SAI LẦM TRONG CỰC TRỊ ĐẠI SỐ

A1 - DẠNG SAI LẦM THỨ NHẤT

Trong bài làm có sử dụng nhiều BĐT, nhưng khi tìm điều kiện để biểu thức cần tìm đạt giá trị nhỏ nhất (hoặc lớn nhất) thì các dấu bằng không đồng thời xảy ra đã kết luận kết luận biểu thức đạt giá trị nhỏ nhất (hoặc lớn nhất) hoặc biểu thức không đạt giá trị nhỏ nhất (hoặc lớn nhất)

Bài 1: Cho x, y là hai số dương thoả mãn $x+\frac{1}{y}\le 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$M=32.\frac{x}{y}+2007.\frac{y}{x}.$$

Lời giải "có vấn đề"

Từ $x, y>0$ ta có $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\ge 2$.

Từ $x, y>0$ và $x+\frac{1}{y}\le 1$ ta có $1\ge\left(x+\frac{1}{y}\right)^2\ge 4x.\frac{1}{y}\Rightarrow\frac{y}{x}\ge 4.$

Do vậy $M=32.\frac{x}{y}+2007.\frac{y}{x}=32.\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)+1975.\frac{y}{x}\ge 32.2+1975.4=7964$.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x=y$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của M là 7964, giá trị này đạt được khi $x=y$.

Bình luận

Nhưng!... $x=y$ thì M = 2039. Vậy sai lầm ở đâu?

Giải đáp

Lời giải sai ở chỗ với x, y > 0 thì $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\ge 2$.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow$ x = y, còn $\frac{y}{x}\ge 4$, Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow$ y = 4x.

Mặt khác có thể thấy x = y thì mâu thuẫn với giả thiết $x+\frac{1}{y}\le 1$.

Như vậy nguyên nhân của sai lầm trong lời giải trên là trong một bài toán mà sử dụng nhiều bất đẳng thức để tìm cực trị nhưng các dấu "=" không đồng thời xảy ra .

Lời giải đúng

Từ giả thiết ta có $1 \geq \left(x+\frac{1}{y}\right)^2 \geq 4x.\frac{1}{y} \Rightarrow \frac{y}{x} \geq 4.$

áp dụng bất đẳng thức Côsi cho hai số không âm ta có

$$M = 32.\frac{x}{y}+2007.\frac{y}{x} = \left(32.\frac{x}{y}+2.\frac{y}{x}\right)+2005.\frac{y}{x} \geq 2.\sqrt{32.\frac{x}{y}.2.\frac{y}{x}}+2005.4 = 8036.$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x=\frac{1}{2};\ y=2$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của M là 8036, giá trị này đạt được khi $x=\frac{1}{2};\ y=2$.

Bài 2: Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A=2x+3y$ biết $2x^2+3y^2 \leq 5$.

Lời giải ''có vấn đề''

Gọi $B=2x^2+3y^2$, ta có $B \leq 5$.

Xét $A+B=2x+3y+2x^2+3y^2 = 2\left(x^2+x\right)+3\left(y^2+y\right) = 2\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+3\left(y+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{5}{4} \geq -\frac{5}{4}$ (1)

Ta lại có $B \leq 5$ nên $-B \geq -5$ (2)

Cộng (1) với (2) ta được $A \geq -\frac{25}{4}$.

Min $A=-\frac{25}{4} \Leftrightarrow x=y=-\frac{1}{2}$.

Bình luận

Nhưng với $x=y=-\frac{1}{2} \Rightarrow A=-\frac{5}{2}$, vậy sai lầm ở đâu?

Giải đáp

Sai lầm ở chỗ với $x=y=-\frac{1}{2}$, chỉ xảy ra dấu "=" ở (1), còn dấu "=" ở (2) không xảy ra.

Thật vậy với $x=y=-\frac{1}{2}$ thì $B=\frac{5}{4} \neq 5$. Do đó $-B \neq -5$.

Lời giải đúng

áp dụng BĐT Bunhiacốpxki ta có:

$$A^2=\left(\sqrt{2}.\sqrt{2}x+\sqrt{3}.\sqrt{3}x\right)^2 \leq (2+3)\left(2x^2+3y^2\right) \leq 5.5=25$$

$$A^2=25 \Leftrightarrow \frac{x\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\frac{y\sqrt{3}}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow x=y$$

Do $A^2 \leq 25$ nên $-5 \leq A \leq 5$.

