

CHUYÊN ĐỀ:

SỬ DỤNG HÀM SINH GIẢI BÀI TOÁN TỔ HỢP

Lời nói đầu

Tổ hợp là một lớp các bài toán khó, xuất hiện nhiều trong các kì thi học sinh giỏi. Nói đến tổ hợp chúng ta không thể không nhắc tới những bài toán đếm có nhiều ứng dụng trong thực tiễn. Với sự yêu thích môn tổ hợp vừa bởi vì độ khó của nó, vừa bởi sự thích thú và vui sướng khi chinh phục được một bài toán tổ hợp khó, tìm được lời giải cho bài toán tổ hợp giống như một chàng trai chinh phục được một cô gái đẹp nhưng khó tính. Ngày nay, tổ hợp đã trở thành một lĩnh vực toán rất phát triển, góp phần quan trọng trong việc ứng dụng khoa học công nghệ vào cuộc sống và sản xuất. Đến nay toàn bộ lý thuyết toán học cho lĩnh vực này có thể nói là đã rất hoàn thiện. Bài toán tổ hợp có thể ứng dụng trực tiếp vào các lĩnh vực như sản xuất với mô hình "lập lịch làm việc của một cơ quan", vào giao thông vận tải với mô "bài toán vận tải", vào quản lý con người với mô hình "phân việc"... hoặc nó có thể ứng dụng gián tiếp như những bài toán con trong các phương pháp, các thuật toán giải các bài toán tối ưu như bài toán "Xếp ba lô", bài toán "Người du lịch" ... Các bài toán tổ hợp có thể được giải bằng nhiều phương pháp như:

- Phương pháp sử dụng nguyên lý bù trừ.
- Phương pháp song ánh.
- Phương pháp sử dụng lý thuyết quân xe.
- Phương pháp hàm sinh.
- Phương pháp quỹ đạo.

...

Trong số các phương pháp trên, mỗi phương pháp đều có ưu điểm riêng, phương pháp hàm sinh có ưu điểm là hiện đại, có nhiều ứng dụng trong các bài toán tổ hợp, xác suất. Dù rất cố gắng song do thời gian và trình độ có hạn nên những ứng dụng của hàm sinh về xác suất chưa được nêu ở đây. Mọi ý kiến đóng góp xin gửi về địa chỉ hoangquan9@gmail.com.

Hà Nội, ngày 20 tháng 8 năm 2011

Người viết

Hoàng Minh Quân-batigoal.

Mục lục

1	TÓM TẮT LÝ THUYẾT	3
2	ỨNG DỤNG HÀM SINH GIẢI CÁC BÀI TOÁN ĐẾM ĐIỂN HÌNH.	4
2.1	Ứng dụng hàm sinh giải bài toán chia kẹo Euler	4
2.2	Ứng dụng hàm sinh tìm công thức tổng quát của dãy số	7
2.3	Ứng dụng hàm sinh chứng minh đẳng thức tổ hợp	9
2.4	Ứng dụng hàm sinh giải bài toán phân hoạch	10
3	Một số bài toán tổng hợp	12

1 TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Định nghĩa:

Định nghĩa 1:

Hàm sinh của dãy số thực $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ là hàm số được xác định bởi:

$$G(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n + \dots$$

Định nghĩa 2:

Cho dãy số thực $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$. Hàm số cho bởi công thức $G(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x^n}{n!}$ được gọi là hàm sinh dạng mũ của dãy $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$.

2. Một số đẳng thức liên quan đến hàm sinh.

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots$$

$$\frac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \dots$$

$$\frac{1}{(1-x)^n} = 1 + nx + \frac{n(n+1)}{2!}x^2 + \frac{n(n+1)(n+2)}{3!}x^3 + \dots = \sum_{i=0}^{\infty} C_{i+n-1}^i x^i$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots$$

$$\frac{1}{(1-ax)^2} = 1 + 2ax + 3a^2x^2 + 4a^3x^3 + \dots$$

$$\frac{1}{1-x^r} = 1 + x^r + x^{2r} + x^{3r} + \dots$$

Hai mệnh đề thường được sử dụng.

Mệnh đề 1: Cho hàm sinh $G(x) = (1 + x + x^2 + \dots)^n$

a, Đặt a_r là hệ số của x^r trong khai triển của $G(x)$ thì : $a_r = C_{r+n-1}^r$

b, $(1 - x^m)^n = 1 - C_n^1 x^m + C_n^2 x^{2m} - \dots + (-1)^n x^{mn}$

c, $(1 + x + x^2 + \dots + x^{m-1})^n = (1 - x^m)^n (1 + x + x^2 + \dots)^n$

Mệnh đề 2: (Công thức xác định hệ số tích của hai hàm sinh)

Cho hai hàm sinh của hai dãy $(a_n), (b_n)$ lần lượt là:

$$A(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots$$

$$B(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots$$

$$\text{Đặt } G(x) = A(x)B(x) = (a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots)(b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots)$$

$$= a_0b_0 + (a_0b_1 + a_1b_0)x + (a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0)x^2 + (a_0b_3 + a_1b_2 + a_2b_1 + a_3b_0)x^3 + \dots$$

Khi đó hệ số của x^r trong khai triển của $G(x)$ là: $a_0b_r + a_1b_{r-1} + a_2b_{r-2} + \dots + a_{r-2}b_2 + a_{r-1}b_1 + a_rb_0$ (*).

Chú ý: Trong các ví dụ ứng dụng hàm sinh để giải bài toán đếm nâng cao ở phần II chúng ta rất hay sử dụng công thức (*)

2 ỨNG DỤNG HÀM SINH GIẢI CÁC BÀI TOÁN ĐẾM ĐIỂN HÌNH.

2.1 Ứng dụng hàm sinh giải bài toán chia kẹo Euler

Ý tưởng chung của phương pháp sử dụng hàm sinh giải bài toán đếm là đi tìm hệ số của x^r trong khai triển của hàm sinh với r là số phần tử được chọn ra trong n đối tượng với những điều kiện ràng buộc cho trước. Bây giờ chúng ta sẽ vận dụng những kiến thức hàm sinh trên vào việc giải quyết các bài toán đếm tổ hợp nâng cao. Thông qua nhiều ví dụ khác nhau dưới đây chúng ta sẽ định hình và nắm chắc được cách sử dụng hàm sinh trong việc giải bài toán đếm tổ hợp nâng cao,

Ví dụ 2.1.1 Vào ngày nghỉ chủ nhật, cô Hoa đi chơi và mua quà là 12 quả cam cho 3 đứa trẻ An, Bình, Chi. Hỏi cô Hoa có bao nhiêu cách phân phối 12 quả cam sao cho An có ít nhất 4 quả, Bình và Chi mỗi người đều có ít nhất 2 quả, nhưng Chi không được nhiều hơn 5 quả?

Lời giải.

