên A là compắc. □

§2. KHÔNG GIAN COMPẮC ĐỊA PHƯƠNG

Định nghĩa 4.4. Không gian tôpô X được gọi là compắc địa phương nếu với mọi $x \in X$, tồn tại lân cận U của x sao cho $\overline{U}$ là tập compắc.

Ví dụ 4.2

a) Nếu X là không gian compắc thì X compắc địa phương.

b) Nếu X là không gian tôpô rời rạc thì X compắc địa phương.

c) $\mathbb{R}^k$ là không gian compắc địa phương.

Định lý 4.11 Không gian compắc địa phương Hausdorff là hoàn toàn chính quy.

Chứng minh.

Giả sử X là không gian compắc địa phương Hausdorff. Lấy tùy ý F là tập đóng trong X và $x \in X \setminus F$. Gọi U là lân cận mở của x sao cho U compắc. Ta có: $F_1 = (\overline{U} \setminus U) \cup (\overline{U} \cap F)$ là tập đóng trong $X \Rightarrow F_1$ đóng trong $\overline{U}$ thỏa mãn $x \in \overline{U} \setminus F_1$. Vì $\overline{U}$ là compắc Hausdorff nên $\overline{U}$ là chuẩn tắc (định lý 4.4) $\Rightarrow \overline{U}$ hoàn toàn chính qui. Do đó, tồn tại hàm liên tục f_1: $\overline{U} \Rightarrow I$ sao cho $f_1(x) = 0$, $f_1(y) = 1$ ($\forall y \Rightarrow F_1$). Gọi $f : X \setminus U \rightarrow I$ là hàm được xác định bởi: $f_2(y) = 1$ ($\forall y \in X \setminus U$). Hiển nhiên f_2 liên tục.Ta xác định hàm $f : X \rightarrow I$ như sau:

$$f(y) = \begin{cases} f_1(y) \text{ khi } y \in \overline{U} \\ f_2(y) \text{ khi } y \in X \setminus U \end{cases}$$

Do $\overline{U} \cap (X \setminus U) = \overline{U} \setminus U \subset F_1$ suy ra $f_1(y) = 1 = f_2(y)$, với mọi y ∈ $\overline{U} \cap (X \setminus U)$. Cho nên f là một ánh xạ. Ta chứng minh f liên tục:

Giả sử A là tập đóng bất kỳ trong I ⇒ $f_1^{-1}(A)$ đóng trong $\overline{U}$. $f_1^{-1}(A)$ đóng trong $X \setminus U = f_1^{-1}(A)$, $f_2^{-1}(A)$đóng trong X (vì $\overline{U}$ và $X \setminus U$ đóng trong X) ⇒ $\overline{U} = f_1^{-1}(A) \cup f_2^{-1}(A)$ là tập đóng trong X. Vậy f là ánh xạ liên tục.

Dễ thấy $f(x) = 0$, $f(y) = 1$ $(\forall y \in F)$. Vậy X là không gian hoàn toàn chính quy. □

Định lý 4.12. Giả sử X là không gian compắc địa phương Hausaorff, A là tập compắc của X, V là tập mở chứa A. Khi đó, tồn tại tập mở U sao cho $\overline{U}$ là tập compắc và $A \subset U \subset \overline{U} \subset V$.

Chứng minh.

Với mọi y ∈ A, tồn tại lân cận mở V_y của y sao cho $\overline{V}_y$ là tập compắc trong X. Vì X chính quy nên tồn tại lân cận mở W_y của y sao cho $\widetilde{W}_y \subset V$. Tập $U_y = V_y \cap W_y$ là một lân cận của y. Do $\overline{U}_y \subset \overline{V}_y$ nên $\overline{U}_y$ là compắc. Ta có họ $\{U_y\}_{y\in A}$ là một phủ mở của tập compắc A ⇒ $\exists y_1, \dots, y_n \in A$ sao cho $A \subset \bigcup_{i=1}^{n} U_{y_i}$.

Ta có $U = \bigcup_{i=1}^{n} U_{y_i}$; là tập mở chứa A thoả mãn $\overline{U}$ compắc trong X, bởi vì $\overline{U} = \bigcup_{i=1}^{n} \overline{U}_{y_i}$, trong đó mỗi $\overline{U}_{y_i}$ compắc trong X, i = 1 ,... , n.

Hơn nữa $\overline{U} = \bigcup_{i=1}^{n} \overline{U}_{y_i} \subset \bigcup_{i=1}^{n} \overline{W}_{y_i} \subset V$Điều phải chứng minh. □

Định lý 4.13.

a) Không gian con đóng của một không gian compắc địa phương là compắc địa phương.

b) Không gian con mở của một không gian compắc địa phương Hausdorff là compắc địa phương.

Chứng minh.

a) Giả sử X compắc địa phương, M là không gian con đóng của X.