Min $A=-5 \Leftrightarrow \begin{cases} x=y \\ 2x+3y=-5 \end{cases} \Leftrightarrow x=y=-1.$

Max $A=5 \Leftrightarrow \begin{cases} x=y \\ 2x+3y=5 \end{cases} \Leftrightarrow x=y=1.$

Bài 3: Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $F(x,y)=(x+y)^2+(x+1)^2+(y-x)^2$.

Lời giải "có vấn đề"

Ta thấy $(x+y)^2; (x+1)^2; (y-x)^2$ không đồng thời bằng 0 nên $F(x,y)>0$.

$F(x,y)$ đạt giá trị nhỏ nhất khi và chỉ khi $a=(x+1)^2$ và $b=(x+y)^2+(y-x)^2$ đồng thời đạt giá trị nhỏ nhất.

$a=(x+1)^2$ đạt giá trị nhỏ nhất bằng 0 khi x = -1.

Khi đó $b=(x+y)^2+(y-x)^2=2y^2+2,$ nên b đạt giá trị nhỏ nhất bằng 2 khi y = 0.

Vậy giá trị nhỏ nhất của $F(x,y)$ là 2 khi $\begin{cases} x=-1 \\ y=0 \end{cases}$.

Bình luận

Phải chăng lời giải trên là đúng?

Giải đáp

Lời giải mắc sai lầm ở bước lập luận: $F(x,y)$ đạt giá trị nhỏ nhất khi và chỉ khi $a=(x+1)^2$ và $b=(x+y)^2+(y-x)^2$ đồng thời đạt giá trị nhỏ nhất. Lập luận này chỉ đúng khi các giá trị nhỏ nhất đó đạt được tại cùng một giá trị của các biến. Rõ ràng ở đây a đạt giá trị nhỏ nhất khi x = -1, còn b đạt giá trị nhỏ nhất khi x + y = x — y = 0, tức là khi x = y = 0.

Lời giải đúng

Biến đổi $F(x,y)=3x^2+2x+1+2y^2=3\left(x+\frac{1}{3}\right)^2+\frac{2}{3}+2y^2 \geq \frac{2}{3}$.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow x=-\frac{1}{3},\ y=0.$

Vậy giá trị nhỏ nhất của $F(x,y)$ là $\frac{2}{3}$, giá trị này đạt được khi $x=-\frac{1}{3},\ y=0.$

Bài 4: Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $D=-5x^2-2xy-2y^2+14x+10y-1$.

Lời giải "có vấn đề"

Ta có $D=-5x^2-2xy-2y^2+14x+10y-1=-(x^2+2xy+y^2)-(4x^2-14x)-(y^2-10y)-1$

$$=-(x+y)^2-\left(2x-\frac{7}{2}\right)^2-(y-5)^2+\frac{145}{4}$$

Suy ra $D\le\frac{145}{4}$. Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases}x+y=0\\2x-\frac{7}{2}=0\\y-5=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-y\\x=\frac{7}{4}\\y=5\end{cases}$

Hệ trên vô nghiệm nên D không tồn tại giá trị lớn nhất

Bình luận

Bạn có đồng ý với kết luận trên của bài toán không? Lời giải đã thuyết phục chưa?

Giải đáp

Từ biến đổi đến $D=-(x+y)^2-\left(2x-\frac{7}{2}\right)^2-(y-5)^2+\frac{145}{4}$ thì mới chỉ suy ra $D\le\frac{145}{4}$, còn việc kết luận giá trị lớn nhất của D không tồn tại là chưa chính xác, không có căn cứ xác đáng.

Lời giải đúng

Cách 1:

Ta có $D=-\left(x^2+y^2-6x-6y+2xy+9\right)-\left(4x^2-8x+4\right)-\left(y^2-4y+4\right)+16$

$$=-(x+y-3)^2-4(x-1)^2-(y-2)^2+16$$

Suy ra $D\le 16$. Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases}x+y-3=0\\x-1=0\\y-2=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\y=2\end{cases}$

Vậy Max D = 16, giá trị này đạt được khi và chỉ khi x = 1 và y = 2.

Lời giải trên tuy đúng song có vẻ thiếu "tự nhiên", cách 2 sau đây sẽ mang tính thuyết phục hơn.

Cách 2:

Biểu thức tổng quát dạng $P(x,y)=ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+h \quad (a,b,c\ne 0)$

Cách giải: Biến đổi $P(x,y)$ về một trong hai dạng sau:

Dạng 1: $P(x,y)=m.F^2(x,y)+n.H^2(x)+g \quad (1)$

Dạng 2: $P(x,y)=m.F^2(x,y)+n.K^2(y)+g \quad (2)$

Trong đó $H(x)$, $K(y)$ là biểu thức bậc nhất đối với biến của chúng, còn $F(x,\ y)$ là biểu thức bậc nhất đối với cả hai biến x và y.