Hàm sinh cho số cách chọn quả cho An là:

$$A(x) = x^4 + x^5 + x^6 + x^7 + x^8 = x^4(1 + x + x^2 + x^3 + x^4) = x^4 \cdot \frac{1 - x^5}{1 - x}$$

Hàm sinh cho số cách chọn quả cho Bình là:

$$B(x) = x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 = x^2(1 + x + x^2 + x^3 + x^4) = x^2 \cdot \frac{1 - x^5}{1 - x}$$

Hàm sinh cho số cách chọn quả cho Chi là:

$$C(x) = x^2 + x^3 + x^4 + x^5 = x^2(1 + x + x^2 + x^3) = x^2 \cdot \frac{1 - x^4}{1 - x}$$

Hàm sinh cho số cách phân phối 12 quả cam thỏa mãn điều kiện đề bài là:

$$\begin{aligned} G(x) &= A(x)B(x)C(x) = x^4 \cdot \frac{1 - x^5}{1 - x} \cdot x^2 \cdot \frac{1 - x^5}{1 - x} \cdot x^2 \cdot \frac{1 - x^4}{1 - x} = \frac{x^8(1 - x^5)^2(1 - x^4)}{(1 - x)^3} \\ &= x^8(1 - 2x^5 + x^{10})(1 - x^4) \cdot \left(\frac{1}{x - 1}\right)^3 \\ &= (x^8 - x^{12} - 2x^{13} + 2x^{17} + x^{18} - x^{22}) \cdot \left(\frac{1}{x - 1}\right)^3 \end{aligned}$$

Do tìm hệ số của x^{12} trong khai triển của $G(x)$ nên ta chỉ quan tâm tới hệ số của $U(x) = (x^8 - x^{12} - 2x^{13} + 2x^{17} + x^{18} - x^{22})$ với bậc ≤ 12 . Do đó $U(x)$ chỉ có các hệ số a_8, a_{12} là thỏa mãn.

Và hệ số của x^r trong khai triển $V(x) = \left(\frac{1}{x - 1}\right)^3$ là $b_r = C_{r+2}^r$

Vậy hệ số của x^{12} trong khai triển của $G(x)$ là: $a_8 b_4 + a_{12} b_0 = 1 \cdot C_6^4 - 1 \cdot C_2^0 = 14$

Kết luận : Cô Hoa có 14 cách phân chia 12 quả cam cho 3 đứa trẻ thỏa mãn yêu cầu An có ít nhất 4 quả, Bình và Chi mỗi người đều có ít nhất 2 quả, nhưng Chi không

được nhiều hơn 5 quả.

NHÂN XÉT: Thoạt nhìn ban đầu chúng ta thấy cách giải bằng liệt kê cho lời giải ngắn gọn hơn cách hàm sinh nhưng suy nghĩ sâu thêm chúng ta sẽ thấy đối với bài toán có dữ kiện lớn thì cách làm liệt kê tỏ ra kém hiệu quả thậm chí khó làm ra được, chẳng hạn bài toán trên chúng ta thay đổi một chút như sau : “ Vào ngày nghỉ chủ nhật, cô Hoa đi chơi và mua quà là 50 cái kẹo cho 3 đứa trẻ An, Bình, Chi. Hỏi cô Hoa có bao nhiêu cách phân phối 50 cái kẹo sao cho An có ít nhất 4 kẹo, Bình và Chi mỗi người đều có ít nhất 2 kẹo, nhưng Chi không được nhiều hơn 5 kẹo? ” Rõ ràng cách làm liệt kê đối với bài toán này trở nên kém hiệu quả, khó khăn và mất thời gian hơn rất nhiều vì chúng ta phải xét quá nhiều trường hợp. Khi đó giải pháp hàm sinh trong bài toán này đem lại cho chúng ta hiệu quả rõ rệt vì chúng ta chỉ cần quan tâm tới hệ số của trong khai triển của hàm sinh tương ứng đề bài. Trong cuộc sống thực tiễn thì dữ liệu rất đa dạng, với những bài toán đếm có nhiều điều kiện ràng buộc khác nhau việc sử dụng hàm sinh sẽ cho chúng ta lời giải hiệu quả.

Ví dụ 2.1.2 Có bao nhiêu cách xếp một giỏ gồm n trái cây gồm (táo, chuối, cam, đào), sao cho số táo phải là chẵn, số chuối chia hết cho năm, chỉ có thể nhiều nhất 4 quả cam và nhiều nhất 1 quả đào.

Lời giải.

Hàm sinh cho số cách chọn quả táo (số chẵn) là:

$$A(x) = 1 + x^2 + x^4 + x^6 + \dots = \frac{1}{1 - x^2}$$

Hàm sinh cho số cách chọn quả chuối (số chia hết cho 5) là:

$$B(x) = 1 + x^5 + x^{10} + x^{15} + \dots = \frac{1}{1 - x^5}$$

Hàm sinh cho số cách chọn quả cam (nhiều nhất 4 quả) là:

$$C(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 = \frac{1 - x^5}{1 - x}$$

Hàm sinh cho số cách chọn quả đào (nhiều nhất 1 quả) là:

$$D(x) = 1 + x = \frac{1 - x^2}{1 - x}$$

Hàm sinh cho số cách chọn cả 4 loại quả là:

$$G(x) = A(x)B(x)C(x)D(x) = \frac{1}{1 - x^2} \cdot \frac{1}{1 - x^5} \cdot \frac{1 - x^5}{1 - x} \cdot \frac{1 - x^2}{1 - x} = \frac{1}{(1 - x)^2} = \sum_{i=0}^{\infty} (i + 1)x^i$$

Vậy số cách chọn trái cây thỏa mãn đề bài là $n + 1$ cách.

Ví dụ 2.1.3 Có bao nhiêu cách chọn ra 15USD từ 20 người nếu 19 người đầu, mỗi người có thể đưa ra nhiều nhất 1 USD, người thứ 20 có thể đưa ra 1USD hoặc 5 USD hoặc không USD nào.

Lời giải.

Hàm sinh cho số cách chọn nhiều nhất 1 USD từ 19 người là: $A(x) = (1+x)^{19}$

Hàm sinh cho số cách chọn 1USD hoặc 5 USD hoặc không USD nào ở người thứ 20 là: $B(x) = 1 + x + x^5$

Hàm sinh cho số cách chọn ra 15USD là:

$$G(x) = A(x)B(x) = (1+x)^{19}(1+x+x^5)$$

Chúng ta tìm hệ số của x^{15} trong khai triển của $G(x)$.

Ta có:
$$(1+x)^{19} = \sum_{k=0}^{19} C_{19}^k x^{19-k}$$

Đặt a_r là hệ số của x^r trong khai triển của $A(x)$, b_r là hệ số của x^r trong khai triển của $B(x)$. Khi đó ta có: $a_r = C_{19}^r$ và $b_0 = b_1 = b_5 = 1$

Vậy hệ số của x^{15} trong khai triển của $G(x)$ là: $a_{15}b_0 + a_{14}b_1 + a_{13}b_2 + \dots + a_0b_{15}$

Ta có: $a_{15}b_0 + a_{14}b_1 + a_{10}b_5 = C_{19}^{15} + C_{19}^{14} + C_{19}^{10} = 107882$

Vậy có 107882 cách chọn ra 15 USD thỏa mãn điều kiện đề bài.