Khi đó với mọi $x \in M$ tồn tại một lân cận U của x sao cho $\overline{U}$ là tập compắc trong X. Ta có tập $M \cap U$ là lân cận của x trong M, và $\overline{M \cap U}_M = \overline{M \cap U} \cap M$, (định lý 3. 1 7), $\Rightarrow$ $\overline{M \cap U}_M$ là tập đóng trong X vì $\overline{M \cap U}_M$ là tập con đóng của tập compắc $\overline{U}$ nên theo hệ quả định lý (4.2) ta có $\overline{M \cap U}_M$ là tập Compắc.

b) Giả sử X là không gian tôpô compắc địa phương Hausdorff, M là không gian con mở của X. Khi đó với mọi $x \in M$, tồn tại tập mở U trong X sao cho $\overline{U}$ compắc trong X và thoả mãn $x \in U \subset \overline{U} \subset M$ (áp dụng định lý 4.12 với $A = \{x\}$). Do đó M là tập compắc địa phương □

Định lý 4.14. Tổng trực tiếp $\underset{s \in S}{\oplus} X_s$ của một họ $\{X_s\}_{s \in S}$ không gian tôpô là không gian compắc địa phương $\Leftrightarrow$ với mọi $s \in S$, không gian tôpô X_s là compắc địa phương.

Chứng minh.

■ Giả sử $\underset{s \in S}{\oplus} X_s$ là không gian compắc địa phương. Vì X_s là không gian con đóng của $\underset{s \in S}{\oplus} X_s$, $\forall s \in S$, nên X_s là compắc địa phương.

■ Giả sử X_s là không gian compắc địa phương, $\forall s \in S$. Lấy tuỳ ý $x \in \underset{s \in S}{\oplus} X_s$. Khi đó tồn tại $s_0 \in S$ để $x \in X_{s0}$. Vì X_{s0}

compắc địa phương nên tồn tại lân cận U của x trong X_{s0} sao cho $\overline{U}$ compắc trong X_{s0} ($\overline{U}$ là bao đóng trong X_{s0} của U). Vì X_{s0} vừa mở, vừa đóng trong $\bigoplus_{s\in S} X_s$ nên $\overline{U}$ là lân cận của x trong $\bigoplus_{s\in S} X_s$ và $\overline{U}$ là bao đóng trong $\bigoplus_{s\in S} X_s$ của U. Vậy $\bigoplus_{s\in S} X_s$ là compắc địa phương. □

Định lý 4.15 Tích Đề các $\prod_{s\in S} X_s$ của một họ không gian tôpô $\{X_s\}_{s\in S}$ là không gian compắc địa phương nếu và chỉ nếu chỉ có một số hữu hạn các không gian X_{s1} ….. X_{sn} là compắc địa phương và các không gian khác còn lại đều là compắc.

chứng minh.

- (⇒) Giả sử $\prod_{s\in S} X_s$ là Compắc địa phương. Lấy tùy ý x = $\{x_s\}_{s\in S} \in \prod_{s\in S} X_s$. Khi đó tồn tại lân cận U của x sao cho $\overline{U}$ compắc trong $\prod_{s\in S} X_s \Rightarrow$ tồn tại tập $\prod_{s\in S} W_s$ trong đó W_s là lân cận mở của x_s trong X_s, $W_s \neq X_s$ chỉ với một số hữu hạn s ∈ $\{s_1, \ldots, s_n\} \subset S$, sao cho $\prod_{s\in S} W_s \subset U$ (Định lý 3.20) $\prod_{s\in S} \overline{W}_s = \overline{\prod_{s\in S} W_s} \subset \overline{U}$ Định lý 3.21) $\prod_{s\in S} \overline{W}_s$ là tập Compắc trong $\prod_{s\in S} X_s \Rightarrow (\forall s \in S)$. $\overline{W}_s$ là compắc trong Xs (Định lý 4.9). Vì $W_s = X_s$ với mọi $s \in S \setminus \{s_1,\ldots, s_n\}$, nên X_s là compắc với mọi $s \in S \setminus \{s_1 ,\ldots, s \in S$. Các kh ông gian X_{s1} ….. X_{sn} là compắc địa phương bởi vì với mọi $x_{si} \in X_{si}$, $(1 \leq i \leq n)$, tồn tại lân cận W_{si} của x_{si} s ao cho $\overline{W}_{s_i}$ compắc trong X_{si}.

- Giả Sử X_{s1} ………X_{sn} 1à các không gian compắc địa phương, X_s là không gian compắc với mọi $s \in S \setminus \{ s_1 ,..., s_n\}$ Lấy $x= \{x_s\}_{s\in S} \in \prod_{s\in S} X_s$. Khi đó với mọi i, $1 \le i \le n$, tồn tại lân cận W_{si} của x_{si} sao cho $\bar{W}_{s_i}$ compắc trong X_{si}. Ta có tập U = $\prod_{s\in S} X_s$ trong đó $W_s = X_s \ \forall s \in S \setminus \{s_1 ,..., s_n\}$, là lân cận của x trong không gian $\prod_{s\in S} X_s$, và ta có $\overline{U} = \prod_{s\in S} \overline{W}_s$ là tập compắc trong $\prod_{s\in S} X_s$, do đó $\prod_{s\in S} X_s$ là Compắc địa phương. □

§3. COMPẮC HOÁ

Định nghĩa 4.5 Giả sử X là không gian tôpô không compắc, Y là không gian tôpô compắc, φ là phép nhúng đồng phôi X vào Y sao cho φ(x) trù mật trong Y. Khi đó cặp (Y, φ) được gọi là một compắc hoá của X.

Compắc hoá bởi một điểm của không gian không compắc được định nghĩa như sau: giả sử X là không gian tôpô không compắc, N là điểm không thuộc X ($\infty \notin X$), đặt $\overline{X} = X \cup \{\infty\}$, trang bị cho $\overline{X}$ tôpô $\mathcal{T}$ được xác định như sau:

- Nếu $G \subset \overline{X}$ và $\infty \notin G$, thì $G \in \mathcal{T} \Leftrightarrow$ G mở trong X.
- Nếu $G \subset \overline{X}$ và $\infty \in G$, thì $G \in \mathcal{T} \Leftrightarrow \overline{X} \setminus G$ là tập đóng, compắc trong X.

