

Chuyên đề 3. CHỮ SỐ TẬN CÙNG CỦA MỘT SỐ TỰ NHIÊN

1. Phương pháp giải toán qua các bài toán.

Ví dụ 1. Tìm chữ số hàng đơn vị của số 17^{2002}

Hướng dẫn

Ta có: $17^2 \equiv 9 \pmod{10} \Rightarrow (17^2)^{1000} = 17^{2000} \equiv 9^{1000} \pmod{10}$

Mặt khác ta lại có: $9^2 \equiv 1 \pmod{10} \Rightarrow 9^{1000} \equiv 1 \pmod{10}$

$\Rightarrow 17^{2000} \equiv 1 \pmod{10} \Rightarrow 17^{2000} \cdot 17^2 = 17^{2002} \equiv 1 \cdot 9 \equiv 9 \pmod{10}$.

Vậy chữ số tận cùng của 17^{2002} là 9

Ví dụ 2. Tìm chữ số hàng chục của số 23^{2005} .

Hướng dẫn

Ta có:

$$23^1 \equiv 23 \pmod{100}$$

$$23^2 \equiv 29 \pmod{100}$$

$$23^3 \equiv 67 \pmod{100}$$

$$23^4 \equiv 41 \pmod{100}$$

Do đó:

$$23^{20} = (23^4)^5 \equiv 41^5 \equiv 01 \pmod{100} \Rightarrow 23^{2000} \equiv 01^{100} \equiv 01 \pmod{100}$$

$$\Rightarrow 23^{2005} = 23^1 \cdot 23^4 \cdot 23^{2000} \equiv 23 \cdot 41 \cdot 01 \equiv 43 \pmod{100}$$

Vậy chữ số hàng chục của số 23^{2005} là 4

Ví dụ 3. Tìm hai chữ số tận cùng của $S = 1 + 3 + 3^2 + 3^3 + \dots + 3^{30}$

Hướng dẫn

Cách 1: (tính trên máy tính casio fx-570ES và các máy tính điện tử có tính năng tương đương)

$$\text{Ta có : } S = \frac{3^{31} - 1}{3 - 1} = \frac{3^{31} - 1}{2}$$

Thực hiện phép chia $\frac{3^{31} - 1}{2}$ trên máy tính điện tử ta được kết quả $\frac{3^{31} - 1}{2} \approx 3,088366981 \cdot 10^{14}$,

suy ra kết quả $S = \frac{3^{31} - 1}{2}$ là một số có 15 chữ số mà 9 chữ số đầu tiên (tính từ bên trái sang) là

308836698, khi đó bấm $Ans - 3,08836698 \cdot 10^{14}$ ta được kết quả là 141973, tức là 6 chữ số tiếp theo (cũng là 6 chữ số tận cùng) của S là 141973. Do đó chữ số tận cùng của S là chữ số 3.

Cách 2:

Sử dụng kết quả $a^{4n+1} \equiv a \pmod{10} \forall n, a \in \mathbb{N}$ ta suy ra:

$$3^{13} \equiv 3 \pmod{10}, 3^{14} \equiv 3^2 \pmod{10}, \dots, 3^{25} \equiv 3 \pmod{10}, \dots, 3^{30} \equiv 3^6 \pmod{10}$$

$$\Rightarrow S \equiv 1 + (3 + 3^2 + \dots + 3^{12}) + (3 + 3^2 + \dots + 3^{12}) + (3 + 3^2 + \dots + 3^6) = 1595413 \equiv 3 \pmod{10}$$

Vậy chữ số tận cùng của S là chữ số 3.

Ví dụ 4. Tìm hai chữ số tận cùng của số 12^{2010}

Đề thi học sinh giỏi GTTMTĐT của tỉnh Cà Mau, 2010-2011

Hướng dẫn

Cách 1:

$$12^5 \equiv 32 \pmod{10^2}$$

$$\Rightarrow 12^{10} \equiv 32^2 \equiv 24 \pmod{10^2}$$

$$\Rightarrow 12^{30} \equiv 24^3 \equiv 24 \pmod{10^2}$$

$$\Rightarrow 12^{60} \equiv 24^2 \equiv 76 \pmod{10^2}$$

$$\Rightarrow 12^{1980} = (12^{60})^{33} \equiv 76^{33} \equiv 76 \pmod{10^2}$$

$$\Rightarrow 12^{2010} = 12^{1980} \cdot 12^{30} \equiv 76 \cdot 24 \equiv 24 \pmod{10^2}$$

Vậy hai chữ số tận cùng của số 12^{2010} là 24.