Ví dụ 2.1.4 Tìm số nghiệm nguyên dương của phương trình:

$$u + v + w + z = 27 \quad \text{với} \quad 3 \leq u, v, w, z \leq 8$$

Lời giải.

Hàm sinh cho số nghiệm nguyên dương của phương trình là:

$$\begin{aligned} G(x) &= (x^3 + x^4 + \dots + x^8)^4 \\ &= [x^3(1 + x + x^2 + \dots + x^5)]^4 \\ &= x^{12}(1 + x + x^2 + \dots + x^5)^4 \end{aligned}$$

Số nghiệm nguyên dương của phương trình là hệ số của x^{27} trong khai triển của $G(x)$ và là hệ số của x^{15} trong khai triển của $H(x) = (1 + x + x^2 + \dots + x^5)^4$.

Ta có: $H(x) = (1 + x + x^2 + \dots + x^5)^4 = \left(\frac{1-x^6}{1-x}\right)^4 = (1-x^6)^4 \left(\frac{1}{1-x}\right)^4$.

Đặt $A(x) = (1-x^6)^4$, $B(x) = \left(\frac{1}{1-x}\right)^4$. Ta có:

$$\begin{aligned} A(x) &= (1-x^6)^4 = 1 - C_4^1 x^6 + C_4^2 x^{12} - C_4^3 x^{18} + x^{24} \\ B(x) &= \left(\frac{1}{1-x}\right)^4 = 1 + C_4^1 x + C_4^2 x^2 + C_4^3 x^3 + \dots \end{aligned}$$

Do tìm hệ số của x^{15} trong khai triển của $H(x)$ nên ta chỉ quan tâm tới hệ số của $A(x)$ với bậc ≤ 15 . Do đó $A(x)$ chỉ có các hệ số a_0, a_6, a_{12} là thỏa mãn.

Và hệ số của x^r trong khai triển $B(x) = \left(\frac{1}{x-1}\right)^4$ là $b_r = C_{r+4-1}^r = C_{r+3}^r$.

Vậy hệ số của x^{15} trong khai triển của $H(x)$ là:

$$a_0b_{15} + a_6b_9 + a_{12}b_3 = 1.C_{18}^{15} - C_4^1C_{12}^9 + C_4^2C_6^3$$

Vậy số nghiệm nguyên dương của phương trình là:

$$C_{18}^{15} - C_4^1C_{12}^9 + C_4^2C_6^3$$

Ví dụ 2.1.5 Phương trình:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 30$$

có bao nhiêu nghiệm nguyên dương thỏa mãn:

$$0 \leq x_1, x_2 \leq 10; 3 \leq x_3, x_4, x_5 \leq 5 \quad \text{và} \quad x_1, x_2 \quad \text{chẵn}$$

Hướng giải.

Hàm sinh cho số nghiệm nguyên dương của phương trình là:

$$G(x) = (1 + x^2 + x^4 + \dots + x^{10})^2 (x^3 + x^4 + x^5)^3$$

Công việc tìm hệ số x^{30} xin giành cho bạn đọc.

2.2 Ứng dụng hàm sinh tìm công thức tổng quát của dãy số

Ví dụ 2.2.1 Tìm công thức tổng quát của dãy số (a_n) với :

$$\begin{cases} a_0 = 1 \\ a_n = 2a_{n-1} + 2^n \end{cases} \quad n \geq 1 (*)$$

Lời giải.

Đặt $G(x)$ là hàm sinh cho dãy (a_n) , chúng ta có:

$$\begin{aligned} G(x) &= a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots \\ -2xG(x) &= -2a_0x - 2a_1x^2 - 2a_2x^3 - \dots \end{aligned}$$

Cộng hai đẳng thức trên ta có:

$$G(x) - 2xG(x) = a_0 + (a_1 - 2a_0)x + (a_2 - 2a_1)x^2 + \dots + (a_n - 2a_{n-1})x^n + \dots$$

Từ giả thiết $a_0 = 1$ và từ (*), chúng ta có:

$$G(x) - 2xG(x) = 1 + 2x + 2^2x^2 + \dots + 2^nx^n + \dots = \frac{1}{1-2x}$$

Do đó

$$G(x) = \frac{1}{(1-2x)^2} = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)(2x)^k$$

Vậy $a_n = (n+1).2^n, n \geq 0$.

Ví dụ 2.2.2 Tìm công thức tổng quát của dãy số (a_n) với :

$$\begin{cases} a_0 = 0, a_1 = 1 \\ a_n + 5a_{n-1} + 6a_{n-2} = 3n \end{cases} \quad n \geq 2$$

Lời giải.

Đặt $G(x)$ là hàm sinh cho dãy (a_n) , chúng ta có:

$$\begin{aligned} G(x) &= a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots \\ 5xG(x) &= 5a_0x + 5a_1x^2 + 5a_2x^3 + 5a_3x^4 + \dots \\ 6x^2G(x) &= 6a_0x^2 + 6a_1x^3 + 6a_2x^4 + 6a_3x^5 + \dots \end{aligned}$$

Cộng các đẳng thức trên ta có:

$$(1 + 5x + 6x^2)G(x) = a_0 + (a_1 + 5a_0)x + (a_2 + 5a_1 + 6a_0)x^2 + (a_3 + 5a_2 + 6a_1)x^3 + \dots$$

$$\begin{aligned} &x + 3 \sum_{i=2}^{\infty} ix^i \\ &= x + 3(2x^2 + 3x^3 + 4x^4 + \dots) \\ &= x + 3x(2x + 3x^2 + 4x^3 + \dots) \\ &= -2x + 3x(1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \dots) \\ &= -2x + \frac{3x}{(1-x)^2} = \frac{-2x^3 + 4x^2 + x}{(1-x)^2} \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } G(x) = \frac{-2x^3 + 4x^2 + x}{(1 + 5x + 6x^2)(1-x)^2} = \frac{-2x^3 + 4x^2 + x}{(3x+1)(2x+1)(1-x)^2}$$

$$\text{Phân tích } G(x) = \frac{-2x^3 + 4x^2 + x}{(3x+1)(2x+1)(1-x)^2} = \frac{A}{3x+1} + \frac{B}{2x+1} + \frac{C}{1-x} + \frac{D}{(1-x)^2}$$

$$\text{Đồng nhất hệ số chúng ta tìm được : } A = \frac{5}{16}; B = \frac{-2}{3}; C = \frac{5}{48}; D = \frac{1}{4}$$