Nhận xét.

a) $(\overline{X}, \mathcal{T})$ là không gian tôpô và X là không gian con của $(\overline{X}, \mathcal{T})$,

b) Phép nhúng i: $X \to \overline{X}$ ($i(x) = x$, với mọi $x \in X$) là phép nhúng đồng phôi từ X vào $\overline{X}$.

Đính lý 4.16. Cặp $(\overline{X}, i)$ là một compắc hoá của X.

Chứng minh.

Ta chứng minh $\overline{X}$ là compắc và X trù mật trong $\overline{X}$. Giả sử $\{U_s\}_{s\in S}$ là một phủ mở của $\overline{X}$. Khi đó tồn tại $s_0 \in S$ sao cho $\infty \in U_{s_0}$. Do và $\overline{X} \setminus U_{s_0}$ là tập đóng compắc trong X, nên tồn tại s_1, …………$s_n \in S$ sao cho $\bigcup_{i=1}^{n} U_{s_i} \supset \overline{X} \setminus U_{s_0}$ vậy họ $\{U_{s_i}\}_{n=1}^{\infty}$ là một phủ con hữu hạn của $\{U_s\}_{s\in S}$ đối với $\overline{X} \Rightarrow \overline{X}$ compắc.

Giả sử U là một lân cận mở bất kỳ của phần tử ∞ trong không gian tôpô $\overline{X}$. Do $\infty \in U$ nên $\overline{X} \setminus U$ là tập đóng compắc trong X, do X không là compắc. nên $\overline{X} \setminus U \neq X$, suy ra $U \cap X \neq \emptyset$. Vậy điểm ∞ là điểm giới hạn của X. Vậy X là tập trù mật trong X. □

Cặp $(\overline{X}, i)$ được gọi là compắc hoá bởi một điểm hoặc compắc hoá Alêchxanđrốp của X.

Nhận xét.

Mọi không gian không compắc bất kỳ đều có compắc hoá bởi một điểm.

Định lý 4.17 Compắc hóa bởi một điểm X là không gian Hausdorff khi. và chỉ khi X là không gian compắc địa phương Hausdorff

Chứng minh.

- Giả sử X là không gian compắc Hausdorff. Khi đó: X =

$\overline{X} \setminus \{\infty\}$ là không gian con mở của $\overline{X}$ $\Rightarrow$ X compắc địa phương Hausdorff

■ Ngược lại, giả sử X là không gian compắc địa phương Hausdorff. Lấy tùy ý $x_1, x_2 \in \overline{X}$, $x_1 \neq x_2$. Nếu $x_1, x_2 \in X$ thì tồn tại các tập mở U, V là lân cận mở của x_1 và x_2 trong X, ($x_1 \in U$, $x_2 \in V$), thoả mãn $U \cap V = \varnothing$ (do X là Hausdorff. Theo cách xây dựng tôpô trong $\overline{X}$, ta có U và V cùng là tập mở trong $\overline{X}$. Nếu một trong hai điểm x_1, x_2 là ∞, chẳng hạn $x_2 = \infty$, thì tồn tại lân cận U trong X của x_1 sao cho $\overline{U}$ compắc trong X (do X compắc địa phương). Theo cách xây dựng tôpô trong $\overline{X}$, $\overline{X} \setminus \overline{U}$ = V là mở trong $\overline{X}$. Như vậy, U và V là 2 lân cận không giao nhau trong $\overline{X}$ của x_1, x_2. Vậy X là không gian compắc địa phương Hausdorff. □

Ví dụ 4.3

Giả sử $\mathbb{C}$ là không gian các số phức. $\mathbb{C}$ là không gian compắc địa phương Hausdorff. Tập $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ với tôpô xác định như trên, cùng với phép nhúng $i : \mathbb{C} \to \overline{\mathbb{C}}$ là compắc hoá bởi một điểm của $\mathbb{C}$. Ta gọi $\overline{\mathbb{C}}$ là mặt phẳng đóng, $\mathbb{C}$ là mặt phẳng mở. $\overline{\mathbb{C}}$ là không gian compắc Hausdorff. Hơn nữa, ta có: $\overline{\mathbb{C}}$ đồng phôi với mặt cầu $S = \{(\xi, \eta, \zeta) \in \mathbb{R}^3 \mid \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = \zeta\}$

Thật vậy trong $\mathbb{R}^3$ ta lấy hệ trục toạ độ Đềcác vuông góc ξ, η, ζ trong đó hai trục ξ, η trùng với trục Ox, Oy của $\mathbb{C}$.

Mặt cầu S có đường kính bằng 1 tiếp xúc với mặt phẳng xOy tại gốc toạ độ. Lấy bất kỳ $M(x, y) \in \mathbb{C}$. Gọi $Z = (\xi, \eta, \zeta)$ là giao điểm của mặt cầu S với đường thẳng nối điểm A(0, 0, 1) và điểm M.