Cách 2:

Ta có:

$$12^{20} \equiv 76 \pmod{10^2}$$

$$\Rightarrow 12^{2000} = (12^{20})^{100} \equiv 76^{100} \equiv 76 \pmod{10^2}$$

$$\Rightarrow 12^{2010} = 12^{2000} \cdot 12^{10} \equiv 76 \cdot 12^{10} \equiv 24 \pmod{10^2}$$

Vậy hai chữ số tận cùng của số 12^{2010} là 24.

Ví dụ 5. Tìm chữ số cuối cùng của số 2^{3^4}

Hướng dẫn

Cách 1:

Xét các lũy thừa của 2 khi chia cho 10, ta được kết quả sau:

2^1	2^2	2^3	2^4	2^5	2^6	2^7	2^8	2^9	2^{10}	2^{11}	...
(2	4	8	6)	(2	4	8	6)	(2	4	8	...

Hàng thứ hai cho ta thấy rằng các số dư lặp lại tuần hoàn chu kỳ 4 số (2, 4, 8, 6).

Ta có: $3^4 = 81 \equiv 1 \pmod{4} \Rightarrow$ số dư khi chia 2^{3^4} cho 10 là 2

Vậy chữ số cuối cùng của số 2^{3^4} là chữ số 2.

Cách 2:

Ta có: $2^{20} \equiv 76 \pmod{10^2} \Rightarrow 2^{80} \equiv 76^4 \equiv 76 \pmod{10^2}$

$$\Rightarrow 2^{3^4} = 2^{81} = 2^{80} \cdot 2 \equiv 76 \cdot 2 = 152 \equiv 52 \pmod{10^2}$$

Vậy chữ số tận cùng của số 2^{3^4} là chữ số 2

Nhận xét: vận dụng kiến thức đồng dư thức vẫn đi đến kết quả, tuy nhiên cách làm ở cách 1 cũng có điều thú vị.

Ví dụ 6. Cho $B = 101^{10} + 102^{11} + 103^{12} + 104^{13} + 105^{14}$. Tìm hai chữ số tận cùng của B
Đề thi học sinh giỏi GTTMTĐT vòng 1 của TP. HCM, 2008-2009

Hướng dẫn

Hai chữ số tận cùng của B cũng bằng hai chữ số tận cùng của tổng

$A = 01^{10} + 02^{11} + 03^{12} + 04^{13} + 05^{14}$. Vì $A = 6171157979$ nên hai chữ số tận cùng của B là 79

Nhận xét: nếu tính toán có sử dụng máy tính điện tử kết hợp với tính trên giấy thì ta được giá trị của B là $B = 19967261650217155351815877579$, từ đó cũng kết luận được hai chữ số tận cùng của B là 79

Ví dụ 7. Tìm hai chữ số cuối cùng của số $2^{1999} + 2^{2000} + 2^{2001}$
Đề thi học sinh giỏi GTTMTĐT dự bị cấp khu vực, 2001-2002

Hướng dẫn

Cách 1:

Ta có: $2^{20} \equiv 76 \pmod{10^2}$

Suy ra:

$$2^{1980} = (2^{20})^{99} \equiv 76^{99} \equiv 76 \pmod{10^2}$$

$$\Rightarrow 2^{1999} = 2^{1980} \cdot 2^{19} \equiv 76 \cdot 2^{19} \equiv 88 \pmod{10^2}$$

$$\text{Do đó suy ra } 2^{1999} + 2^{2000} + 2^{2001} \equiv 88 + 2 \cdot 88 + 2^2 \cdot 88 = 616 \equiv 16 \pmod{10^2}$$

Vậy hai chữ số tận cùng của số $2^{1999} + 2^{2000} + 2^{2001}$ là 16

Cách 2:

Xét các lũy thừa của 2 khi chia cho 100, ta được bảng kết quả sau:

2^1	2^2	2^3	2^4	2^5	2^6	2^7	2^8	2^9	2^{10}	2^{11}	2^{12}
2	(4	8	16	32	64	28	56	12	24	48	96

2^{13}	2^{14}	2^{15}	2^{16}	2^{17}	2^{18}	2^{19}	2^{20}	2^{21}	2^{22}	2^{23}	2^{24}
92	84	68	36	72	44	88	76	52	(4	8	16

⇒ các số dư lặp lại tuần hoàn theo chu kì 20 số (từ số 4 đến số 52).