Vậy

$$\begin{aligned} G(x) &= \frac{-2x^3 + 4x^2 + x}{(3x+1)(2x+1)(1-x)^2} = \frac{5}{16} \cdot \frac{1}{1+3x} - \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{1+2x} + \frac{5}{48} \cdot \frac{1}{1-x} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{(1-x)^2} \\ &= \frac{5}{16} \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i (3x)^i - \frac{2}{3} \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i (2x)^i + \frac{5}{48} \sum_{i=0}^{\infty} x^i + \frac{1}{4} \sum_{i=0}^{\infty} (i+1)x^i \end{aligned}$$

Hệ số của x^n trong khai triển của $G(x)$ là :

$$\frac{5}{16}(-1)^n 3^n - \frac{2}{3}(-1)^n 2^n + \frac{5}{48} + \frac{1}{4}(n+1) = \frac{5}{16}(-1)^n 3^n - \frac{2}{3}(-1)^n 2^n + \frac{n}{4} + \frac{17}{48}$$

Vậy

$$a_n = \frac{5}{16}(-1)^n 3^n - \frac{2}{3}(-1)^n 2^n + \frac{n}{4} + \frac{17}{48}$$

Ví dụ 2.2.3 Tìm công thức tổng quát của dãy số (a_n) với :

$$\begin{cases} a_0 = 1 \\ a_{n+1} = (n+1)(a_n - n + 1) \end{cases} \quad n \geq 0$$

Lời giải.

Xét hàm sinh $G(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x^n}{n!}$, từ đề bài ta có:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x^{n+1}}{n!} - \sum_{n=0}^{\infty} (n-1) \frac{x^{n+1}}{n!}$$

Ta có:

$$G(x) - 1 = xG(x) - x^2 e^x + x.e^x$$

tương đương

$$G(x) = \frac{1}{1-x} + x e^x = \sum_{n \geq 0} x^n + \sum_{n \geq 0} \frac{x^{n+1}}{n!}$$

Vậy hệ số của $\frac{x^n}{n!}$ là: $a_n = n! + n$.

Do đó dãy số a_n có công thức tổng quát $a_n = n! + n$.

2.3 Ứng dụng hàm sinh chứng minh đẳng thức tổ hợp

Ví dụ 2.3.1 Chứng minh đẳng thức tổ hợp :

$$\binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \dots + \binom{n}{n}^2 = \binom{2n}{n}$$

Lời giải.

Xét đa thức $(1+x)^{2n}$ có hệ số của x^n là $\binom{2n}{n}$ (1)

Mặt khác ta có:

$$(1+x)^{2n} = (1+x)^n (1+x)^n$$

Xét hàm sinh

$$G(x) = H(x) = (1+x)^n \text{ có hệ số } a_r = b_r = \binom{n}{r}$$

Hệ số x^n của $G(x)H(x)$ là $a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \dots + a_n b_0 = \binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \dots + \binom{n}{n}^2$ (2)

Từ (1) và (2) ta có: $\binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \dots + \binom{n}{n}^2 = \binom{2n}{n}$.

Ví dụ 2.3.2 (VandeMone) Chứng minh đẳng thức tổ hợp :

$$\sum_{k=0}^m \binom{m}{k} \binom{n}{r-k} = \binom{m+n}{r}$$

Hướng giải.

Dựa vào ý tưởng lời giải bài 2.3.1 bạn đọc có thể chứng minh đẳng thức VandeMone

Ví dụ 2.3.3 (China1994) Chứng minh đẳng thức tổ hợp :

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 2^{n-k} \binom{k}{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor} = \binom{2n+1}{n}$$

Lời giải.

Ta có $\binom{k}{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor}$ là hệ số tự do trong khai triển $(1+x)(x+x^{-1})^k$

Khi đó:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (1+x) \left(x + \frac{1}{x}\right)^k 2^{n-k} &= (1+x) \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \left(x + \frac{1}{x}\right)^k 2^{n-k} \\ &= (1+x) \left(2 + x + \frac{1}{x}\right)^n \\ &= \frac{1}{x^n} (1+x)(2x + x^2 + 1)^n = \frac{1}{x^n} (1+x)^{2n+1} \end{aligned}$$

So sánh hệ số tự do ta có: $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 2^{n-k} \binom{k}{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor} = \binom{2n+1}{n}$

Ví dụ 2.3.4 Chứng minh các số Fibonacci có thể được viết dưới dạng:

$$F_n = \binom{n}{0} + \binom{n-1}{1} + \binom{n-2}{2} + \dots$$

Lời giải.

Chúng ta đã biết công thức dạng truy hồi của số Fibonacci:

$$\begin{cases} F_1 = F_2 = 1 \\ F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \end{cases} \quad n \geq 3$$

Đặt $G(x)$ là hàm sinh cho dãy (F_n) , và giả sử $F_0 = 0$ chúng ta có:

$$\begin{aligned} G(x) &= F_0 + F_1x + F_2x^2 + F_3x^3 + \dots \\ -xG(x) &= -F_0x - F_1x^2 - F_2x^3 - \dots \\ -x^2G(x) &= -F_0x^2 - F_1x^3 - F_2x^4 - \dots \end{aligned}$$

Cộng vế với vế ba đẳng thức trên, ta có:

$$(1 - x - x^2)G(x) = F_0 + (F_1 - F_0)x + (F_2 - F_1 - F_0)x^2 + \dots = x$$

$$\text{Do đó: } G(x) = \frac{x}{1 - x - x^2}$$

Ta viết lại $G(x)$ như sau:

$$\frac{1}{1 - x - x^2} = \frac{1}{1 - x(1+x)} = 1 + x(1+x) + x^2(1+x)^2 + \dots + x^n(1+x)^n$$

Hệ số của x^n trong khai triển cuối là $\binom{n}{0} + \binom{n-1}{1} + \binom{n-2}{2} + \dots$

2.4 Ứng dụng hàm sinh giải bài toán phân hoạch

Một phân hoạch của số tự nhiên r là một cách viết r thành tổng của các số nguyên dương hay một bộ số không thứ tự (a_i) thỏa mãn $\sum a_i = r$.

Ví dụ về phân hoạch

$$2 = 1 + 1$$

$$3 = 2 + 1 = 1 + 1 + 1$$

$$4 = 3 + 1 = 2 + 2 = 2 + 1 + 1 = 1 + 1 + 1 + 1$$

$$5 = 4 + 1 = 3 + 2 = 3 + 1 + 1 = 2 + 2 + 1 = 2 + 1 + 1 + 1 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1$$

Đặt e_k là số nguyên dương thành phần xuất hiện k lần. Ta có:

$$1e_1 + 2e_2 + \dots + ke_k + \dots + re_r = r$$

Xây dựng hàm sinh cho phương trình trên ta có:

$$\begin{aligned} G(x) = & (1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^n + \dots) \\ & \cdot (1 + x^2 + x^4 + x^6 + \dots + x^{2n} + \dots) \\ & \cdot (1 + x^3 + x^6 + x^9 + \dots + x^{3n} + \dots) \\ & \vdots \\ & \cdot (1 + x^k + x^{2k} + x^{3k} + \dots + x^{kn} + \dots) \\ & \vdots \end{aligned}$$

Ví dụ 2.4.1 Xây dựng hàm sinh đếm số nghiệm nguyên dương của phương trình :

$$2x + 3y + 5z = r \quad \text{với} \quad x, y, z \geq 0$$

Hướng giải.