Gọi φ : $\overline{\mathbb{C}} \to S$ là ánh xạ xác định bởi: $\varphi(M) = \begin{cases} Z \text{ nếu } M \in \mathbb{C} \\ A \text{ nếu } M = \infty \end{cases}$

Khi đó φ là một song ánh và với bất kỳ $M(x, y) \in \mathbb{C}$ ta có: $\varphi(M) = (\xi, \eta, \zeta)$ trong đó $\xi = \dfrac{x}{1 + x^2 + y^2}$; $\eta = \dfrac{y}{1 + x^2 + y^2}$

$\zeta = \dfrac{x^2 + y^2}{1 + x^2 + y^2}$, và: $\varphi^{-1}(Z) = \begin{cases} M \text{ nếu } Z \neq A \\ \infty \text{ nếu } Z = A \end{cases}$

Nghĩa là $\varphi^{-1}(\xi, \eta, \zeta) = M(x, y)$, nếu $(\xi, \eta, \zeta) \neq (0, 0, 1) = A$, trong đó $x = \dfrac{\xi}{1-\zeta}$, $y = \dfrac{\eta}{1-\zeta}$ Các ánh xạ φ và φ^{-1} liên tục, cho

nên φ là phép đồng phôi từ $\overline{\mathbb{C}}$ lên S.

§4. KHÔNG GIAN LIÊN THÔNG

Định nghĩa 4.6 Không gian tôpô X được gọi là liên thông nếu không tồn tại các tập mở khác rỗng A và B trong X sao cho $A \cap B = \varnothing$, $X = A \cup B$.

Nhận xét.

■ Không gian X là liên thông nếu và chỉ nếu không tồn tại một tập con thực sự $A \neq \varnothing$ vừa đóng vừa mở của X.

Định nghĩa 4.7 Tập con M của không gian tôpô X được gọi là tập liên thông nếu M cùng với tôpô cảm sinh là không gian liên thông.

Nhận xét.

■ Tập M của không gian tôpô X là liên thông khi và chỉ khi không tồn tại các tập mở A, B trong X sao cho :

$A \cap M \neq \varnothing$, $B \cap M \neq \varnothing$, $A \cap B \cap M = \varnothing$, $M \subset A \cup B$. (*)

Chứng minh.

■ ($\Rightarrow$) Giả sử ngược lại, nghĩa là tồn tại các tập con $A, B \subset X$ thỏa mãn điều kiện (*) ở trên. Khi đó $U = A \cap M$, $V = B \cap M$, là các tập mở khác rỗng trong M thỏa mãn $U \cap V = A \cap B \cap M = \varnothing$, $U \cup V = (A \cap M) \cup (B \cap M) = M \cap (A \cup B) = M$. Vậy M không là tập liên thông (trái giả thiết).

■ ($\Leftarrow$) Giả sử tập M không tiên thông, khi đó tồn tại hai tập mở khác rỗng U và V trong M thỏa mãn $U \cap V = \varnothing$, $M = U \cup V$ $\Rightarrow$ tồn tại hai tập mở khác rỗng A và B trong X thỏa mãn U =

$A \cap M$, $V = B \cap M \Rightarrow A \cap M = \emptyset$, $B \cap M = \emptyset$, $A \cap B \cap M = \emptyset$, $M \subset A \cup B$. Mâu thuẫn với giả thiết. □

Định lý 4.18. Nếu trong không gian tôpô X có một tập liên thông trù mật M, thì X là không gian liên thông.

Chứng minh.

Giả sử không gian tôpô X không liên thông. Khi đó tồn tại hai tập mở A, B khác rỗng sao cho $A \cap B = \emptyset$, $X = A \cup B$. Vì M trù mật trong X, cho nên $A \cap M = \emptyset$, $B \cap M = \emptyset$. Ta có $A \cap B \cap M = \emptyset$, $M \subset A \cup B$ suy ra M không phải là liên thông, điều này trái với giả thiết. Vậy X liên thông. □

Hệ quả. Giả sử A là liên thông của X, $A \subset B \subset \overline{A}$. Khi đó B là tập liên thông.

Chứng minh.

Vì A là tập liên thông trù mật của không gian B nên B liên thông. □

Định lý 4.19. Hợp của một họ tùy ý những tập con liên thông có giao khác rỗng trong X là một tập liên thông của X.

Chứng minh.

Giả sử $\{M_s\}_{s \in S}$ là một họ các tập con liên thông của X thỏa mãn $\bigcap_{s \in S} M_s \neq \emptyset$ nhưng $M = \bigcup_{s \in S} M_s$ không là tập liên thông. Khi đó, tồn tại hai tập mở $A, B \subset X$ sao cho: $A \cap M \neq \emptyset$, $B \cap M \neq \emptyset$, $A \cap B \cap M = \emptyset$, $M \subset A \cup B$. Lấy tùy $x \in \bigcap_{s \in S} M_s$. Vì $x \in M$ nên x thuộc một trong hai tập A, B. Giả sử $x \in A$. Ta có $B \cap M = \emptyset \Rightarrow \exists s_0 \in S$ sao cho $B \cap M_{S0} = \emptyset$, $x \in A \cap M_{S0} \Rightarrow A \cap M_{S0} = \emptyset$, hơn nữa ta có $A \cap B \cap M_{S0} = \emptyset$. Và $M_{S0} \subset A \cup B$. Vậy M_{S0} không liên thông. Mâu thuẫn với giả thiết. Vậy tập M là liên thông. □

Hệ quả 1. Giả sử với mọi x, y $\in$ X luôn tồn tại tập liên thông chứa x và y Khi đó không gian tôpô X là liên thông.

Chứng minh.