Ta có:

$$1999 \equiv 19 \pmod{20} \Rightarrow \text{số dư khi chia } 2^{1999} \text{ cho } 100 \text{ là } 88$$

$$2000 \equiv 0 \pmod{20} \Rightarrow \text{số dư khi chia } 2^{2000} \text{ cho } 100 \text{ là } 76$$

$$2001 \equiv 1 \pmod{20} \Rightarrow \text{số dư khi chia } 2^{2001} \text{ cho } 100 \text{ là } 52$$

$$\Rightarrow 88 + 76 + 52 = 216 \equiv 16 \pmod{100}$$

⇒ số dư của số $A = 2^{1999} + 2^{2000} + 2^{2001}$ khi chia cho 100 là 16 hay hai chữ số cuối cùng của số A là 16.

Nhận xét về phương pháp giải toán:

Để tìm k chữ số tận cùng của một số tự nhiên dạng lũy thừa A , chúng ta có thể giải theo các cách giải sau:

- **Cách 1 (sử dụng đồng dư thức):** yêu cầu tìm k chữ số tận cùng của một số A dạng lũy thừa tương đương yêu cầu tìm số dư của phép chia số A với 10, 100, 1000, 10000,...

Do đó k chữ số tận cùng của một số A chính bằng số dư khi chia A cho 10^k .

- **Cách 2 (sử dụng qui luật số lũy thừa):** muốn tìm k chữ số của một số dạng lũy thừa thì ta thực hiện các bước sau:

- **Bước 1:** Tìm chu kì tuần hoàn j của k chữ số sau lần thứ m lũy thừa.

- **Bước 2:** Tìm số dư khi chia số lũy thừa cho j .

- **Bước 3:** Kết luận k chữ số cần tìm qua phép đếm (dùng đồng dư thức).

Cả hai cách trên đều sử dụng kiến thức về đồng dư thức trong thực hành tính toán.

Với kiến thức về đồng dư thức, chúng ta có thể giải quyết được các bài toán tìm k chữ số tận cùng của một số nguyên, tìm số dư trong phép chia 2 số nguyên có chứa lũy thừa ở số bị chia...

Ngoài ra, nếu kết hợp thêm các ghi nhớ về các chữ số bất biến khi lũy thừa bất kì và kĩ năng phân tích thành nhân tử hằng số nhạy bén thì sẽ rút ngắn thời gian làm bài và tránh nhầm lẫn.

Phương pháp tìm chu kì các chữ số khi lũy thừa cũng mang lại nhiều kết quả thú vị, tính hiệu quả của cách làm này trong một số bài toán đặc biệt sẽ nhanh hơn sử dụng đồng dư thức.

2. Bài tập tự luyện.

Bài 1. Tìm ba chữ số tận cùng của số $3^{2^{1991}}$

Đề thi học sinh giỏi GTTMTĐT của huyện Nho Quan, 2008-2009

Bài 2. Tìm ba chữ số cuối cùng của số 7^{3411}

Bài 3. Tìm chữ số hàng đơn vị, hàng chục, hàng trăm, hàng nghìn của số tự nhiên $A = 2011^{2010}$

Đề thi học sinh giỏi GTTMTĐT của tỉnh Thừa Thiên Huế, 2010-2011

Bài 4. Tìm chữ số hàng trăm của số 29^{2007}

Đề thi học sinh giỏi GTTMTĐT của tỉnh Thừa Thiên Huế, 2005-2006

Bài 5. Tìm chữ số hàng nghìn của số sau: $6^{5^{12}}$

Bài 6. Tìm chữ số hàng chục của số 23^{2005}

Bài 7. Tìm 4 chữ số cuối của 1996^{2010}

Bài 8. Tìm 5 chữ số hàng tận cùng của số 6^{2005}

Bài 9. Tìm 3 chữ số tận cùng của số $A = 2^1 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{2010}$

Bài 10. Tìm tổng các chữ số hàng đơn vị, hàng chục và hàng trăm của số sau:

$$M = 2415^{23} + 632^{324} + 23^{243}$$

Bài 11. Tìm 3 chữ số tận cùng của $C = 5^{2009} + 5^{2010} + 5^{2011}$

Bài 12. Tìm 3 chữ số tận cùng của số tự nhiên sau: $2^{231} \cdot 42^{245} \cdot 23^{41}$

Bài 13. Tìm 3 chữ số tận cùng của số $M = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 2010^2 + 2011^2 + 124254^3$

Bài 14. Tìm 4 chữ số tận cùng của tích các số tự nhiên sau:

$$N = 1354768368949.93664736753.9474663648386.75765.878.98$$

Nguyễn Văn Chạy

Giáo viên trường THCS&THPT Bàu Hàm, xã Bàu Hàm, huyện Trảng Bom, tỉnh Đồng Nai

Số nhà: 21/5, khu 4, ấp Hưng Bình, xã Hưng Thịnh, huyện Trảng Bom, tỉnh Đồng Nai.

Email: vanchaybauham@gmail.com

Điện thoại: 0935.237.247