Hàm sinh cho phương trình trên là:

$$(1 + x^2 + x^4 + \dots + x^{2n})(1 + x^3 + x^6 + \dots + x^{3n})(1 + x^5 + x^{10} + \dots + x^{5n})$$

Ví dụ 2.4.2 Hỏi có bao nhiêu cách đổi tờ 500 nghìn đồng thành các tờ 1 nghìn, 2 nghìn, 5 nghìn, 10 nghìn, 20 nghìn.

Hướng giải.

Bài toán đã cho quy về đếm số nghiệm nguyên dương của phương trình:

$$x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 10x_4 + 20x_5 = 500$$

Số nghiệm nguyên dương của phương trình chính là hệ số của x^{500} trong khai triển của hàm sinh:

$$\begin{aligned}
G(x) &= (1 + x + x^2 + \dots) (1 + x^2 + x^4 + \dots) (1 + x^5 + x^{10} + \dots) \\
&\quad (1 + x^{10} + x^{20} + \dots) (1 + x^{20} + x^{40} + \dots) \\
&= \frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^5)(1-x^{10})(1-x^{20})}
\end{aligned}$$

Ví dụ 2.4.3 Xây dựng hàm sinh đếm số nghiệm nguyên dương của phương trình :

$$2x + 3y + 7z = r \quad \text{với} \quad 0 \leq z \leq 2 \leq y \leq 8 \leq x$$

Ví dụ 2.4.4 (China 1996) Cho n là số nguyên dương. Tìm số đa thức $P(x)$ với hệ số thuộc $\{0; 1; 2; 3\}$ thỏa mãn $P(2) = n$.

Lời giải.

Đặt $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_kx^k + \dots$

Theo giả thiết $P(2) = n$ nên ta có: $a_0 + 2a_1 + 4a_2 + \dots + 2^k a_k + \dots = n$ với $0 \leq k \leq 3$

Chúng ta xây dựng hàm sinh:

$$\begin{aligned}
G(x) &= (1 + x + x^2 + x^3)(1 + x^2 + x^4 + x^6)(1 + x^4 + x^8 + x^{12})\dots \\
&= \prod_{k=0}^{\infty} (1 + x^{2^k} + x^{2^{k+2}} + x^{2^{k+4}}) \\
&= \prod_{k=0}^{\infty} \frac{1 - x^{2^{k+2}}}{1 - x^{2^k}} = \frac{1}{(1-x)(1-x^2)} \\
&= \frac{1}{4} \frac{1}{1-x} + \frac{1}{2} \frac{1}{(1-x)^2} + \frac{1}{4} \frac{1}{1+x} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}(-1)^n + \frac{1}{2}(n+1) \right) x^n
\end{aligned}$$

Vậy có $\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}(-1)^n + \frac{1}{2}(n+1) \right) x^n$ đa thức thỏa mãn đề bài.

3 Một số bài toán tổng hợp

Ví dụ 3.1 Huấn luyện viên bóng đã có n cầu thủ tập luyện hàng ngày. Đầu tiên huấn luyện viên chia các cầu thủ thành 2 nhóm và yêu cầu các cầu thủ mỗi nhóm xếp thành hàng. Nhóm thứ nhất có thể chọn áo da cam, áo trắng hoặc áo xanh, nhóm thứ hai có thể chọn áo đỏ. Hỏi có bao nhiêu cách thực hiện công việc chọn áo như thế.

Hướng giải.

Giả sử huấn luyện viên chọn k người từ nhóm thứ nhất. Đặt a_k là số cách mà k người này chọn các áo màu da cam, trắng, xanh và nhóm xếp thẳng hàng nên có $a_k = k!3^k$.

,Do đó hàm sinh lũy thừa cho a_k là : $A(x) = \sum_{k \geq 0} k!3^k \frac{x^k}{k!} = \frac{1}{1-3x}$

Tương tự đặt b_m là số cách chọn m người từ nhóm thứ hai xếp hàng thẳng và chọn áo đỏ, ta có : $b_m = m!$. Hàm sinh cho dãy b_m là:

$$B(x) = \sum_{m \geq 0} m! \frac{x^m}{m!} = \frac{1}{1-x}$$

Vậy hàm sinh cho cả 2 nhóm chọn áo là : $G(x) = A(x)B(x) = \frac{1}{1-3x} \cdot \frac{1}{1-x}$

Đến đây bạn đọc chỉ cần tìm hệ số của $\frac{x^n}{n!}$ trong khai triển $G(x)$ là xong.

Đáp số : $\frac{n! (3^{n+1} - 1)}{2}$

Ví dụ 3.2 Cho r đồ vật. Hỏi có bao nhiêu cách phân phối r đồ vật khác nhau vào trong n cái hộp sao cho không có hộp nào rỗng.

Lời giải.

Hàm sinh lũy thừa cho số cách phân phối r đồ vật là:

$$\begin{aligned} G(x) &= \left(x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots \right)^n \\ &= (e^x - 1)^n \\ &= \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} (e^x)^{n-i} (-1)^i \\ &= \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \left(\sum_{r=0}^{\infty} \frac{(n-i)^r x^r}{r!} \right)^{n-i} (-1)^i \\ &= \sum_{r=0}^{\infty} \left(\sum_{i=0}^n (-1)^i \binom{n}{i} (n-i)^r \right) \frac{x^r}{r!} \end{aligned}$$

Do đó hệ số của $a_r = \sum_{i=0}^n (-1)^i \binom{n}{i} (n-i)^r$

Ví dụ 3.3 Cho số tự nhiên r . Đếm số phân hoạch r gồm các thành phần xuất hiện các số 1, 2, 3, 5, 7 .

Hướng giải.

Xây dựng hàm sinh $G(x) = \frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^5)(1-x^7)}$

Ví dụ 3.4 Một đơn vị bộ đội có n người lính xếp thẳng thành 1 hàng. Người sĩ quan phân chia các người lính thành các nhóm nhỏ để giao nhiệm vụ. Hỏi sĩ quan có bao nhiêu cách chọn 1 nhóm để phân công trực đêm.

Ví dụ 3.5 Có bao nhiêu cách phân phối 25 quả bóng giống hệt nhau vào bảy hộp riêng biệt sao cho hộp đầu tiên có không quá 10 quả bóng và số bóng là tùy ý ở mỗi hộp trong sáu hộp còn lại.

Lời giải.

Hàm sinh cho số cách phân phối r quả bóng vào bảy hộp riêng biệt sao cho hộp đầu tiên có không quá 10 quả bóng là:

$$G(x) = (1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^{10})(1 + x + x^2 + \dots)^6$$

$$= \left(\frac{1 - x^{11}}{1 - x}\right) \left(\frac{1}{1 - x}\right)^6 = (1 - x^{11}) \left(\frac{1}{1 - x}\right)^7$$

Đặt $A(x) = 1 - x^{11}$, $B(x) = \left(\frac{1}{1-x}\right)^7$.