Lấy bất kỳ a $\in$ X, khi đó với mọi x $\in$ X theo giả thiết tồn tại tập liên thông C_x chứa a và x. Vì a $\in \bigcap_{x\in X} C_x$ nên X = $\bigcup_{x\in X} C_x$ liên thống. □

Hệ quả 2. Giả sử A, B $\subset$ X, B là tập liên thông. Nếu B có điểm chung với A và với X\A, thì B có điểm chung với biên của tập A là b(A).

Chứng minh.

Giả sử B $\cap$ b(A) = $\varnothing$, ta có B $\cap$ b(X \ A) = $\varnothing$. nghĩa là B $\subset$ $A^0 \cup$ (X \ A^0, vì B có điểm chung với A và X \ A nên : B $\cap$ A^0 $\neq \varnothing$. Và B $\cap$ $(X \setminus A)^0 \neq \varnothing$. Do A^0 và $(X\setminus A)^0$ là các tập mở không giao nhau nên theo nhận xét trên tập B là không liên thông (mâu thuẫn với giả thiết). □

Hệ quả 3. Mọi tập con thực sự, khác $\varnothing$ của không gian liên thông đều có ít nhất một điểm biên.

Chứng minh.

Giả sử *X* là không gian tôpô liên thông, A $\subset$ X, A $\neq \varnothing$, A $\neq$ X.

Khi đó với B = X, rõ ràng B có giao khác rỗng với A và X\A, vì B là tập liên thông theo nhận xét trên ta có b(A) $\neq \varnothing$. □

Định lý 4.20. Ảnh của một tập liên thông qua ánh xạ liên tục là tập liên thông.

Chứng minh.

Giả sử f : X $\to$ Y là ánh xạ liên tục lừ không gian tôpô X đến không gian tôpô Y, A là tập liên thông trong X. Ta chứng minh B = f(A) là tập liên thông trong Y. Giả sử B là tập không liên thông. Khi đó tôpô tại hai tập mở M, N khác $\varnothing$ sao cho $M \cap B \neq \varnothing$, $N \cap B \neq \varnothing$, $M \cap N \cap B = \varnothing$, $B \subset M \cup N$. Do f là ánh xạ liên tục nên f làm và $f^{-1}(N)$ là những tập mở trong X, rõ ràng $f^{-1}(M) \cap A \neq \varnothing$. $f^{-1}(N) \cap A \neq \varnothing$, $f^{-1}(M) \cap f^{-1}(N) \cap A = \varnothing$ và $A \subset f^{-1}(M) \cup f^{-1}(N)$ (mâu thuẫn với A liên thông). Vậy f(A) = B là tập liên thông. □

Định lý 4.21. X không là không gian liên thông khi và chỉ khi tồn tại toàn ánh liên tục $f : X \rightarrow Y$, trong đó Y là không gian tôpô rời rạc có ít nhất 2 phần tử.

Chứng minh.

■ ($\Rightarrow$) Giả sử không gian tôpô X không là không gian liên thông. Khi đó $\exists$A, B là các tập mở khác $\varnothing$ trong X sao cho $A \cap B = \varnothing$, $X = A \cup B$. Gọi Y là không gian rời rạc gồm hai phần tử a, b. Khi đó ta có ánh xạ $f: X \rightarrow Y$ được xác định bởi : f(x) = a, ($\forall x \in A$), và f(y) = b ($\forall y \in B$), là một toàn ánh liên tục, theo định lý (4.20)

■ ($\Leftarrow$) Giả sử $\exists$ toàn ánh liên tục $f : X \rightarrow Y$, trong đó Y là một không gian rời rạc có ít nhất hai phần tử. Khi đó X không là không gian liên thông, bởi vì nếu X liên thông thì theo định lý (4.20), Y liên thông, mâu thuẫn với giả thiết Y là không gian rời rạc. □

Định lý 4.22.

a) Tích Đề các $\prod_{s \in S} X_s$ của một họ không gian liên thông $\{X_s\}_{s \in S}$ là liên thông.

b) Nếu tích Đề các $\prod_{s\in S} X_s$ liên thông thì không gian X_s là liên thông ($\forall s \in S$).

Chứng minh.

a) Giả sử X_s liên thông ($\forall s \in S$), nhưng không gian tích $\prod_{s\in S} X_s$ không là không gian liên thông. Khi đó $\exists$toàn ánh liên tục f : $\prod_{s\in S} X_s \rightarrow Y$, trong đó Y là không gian rời rạc có ít nhất 2 phần tử (định lý 4.21). Lấy $a = (a_s)_{s\in S} \in \prod_{s\in S} X_s$. Với bất kỳ $S_0 \in S$, gọi $J_{s0} : X_{s0} \rightarrow \prod_{s\in S} X_s$ là ánh xạ xác định bởi $j_{s0}(x_{s0})$ = $x = (x_s)_{s\in S}$ trong đó: $x_s = \begin{cases} x_{s_0} \text{ nếu } s = s_0 \\ a_s \text{ nếu } s \neq s_0 \end{cases}$

Khi đó ánh xạ tích $f_{s0} = f.j_{s0} : X_{s0} \rightarrow Y$ là liên tục, bởi vì phép nhúng j_{s0} và f đều liên tục. Do X_{s0} liên thông cho nên (theo định lý 4.20) ta có $f_{s0}(X_{s0})$ là tập liên thông $\Rightarrow f_{s0}$ là ánh xạ hằng. Như vậy $f(x) = f(a)$ với mọi $x = (x_s)_{s\in S}$ mà $x_s = a_s$ ($\forall s \neq s_0$).

Bằng quy nạp ta có $f(x) = f(a)$ với mọi $x = (x_s)_{s\in S}$ mà $x_s = a_s$ với mọi $s \in S$ trừ ra một số hữu hạn phần tử của S. Tập A gồm các điểm x như vậy là trù mật trong X. Thật vậy giả sử U là tập mở khác rỗng trong X, khi đó tồn tại một tập $\prod_{s\in S} X_s \subset U$, trong đó mỗi W_s là tập mở trong X_s, $W_s = X_s$, ($\forall s \in S \setminus \{s_1,...,s_n\}$). Điểm $x = (x_s)_{s\in S}$ với $x_{si} \in W_{si}$ ($1 \leq i \leq n$) và $x_s = a_s$, ($\forall s \notin \{s_1, \dots, s_u\}$) là điểm chung của U và A. Vậy A trù mật trong X.Vì Y là không gian Hausdorff, A trù mật trong X, và f liên tục thoả mãn f(x) = f(a), ($\forall$x $\in$ A), do đó f(x) = f(a) ($\forall$x $\in$ X). Điều này không thể xảy ra, vì f toàn ánh từ X lên Y có ít nhất 2 phần tử.

b) Phép chiếu: $p_s : \prod_{s\in S} X_s \to X_s$ là toàn ánh liên tục ($\forall$s $\in$ S).

Vì vậy, nếu $\prod_{s\in S} X_s$ là liên thông, thì X_s liên thông. □

Định lý 4.23. Không gian thương của một không gian liên thông là liên thông.

Chứng minh.

Giả sử X liên thông, $\mathcal{R}$ là một quan hệ tương đương trên X. Vì ánh xạ thương p : X $\to$ $X/\mathcal{R}$ là toàn ánh liên tục đối với tôpô thương nên $X/\mathcal{R}$ liên thông. □

Nhận xét.

Với x $\in$ X hợp của tất cả các tập liên thông trong X chứa phần tử x cũng liên thông. Đó là tập liên thông lớn nhất trong X chứa x.

Định nghĩa 4.8. Tập liên thông lớn nhất trong không gian X chứa phần tử x $\in$ X được gọi là thành phần liên thông của điểm x.

Nếu x $\in$ A $\subset$ X thì thành phần liên thông của x trong không gian con A được gọi là thành phần liên thông của x trong A.

Nhận xét.

- Nếu X là không gian liên thông thì X là thành phần liên thông của mỗi điểm thuộc nó.
- Nếu tập A vừa mở vừa đóng trong X, thì A chứa các thành phần liên thông trong X của mỗi điểm thuộc A.

Thật vậy, lấy tùy ý x $\in$ A, giả sử C là thành phần liên thông của x trong X thoả mãn $C \not\subset A$, khi đó $A \cap C$ là tập con thực sự, khác $\varnothing$ vừa đóng, vừa mở trong không gian con C của X. Điều này không thể xảy ra vì C liên thông.

- Thành phần liên thông của mỗi điểm x nằm trong giao của tất cả các tập vừa mở vừa đóng chức x.

Định lý4.24. Trong không gian tôpô X ta có:

a) Thành phần liên thông của mỗi điểm là tập đóng.

b) Quan hệ hai ngôi $\mathcal{R}$ trên X xác định bởi : "$y\mathcal{R}x \Leftrightarrow$ y thuộc thành phần liên thông C_x" của điểm x là một quan hệ tương đương trong X. Mỗi thành phần liên thông của một điểm trong X là một lớp tương đương của quan hệ $\mathcal{R}$

Chứng minh.

a) Gọi C_x là thành phần liên thông của điểm $x \in X$, khi đó C_X liên thông. Từ định nghĩa $C_x \Rightarrow \overline{C}_x = C_x$ vậy C_x là tập đóng.

b) Hiển nhiên $\mathcal{R}$ là phản xạ và đối xứng. Ta chứng minh quan hệ $\mathcal{R}$ là bắc cầu. Giả sử x, y, $z \in X$, $y\mathcal{R}x$ và $z\mathcal{R}y$, tức là $y \in C_x$ và' $z \in C_y$. Từ đó ta có $y \in C_x \cap C_y \Rightarrow C_x \cup C_y$ là tập liên thông $\Rightarrow C_x \cup C_y = C_x \Rightarrow z \in C_x \Rightarrow z\mathcal{R}x$

Rõ ràng thành phần liên thông của x là lớp tương đương chứa x. □

Định lý 4.25 Trong tích Đề các $\prod_{s\in S} X_s$ của một họ các không gian tôpô $\{x_s\}_{s\in S}$ thành phần liên thông của điểm $x = \{x_s\}_{s\in S} \in \prod_{s\in S} X_s$ là tích Đềcác $\prod_{s\in S} C_s$ của các thành phần liên thông C_s của diềm x_s trong X_s.

Chứng minh.