Chúng ta có hệ số khác 0 trong hàm số $A(x)$ là: $a_0 = 1$; $a_{11} = -1$ Và $B(x) = \left(\frac{1}{1-x}\right)^7 = \sum_{r=0}^{\infty} C_{r+6}^r$ nên hệ số của x^r là: C_{r+6}^r

Vậy hệ số của x^{25} trong khai triển của $G(x)$ là: $a_0 b_{25} + a_{11} b_{14} = C_{31}^{25} - C_{20}^{14} = 697521$.

Vậy có 697521 cách phân phối 25 quả bóng giống hệt nhau vào bảy hộp riêng biệt sao cho hộp đầu tiên có không quá 10 quả bóng và số bóng là tùy ý ở mỗi hộp trong sáu hộp còn lại.

Ví dụ 3.6 Có bao nhiêu cách chọn 25 đồ chơi từ bảy loại đồ chơi khác nhau sao cho mỗi loại đồ chơi có từ 2 đến 6 đồ chơi được chọn.

Lời giải.

Hàm sinh cho số cách chọn r đồ chơi từ bảy loại đồ chơi khác nhau sao cho mỗi loại có từ 2 đến 6 đồ chơi được chọn là:

$$G(x) = (x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6)^7$$

$$= [x^2(1 + x + x^2 + x^3 + x^4)]^7 = x^{14}(1 + x + x^2 + x^3 + x^4)^7$$

Để tìm hệ số của x^{25} trong khai triển của $G(x)$ thì chúng ta tìm hệ số của x^{11} trong khai triển

$$H(x) = (1 + x + x^2 + x^3 + x^4)^7 = \left(\frac{1 - x^5}{1 - x}\right)^7 = (1 - x^5)^7 \left(\frac{1}{1 - x}\right)^7$$

Đặt $A(x) = (1 - x^5)^7$; $B(x) = \left(\frac{1}{1 - x}\right)^7$.

$$B(x) = \left(\frac{1}{1 - x}\right)^7 = \sum_{r=0}^{\infty} C_{r+6}^r x^r.$$

Do tìm hệ số của x^{11} trong khai triển của $H(x)$ nên ta chỉ quan tâm tới hệ số của $A(x)$ với bậc ≤ 11 . Do đó $A(x)$ chỉ có các hệ số a_0 ; a_5 ; a_{10} là thỏa mãn. Và hệ số của x^r trong khai triển $B(x)$ là $b_r = C_{r+6}^r$.

Vậy hệ số của x^{11} trong khai triển của $H(x)$ là: $a_0b_{11}+a_5b_6+a_{10}b_1 = 1.C_{17}^{11}+(-C_7^1)C_{12}^6+C_7^2C_7^1 = 6055$.

Ví dụ 3.7 Tính tổng:

$$S = 2.1^2 + 2.2^2 + 2.3^2 + \dots + 2n^2$$

Hướng giải. Xuất phát từ hàm sinh:

$$\frac{x}{(1-x)^2} = 1x + 2x^2 + 3x^3 + \dots + rx^r + \dots$$

Ta có:

$$x \left(\frac{d}{dx} \frac{x}{(1-x)^2} \right) = \frac{x(1+x)}{(1-x)^3} = 1^2x + 2^2x^2 + 3^2x^3 + \dots + r^2x^r + \dots$$

Nhân cả 2 vế của đẳng thức cuối với 2 ta có:

$$G(x) = \frac{2x(1+x)}{(1-x)^3} = 2.1^2x + 2.2^2x^2 + 2.3^2x^3 + \dots + 2.r^2x^r + \dots$$

Vậy hệ số $a_r = 2r^2$. Ta có cần tính tổng các hệ số $a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_n$.

Ta có:

$$G^*(x) = \frac{G(x)}{1-x} = \frac{2x(x+1)}{(1-x)^4} = 2x(1-x)^{-4} + 2x^2(1-x)^{-4}$$

Hệ số của x^n trong khai triển $2x(1-x)^{-4}$ là hệ số của x^{n-1} trong khai triển $2(1-x)^{-4}$

Hệ số của x^n trong khai triển $2x^2(1-x)^{-4}$ là hệ số của x^{n-2} trong khai triển $2(1-x)^{-4}$

Do đó tổng $S = 2\binom{(n-1)+4-1}{(n-1)} + 2\binom{(n-2)+4-1}{(n-2)} = 2\binom{n+2}{3} + 2\binom{n+1}{3}$

Ví dụ 3.8 Trong một túi sách của Long có chứa bao gồm 10 chiếc nhẫn vàng, 20 chiếc nhẫn bạc và 30 viên kim cương. Hỏi Long có bao nhiêu cách chọn ra 30 đồ vật để đem bán, biết rằng mỗi loại trang sức có ít nhất 1 đồ vật được lấy ra.

Lời giải.

Hàm sinh cho số cách chọn ít nhất 1 chiếc nhẫn vàng được chọn là:

$$M(x) = x + x^2 + x^3 + \dots + x^{10}$$

Hàm sinh cho số cách chọn ít nhất 1 chiếc nhẫn bạc được chọn là:

$$N(x) = x + x^2 + x^3 + \dots + x^{20}$$

Hàm sinh cho số cách chọn ít nhất 1 viên kim cương được chọn là:

$$P(x) = x + x^2 + x^3 + \dots + x^{30}$$

Vậy hàm sinh cho số cách chọn 30 đồ vật để đem bán, biết rằng mỗi loại trang sức có

ít nhất 1 đồ vật được lấy ra là:

$$\begin{aligned}
 G(x) &= M(x)N(x)P(x) \\
 &= (x + x^2 + x^3 + \dots + x^{10})(x + x^2 + x^3 + \dots + x^{20})(x + x^2 + x^3 + \dots + x^{30}) \\
 &= x^3(1 + x + x^2 + \dots + x^9)(1 + x + x^2 + \dots + x^{19})(1 + x + x^2 + \dots + x^{29}) \\
 &= x^3 \frac{1 - x^{10}}{1 - x} \cdot \frac{1 - x^{20}}{1 - x} \cdot \frac{1 - x^{30}}{1 - x} \\
 &= \frac{x^3(1 - x^{10})(1 - x^{20})(1 - x^{30})}{(1 - x)^3} \\
 &= \frac{x^3(1 - x^{20} - x^{10} + x^{30})(1 - x^{30})}{(1 - x)^3} \\
 &= \frac{x^3(1 - x^{30} - x^{20} + x^{50} - x^{10} + x^{40} + x^{30} - x^{60})}{(1 - x)^3} \\
 &= \frac{x^3(1 - x^{10} - x^{20} + x^{40} + x^{50} - x^{60})}{(1 - x)^3} \\
 &= (x^3 - x^{13} - x^{23} + x^{43} + x^{53} - x^{63}) \frac{1}{(1 - x)^3} \\
 &= \frac{x^3(1 - x^{10} - x^{20} + x^{40} + x^{50} - x^{60})}{(1 - x)^3} \\
 &= (x^3 - x^{13} - x^{23} + x^{43} + x^{53} - x^{63}) \frac{1}{(1 - x)^3}
 \end{aligned}$$

Đặt $A(x) = x^3 - x^{13} - x^{23} + x^{43} + x^{53} - x^{63}$; $B(x) = \frac{1}{(1 - x)^3}$

Hệ số khác không và có bậc nhỏ hơn 30 của $A(x)$ là: $a_3 = 1$; $a_{13} = -1$; $a_{23} = -1$.