Theo định lý (4.22) ta có $\prod_{s\in S} C_s$ là tập liên thông chứa x trong không gian tôpô $\prod_{s\in S} X_s$. Mặt khác nếu A là tập liên thông trong $\prod_{s\in S} X_s$ chứa x thì $p_s(A)$ là tập liên thông trong X_s chứa x_s ($\forall s \in S$), vì phép chiếu $p_s : \prod_{s\in S} X_s \to X_s$ là ánh xạ liên tục. Do đó $p_s(A) \subset C_s$, $\forall s \in S$, và vì vậy $A \subset$ n $\prod_{s\in S} C_s \Rightarrow \prod_{s\in S} C_s$ là tập liên thông lớn nhất trong $\prod_{s\in S} X_s$ chứa x. Vậy $\prod_{s\in S} C_s$ là thành phần liên thông của x. □

Định lý 4.26. Tập các số thực $\mathbb{R}$ với tổng tự nhiên là một không gian hơn thông.

Chứng minh:

Giả sử $\mathbb{R}$ không liên thông. Khi đó trong $\mathbb{R}$ tồn tại một tập con thực sự khác $\emptyset$, vừa đóng vừa mở A $\Rightarrow \exists r \in \mathbb{R}\backslash A$. Hiển nhiên $A \subset (-\infty, r) \cup (r, +\infty)$. Đặt $B = A \cap (-\infty, r)$, $C = A \cap (r, +\infty)$. Ta có $A = B \cup C$ (vì $A \neq \emptyset$).

Nếu $B \neq \emptyset$, ta có tập B bị chặn trên bởi số r cho nên có cận trên đúng $b = \sup B \leq r$. Từ đó suy ra tồn tại dãy $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset B$ sao cho $\lim_{n\to\infty} x_n = b$. Vì $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ cũng là một dãy của tập đóng A cho nên $b \in A$. Do đó, $b < r$ và như vậy $b \in B$.

Vì B là tập mở trong $\mathbb{R}$ cho nên $\exists \varepsilon > 0$ sao cho $(b - \varepsilon, b + \varepsilon) \subset B$, $(b + \varepsilon < r)$. Số thực $x = (b + \frac{\varepsilon}{2})$ là một phần tử của. B và $x > b$. Điều này không thể xảy ra vì b là cận trên của B.

Trường hợp $B = \varnothing$ kéo theo $C \neq \varnothing$, ta cũng chứng minh một cách tương tự. Vậy không gian tôpô $\mathbb{R}$ liên thông. □

Nhận xét.

- Không gian Euclid $\mathbb{R}^n$ là không gian liên thông.
- Mỗi khoảng mở bất kỳ trong $\mathbb{R}$ là liên thông.
- Mỗi khoảng đóng hoặc nửa đóng trong $\mathbb{R}$ là liên thông.

Định lý 4.27 Nếu tập A liên thông trong lễ thì A là một khoảng.

Ta hiểu khoảng ở đây là khoảng mở, hoặc đóng hoặc nửa đóng nửa mở.

Chứng minh.

Ta chỉ cần chứng minh rằng nếu $a, b \in A$, $a < b$ thì $A \supset [a, b]$. Giả sử $\exists c \notin A$ sao cho $a < c < b$. Khi đó $B = (-\infty, c)$ và $C = (c, \infty)$ mở trong $\mathbb{R}$, $B \cap C = \varnothing$. $B \cap A \neq \varnothing$, $C \cap A \neq \varnothing$ $A \subset B \cup C$. Suy ra A không liên thông (mâu thuẫn với giả thiết). □

Ta chứng minh một mở rộng của định lý Bonzano - Côsi trong giải tích cổ điển.

Định lý 4.28. Giả sử $f : X \to$ (R là hàm liên tục trên không gian liên thông X, $a, b \in X$, $f(a) < f(b)$. Khi đó với mọi $C \in [f(a), f(b)]$, tồn tại $c \in X$ sao cho $f(c) = C$.

Chứng minh.

X liên thông suy ra f(x) liên thông trong $\mathbb{R}$, (định lý 4.20) $\Rightarrow$ f(X) là một khoảng (định lý 4.27) $\Rightarrow [f(a), f(b)] \subset f(X) \Rightarrow C \in f(X) \Rightarrow \exists c \in X$ thỏa mãn $f(c) = C$. □

Một trường hợp riêng của không gian liên thông là không gian liên thông cung.

Định nghĩa 4.9. Không gian tôpô X được gọi là liên thông cung, nếu với mọi a, b $\in$ X, luôn tồn tại ánh xạ f : [0, 1] $\to$ X liên tục sao cho f(0) = a, f(1) = b.

Ánh xạ f được gọi là cung nối hai điểm a và b, a được gọi là điểm đầu, b được gọi là điểm cuối của cung.

Nhận xét.

a) Nếu không gian tôpô X là liên thông cung thì X liên thông.

Thật vậy, do [0, 1] là tập liên thông trong $\mathbb{R}$, và ánh xạ f liên tục nên tập f[0,1], lá là liên thông trong X. Tập liên thông này chứa mọi cặp điểm a, b $\in$ X. Khi cố định điểm a, cho b chạy khắp X, dù ánh xạ f có thay đổi nhưng vẫn luôn tồn tại một tập liên thông chứa cặp điểm đó. Vậy X là hợp của một họ các tập liên thông trong X có giao khác rỗng. Vậy X là không gian liên thông.

b) Một không gian liên thông chưa chắc đã liên thông cung.

c) Giả sử X là không gian tôpô, A $\subset$ X khi đó, một cung bất kỳ nối điểm a $\in A^0$ với điểm b $\in (X\backslash A)^0$ ắt phải cắt biên bản của A. Ta nói cung f: [0, 1] $\to$ X cắt bao nếu f ([0, 1]) $\cap$ b(A) $\neq \varnothing$.

BÀI TẬP

1. Chứng minh rằng:

a) Hợp của hai tập compắc trong không gian tôpô là tập compắc.

b) Nếu U là tập con mở và A là tập compắc trong không gian tôpô X thì A \ U là tập compắc.

c) Giao của một họ bất kỳ những tập con đóng compắc trong không gian tôpô X là một tập đóng compắc.

d) Cho không gian tôpô X, $A \subset B \subset X$. Chứng minh rằng nếu $\overline{B}$ là tập compắc thì $\overline{A}$ cũng là tập compắc.

2. Hãy cho ví dụ chứng tỏ giao của hai tập compắc trong không gian tôpô chưa chắc là tập compắc.

3. Chứng minh rằng khoảng mở (a, b) trong không gian tôpô $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ không phải là tập compắc.

4. Trong không gian tôpô Chi, bị hãy cho ví dụ một tập đóng bị chặn nhưng không là tập compắc.

5. Cho A, B là những tập con đóng, compắc rời nhau trong không gian mêtric (X, d). Chứng minh rằng tồn tại $x \in A$ và $y \in B$ sao cho $d(x, y) = d(A, B)$.

6. Cho X là không gian tôpô compắc. $F_1 \supset F_2 \supset \ldots \supset F_k \supset \ldots$ là một dãy đơn điệu giảm những tập con đóng trong X thỏa mãn $\bigcap_{k=1}^{\infty} F_k = \phi$ Chứng minh rằng tồn tại một số tự nhiên n sao cho $F_n = \varnothing$.

7. Cho X là không gian compắc, Y là không gian Hausdorff, f : $X \to Y$ là ánh xạ lên tục. Chứng minh rằng f là ánh xạ đóng.

8. Trong không gian $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ cho . $X = \{0\} \cup \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}^*\}$ Chứng minh rằng X là tập compắc.

9. Xét tính compắc của tập các số. hữu tỉ $\mathbb{Q}$ trong $\mathbb{R}$. với các tôpô tương ứng lần lượt là $\mathcal{T}_T$, $\mathcal{T}_K$, $\mathcal{T}$, $\mathcal{T}_S$. $\mathcal{T}_D$.

10. Trong tập $\mathbb{R}^2$ với tổng tự nhiên hãy xét xem các tập sau có là compắc hay không:

a) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \le r^2, r > 0, (x, y) \neq (0, 0)\}$.

b) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \leq 0\}$

c) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = \frac{1}{x}, 0 < x \leq 1\}$

d) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = \sin\frac{1}{x}, 0 < x \leq 1\}$

11. Cho Y là một tập hợp vô hạn phần tử, a, b $\notin$ Y, đặt X = {a,b} $\cup$Y. Gọi $\mathcal{T}$ là họ tập con của X.được xác định như sau: X $\in \mathcal{T}$, mọi phần bù của các tập con hữu hạn trong X đều là phần tử của $\mathcal{T}$, mọi tập con của Y đều là phần tử của $\mathcal{T}$.

a) Chứng minh rằng $\mathcal{T}$ là một tôpô trên X.

b) Xét tính compắc của các tập con sau trong X : Y, A = Y $\cup$ {a} , B = Y U {b}

12. Hãy xét xem những không gian tôpô sau có là compắc địa phương hay không :

a) Tập $\mathbb{R}$ với tổng $\mathcal{T}_{s.}$

b) Tập $\mathbb{Q}$ trong $\mathbb{R}$ đối với tổng tự nhiên.

13. Hãy xét tính liên thông của các không gian tôpô dưới đây:

a) Không gian tôpô ($\mathbb{R}$, $\mathbb{R}_k$).

b) Tập các số hữu tỉ $\mathbb{Q}$ trong ($\mathbb{R}$, $\mathcal{T}$).

c) Tập các số vô tỉ trong ($\mathbb{R}$, $\mathcal{T}$)

d) Tập các số tự nhiên $\mathbb{N}$ trong ($\mathbb{R}$, $\mathcal{T}$).

e) Tập các số phức $\mathbb{C}$ với tôpô tự nhiên.

14. a) Hãy đưa ra ví dụ để chứng tỏ rằng ảnh của một tập không liên thông qua ánh xạ liên tục chưa chắc đã là tập không liên thông.

b) Chứng minh rằng tạo ảnh của tập không liên thông qua một toàn ánh liên tục là tập không liên thông.

15. Chứng minh rằng nếu X là không gian tôpô hoàn toàn chính quy, liên thông có nhiều hơn một phần tử thì X có lực lượng không đếm được.

16. Chứng minh rằng nếu X là không gian tôpô Hausdorff và M là không gian con compắc địa phương trù mật trong X thì M là tập mở trong X.

17. Giả sử X là không gian tôpô compắc địa phương Hausdorff. Chứng minh rằng mỗi tập con A của X là compắc địa phương khi và chỉ khi A là giao của một tập con mở và một tập con đóng trong X.

MỤC LỤC

Chịu trách nhiệm xuất bản
Giám đốc ĐINH NGỌC BẢO
Tổng biên tập LÊ A

Hội đồng thẩm định
GS. TSKH NGUYỄN VĂN KHUÊ (CT)
PGS. TSKH LÊ MẬU HẢI (UV)
PGS. TS PHẠM KHẮC BAN (UV)

Biên tập
TĂNG VĂN LONG

Trình bày bìa
PHẠM VIỆT QUANG