Trong khi đó $B(x) = \frac{1}{(1 - x)^3} = \sum_{r=0}^{\infty} C_{r+3-1}^r = \sum_{r=0}^{\infty} C_{r+2}^r$ có hệ số của x^r là $b^r = C_{r+2}^r$

Vậy hệ số của x^{30} trong khai triển của hàm sinh $G(x)$ là:

$$a_3 b_{27} + a_{13} b_{17} + a_{23} b_7 = 1 \cdot C_{29}^{27} - 1 \cdot C_{19}^{17} - 1 \cdot C_9^7 = 199$$

Vậy Long có 199 cách chọn 30 đồ vật để đem bán mà mỗi loại trang sức có ít nhất 1 đồ vật được lấy ra.

Ví dụ 3.9 Có bao nhiêu cách phân hoạch số tự nhiên n thành các thành phần gồm các số nguyên dương lẻ khác nhau?

Hướng giải.

Bài toán trở thành tìm hệ số của x^n trong khai triển của hàm sinh :

$$\frac{1}{1-x} \cdot \frac{1}{1-x^3} \cdot \frac{1}{1-x^5} \cdot \frac{1}{1-x^7} \cdots$$

Ví dụ 3.10 Phương trình sau có bao nhiêu nghiệm nguyên:

$$u + v + w + z = 20 \quad \text{với} \quad u \geq 0, v \geq 0, w = 2m, z = 2k + 1$$

Hướng giải.

Xét hàm sinh :

$$G(x) = (1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots)^2(1 + x + x^2 + x^4 + \dots)(1 + x^3 + x^5 + x^7 + \dots)$$

Ví dụ 3.11 (Đẳng thức **PasCal**). Chứng minh rằng:

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$$

Lời giải.

Xét hàm sinh $G_n(x) = (1 + x)^n$. Ta viết lại như sau:

$$G_n(x) = (1 + x)^n = (1 + x)(1 + x)^{n-1} = (1 + x)G_{n-1}(x) = G_{n-1}(x) + xG_{n-1}(x)$$

Đề ý rằng: Hệ số của x^k trong khai triển $G_n(x) = (1 + x)^n$ là $\binom{n}{k}$, còn hệ số của x^k trong khai triển $G_{n-1}(x) + xG_{n-1}(x)$ là $\binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$

$$\text{Vậy } \binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$$

Ví dụ 3.12 (**PTNK 2009**) Tìm số tất cả các số có n chữ số lập từ các chữ số 3, 4, 5, 6 và chia hết cho 3.

Lời giải.

Một số chia hết cho 3 nếu tổng các chữ số của nó chia hết cho 3. Mỗi chữ số có thể là 3, 4, 5, 6. Xét hàm sinh $G(x) = (x^3 + x^4 + x^5 + x^6)^n = g_0 + g_1x + g_2x^2 + \dots + g_{6n}x^{6n}$. Gọi số tất cả các số có n chữ số lập từ các chữ số 3, 4, 5, 6 và chia hết cho 3 là S_n thì S_n chính là tổng các hệ số của các số mũ chia hết cho 3.

Gọi $\varepsilon = e^{\frac{2\pi i}{3}}$ là căn bậc ba nguyên thủy của phương trình $x^3 = 1$ ta có: $\varepsilon^2 + \varepsilon + 1 = 0$. Ta có:

$$\begin{aligned} G(1) + G(\varepsilon) + G(\varepsilon^2) &= 3g_0 + (1 + \varepsilon + \varepsilon^2)g_1 + (1 + \varepsilon + \varepsilon^2)g_2 + 3g_3 + \dots \\ &= 3(g_0 + g_3 + g_6 + \dots) = 3S_n \end{aligned}$$

Vậy

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{3} (G(1) + G(\varepsilon) + G(\varepsilon^2)) \\ &= \frac{1}{3} [(1 + 1 + 1 + 1)^n + (\varepsilon^2 + 1 + \varepsilon + 1)^n + (\varepsilon + 1 + \varepsilon^2 + 1)^n] \\ &= \frac{1}{3} (4^n + 2) \end{aligned}$$

Ví dụ 3.13 Cho số nguyên dương n . Gọi α_n là số cách phân tích n thành tổng các số tự nhiên lẻ, β_n là số cách phân tích n thành tổng các số tự nhiên đôi một khác nhau. Hãy chứng tỏ rằng $\alpha_n = \beta_n$.

Lời giải.

Xét hàm sinh $F(x) = \prod_{i \in \mathbb{N}} (1 + x^i + x^{2i} + x^{3i} + \dots)$ với i lẻ

Hệ số của x^n trong khai triển của $F(x)$ chính là α_n .

Xét hàm sinh $G(x) = (1+x)(1+x^2)(1+x^3)\dots$

Hệ số của x^n trong khai triển của $G(x)$ chính là β_n .

Ta có:

$$F(x) = \frac{1}{1-x} \frac{1}{1-x^3} \frac{1}{1-x^5} \dots, \text{ còn } G(x) = \frac{1-x^2}{1-x} \frac{1-x^4}{1-x^3} \frac{1-x^6}{1-x^5} \dots = \frac{1}{1-x} \frac{1}{1-x^3} \frac{1}{1-x^5} \dots$$

Do đó $F(x) = G(x)$ hay $\alpha_n = \beta_n$.

Ví dụ 3.14 (IMO 1998 Shortlisted) Cho dãy số $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ là dãy số không giảm sao cho mọi số tự nhiên đều có thể biểu diễn duy nhất dưới dạng $a_i + 2a_j + 4a_k$ với i, j, k là các số tự nhiên không nhất thiết khác nhau. Tìm a_{1998}

Lời giải.

Xét hàm sinh $G(x) = x^{a_0} + x^{a_1} + x^{a_2} + \dots$

Ta có: $G(x^2) = x^{2a_0} + x^{2a_1} + x^{2a_2} + \dots$ và $G(x^4) = x^{4a_0} + x^{4a_1} + x^{4a_2} + \dots$

Vậy ta có hàm sinh:

$$F(x) = G(x)G(x^2)G(x^4) = \sum_{i,j,k} x^{a_i+2a_j+4a_k}$$

Theo giả thiết: Mọi số tự nhiên đều có thể biểu diễn duy nhất dưới dạng $a_i + 2a_j + 4a_k$ với i, j, k là các số tự nhiên không nhất thiết khác nhau nên ta có thể biểu diễn

$$F(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots = \frac{1}{1-x}.$$

Từ đó ta có:

$$F(x) = G(x)G(x^2)G(x^4) = \frac{1}{1-x}$$

$$F(x^2) = G(x^2)G(x^4)G(x^8) = \frac{1}{1-x^2} = \frac{1}{1-x} \frac{1}{1+x}$$

Vì thế $\frac{G(x)}{G(x^8)} = 1+x$ hay $G(x) = (1+x)G(x^8) = (1+x)(1+x^8)G(x^{8^2}) = \dots$

Vậy $G(x) = (1+x)G(x^8) = (1+x)(1+x^8)G(x^{8^2}) = (1+x)(1+x^8)(1+x^{8^2})G(x^{8^3})\dots$

Ta có a_i là số tự nhiên nên viết theo cơ số 8 thì được biểu diễn bởi các số 0 và 1.

Do đó ta biểu diễn 1998 theo cơ số 2, rồi thay cơ số 2 bởi cơ số 8. Ta có $1998 = 11111001110_{(2)}$. Do đó $a_{1998} = 11111001110_{(8)}$.

Ví dụ 3.15 Tìm số các tập con của tập $\{1, 2, 3, \dots, 2003\}$ sao cho tổng các phần tử của chúng chia hết cho 5.

Hướng giải.

Xét hàm sinh $G(x) = (1+x)(1+x^2)(1+x^3)\dots(1+x^{2003})$

Giả sử khai triển được $G(x) = \sum a_n x^n$. Ta cần tính tổng các hệ số có số mũ chia hết cho 5, tức là tính $a_0 + a_5 + a_{10} + \dots$

Đáp số: $\frac{1}{5}(2^{2003} + 2^{401})$

Bài tập 1 Tìm số nghiệm nguyên dương của phương trình:

$$u + v + w + z = 20 \quad \text{với} \quad 1 \leq u, v, w, z \leq 7$$

Bài tập 2 Tìm số nghiệm nguyên dương của phương trình:

$$u + v + w + z = 20 \quad \text{với} \quad 1 \leq u \leq 4; 3 \leq v, w, z \leq 8$$

Bài tập 3 Có bao nhiêu cách phân phối 10 quả bóng giống nhau cho 2 cậu bé và 2 cô bé sao cho mỗi cậu bé được ít nhất 1 quả bóng và mỗi cô bé được ít nhất 2 quả bóng?

Bài tập 4 Cô Trang có 25 bông hoa và 4 lọ hoa. Hỏi cô Trang có bao nhiêu cách phân phối 25 bông hoa vào 4 lọ hoa sao cho mỗi lọ có ít nhất là 3 bông hoa và nhiều nhất là 7 bông hoa.

Bài tập 5 Hỏi có bao nhiêu cách chọn 25 quả bóng gồm 3 loại bóng, xanh, đỏ, trắng. Sao cho số bóng đỏ chọn nhiều nhất là 2, số bóng xanh chọn nhiều nhất là 3; số bóng trắng chọn nhiều nhất là 4.

Bài tập 6 Một cậu bé được cha tặng 30 viên bi làm đồ chơi. Hỏi cậu bé có bao nhiêu cách phân phối 30 viên bi đó vào 5 cái hộp sao cho hai hộp đầu có chứa số chẵn viên bi và số bi trong mỗi hộp đó không vượt quá 10 viên, và số bi trong mỗi hộp còn lại có ít nhất 3 viên và nhiều nhất là 5 viên.

Bài tập 7 Có bao nhiêu cách sưu tầm 24 con tem từ 4 bạn nam và 6 bạn nữ. Biết rằng mỗi người có ít nhất 1 con tem nhưng mỗi bạn nam có nhiều nhất 4 con tem còn mỗi bạn nữ có nhiều nhất 7 con tem.

Bài tập 8 Tìm công thức tổng quát của dãy số (a_n) với :

$$\begin{cases} a_0 = 2, a_1 = 2 \\ a_n - 6a_{n-1} + 5a_{n-2} = 0 \end{cases} \quad n \geq 2$$

Bài tập 9 Tìm công thức tổng quát của dãy số (a_n) với :

$$\begin{cases} a_0 = 0, a_1 = 1, a_2 = 2 \\ 2a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2} - a_{n-3} \end{cases} \quad n \geq 3$$

Bài tập 10 Tìm công thức tổng quát của dãy số (a_n) với :

$$\begin{cases} a_0 = -4, a_1 = -5 \\ a_n - a_{n-1} - 2a_{n-2} = 4n \end{cases} \quad n \geq 2$$

Bài tập 11 (IMO 1995) Cho p là một số nguyên tố lẻ. Tìm số các tập con A của tập hợp $\{1, 2, \dots, 2p\}$ thỏa mãn:

i, Tập A có đúng p phần tử.

ii, Tổng các phần tử của tập A chia hết cho p .

Bài tập 12 Chứng minh rằng số cách thêm dấu ngoặc vào vào tích gồm $n + 1$ nhân tử là số Catalan $C_n = \frac{1}{n+1} C_{2n}^n$

Bài tập 13 (Rookie Contest 1990) Cho n là số nguyên tố và $a_1, a_2, \dots, a_m$ là các số nguyên dương. Gọi $f(k)$ là số các bộ m số $(c_1, c_2, \dots, c_m)$ thỏa mãn điều kiện $0 \leq c_i \leq a_i$ và $c_1 + c_2 + \dots + c_m \equiv k \pmod{m}$. Chứng minh rằng $f(0) = f(1) = \dots = f(n-1)$ khi và chỉ khi $n | a_j$ với j nào đó thuộc $\{1, 2, \dots, m\}$

Bài tập 14 Tìm hệ số của x^{18} trong khai triển:

$$(1 + x^3 + x^6 + x^9 + \dots)^7$$

Bài tập 15 (AMM 2010) Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n ta có:

$$\sum_{k=0}^n \frac{\binom{n}{k}^2}{(2k+1) \binom{2n}{2k}} = \frac{2^{4n} (n!)^4}{(2n)! (2n+1)!}$$

Bản quyền chuyên đề thuộc về tác giả và ban quản trị MathScope.org

TÀI LIỆU THAM KHẢO

- [1]. Hàm sinh, Kim Đình Sơn, Mathsope.org.
- [2]. Nguyễn văn Mậu (Chủ biên), Biến phức, định lý và áp dụng.
- [3]. Titu Andreescu and Zuming Feng, A path to combinatorics for undergraduates.
- [4]. Titu Andreescu, Zuming Feng - 102 Combinatorial Problems.
- [5]. Combinatorics a problem oriented approach, Daniel A. Marcus.
- [6]. Philippe Flajolet, Robert Sedgewick, Analytic combinatorics.
- [7]. John Michael Harris, Jeffrey L. Hirst, Michael J. Mossinghoff, Combinatorics and graph theory.
- [8]. <http://forum.mathscope.org/index.php>