- ❖ Nếu $m>0,\ n>0$ thì ta có $max\,P(x,\ y)=g$.

Giá trị này đạt được khi và chỉ khi $\begin{cases}F(x,\ y)=0\\H(x)=0\end{cases}$ hoặc $\begin{cases}F(x,\ y)=0\\K(y)=0\end{cases}$.

❖ Nếu $m<0, n<0$ thì ta có $\min P(x, y)=g$.

Giá trị này đạt được khi và chỉ khi $\begin{cases} F(x, y)=0 \\ H(x)=0 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} F(x, y)=0 \\ K(y)=0 \end{cases}$.

Để biến đổi được như vậy, ta coi một biến là biến chính rồi tìm cách biến đổi để áp dụng các hằng đẳng thức $a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$, $a^2-2ab+b^2=(a-b)^2$

ở đây ta chọn biến y là biến chính

Cụ thể:

Ta có $D=-5x^2-2xy-2y^2+14x+10y-1$

$$=-2.\left[y^2+(x-5)y+\frac{(x-5)^2}{4}\right]+\frac{(x-5)^2}{2}-5x^2+14x-1$$

$$=-2\left(y+\frac{x-5}{2}\right)^2-\frac{9(x-1)^2}{2}+16\le 16$$

Suy ra $D\le 16$. Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} y+\dfrac{x-5}{2}=0 \\ x-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases}$

Vậy Max D = 16, giá trị này đạt được khi và chỉ khi x = 1 và y = 2.

A2 - DẠNG SAI LẦM THỨ HAI

Không xác định điều kiện xảy ra dấu bằng trong BĐT $f\ge m$ (hay $f\le m$), hoặc điều kiện xảy ra dấu bằng không thoả mãn giả thiết.

Bài 5: Cho x, y, z thoả mãn $x^2+y^2+z^2\le 27$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=x+y+z+xy+yz+zx$.

Lời giải "có vấn đề"

Với mọi x, y, z ta có: $(x-y)^2\ge 0; (y-z)^2\ge 0; (z-x)^2\ge 0$

Suy ra $x^2+y^2\ge 2xy; y^2+z^2\ge 2yz; z^2+x^2\ge 2zx \Rightarrow 2(x^2+y^2+z^2)\ge 2(xy+yz+zx)\Rightarrow 27\ge xy+yz+zx.$ (1)

Mặt khác $(x-1)^2\ge 0; (y-1)^2\ge 0; (z-1)^2\ge 0$

Suy ra $x^2+1\ge 2x; y^2+1\ge 2y; z^2+1\ge 2z$

$\Rightarrow (x^2+y^2+z^2)+3\ge 2(x+y+z)\Rightarrow 15\ge x+y+z$ (2)

Cộng theo từng vế của (1) và (2) suy ra $P\le 42$.

Vậy giá trị lớn nhất của P là 42

Bình luận

Bài làm khá "đẹp", nhưng kết quả lại sai? Theo bạn lời giải sai ở đâu? Khắc phục như thế nào?

Giải đáp

Lời giải này đã quên một bước vô cùng quan trọng của một bài toán cực trị khi sử dụng BĐT, đó là xác định điều kiện xảy ra đẳng thức.

Ta thấy P = 42 ⇔ (1) và (2) đồng thời trở thành đẳng thức ⇔ $\begin{cases} x=y=z=3 \\ x^2+y^2+z^2=27 \\ x=y=z=1 \end{cases}$

Hệ trên vô nghiệm nên BĐT P $\le$ 42 không thể trở thành đẳng thức.

Lời giải đúng

Xét hiệu $3\left(x^2+y^2+z^2\right)-\left(x+y+z\right)^2=2\left(x^2+y^2+z^2\right)-2\left(xy+yz+zx\right)$

$=\left(x-y\right)^2+\left(y-z\right)^2+\left(z-x\right)^2\ge 0 \quad (*)$.

Từ (*) suy ra:

$\left(x+y+z\right)^2\le 3\left(x^2+y^2+z^2\right)\le 3.27 \Rightarrow x+y+z\le 9$ (1) (đẳng thức xảy ra ⇔ x = y = z = 3).

Cũng từ (*) suy ra $2(xy+yz+zx)\le 2(x^2+y^2+z^2) \Rightarrow xy+yz+zx\le x^2+y^2+z^2\le 27$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra: $x+y+z+xy+yz+zx\le 36$

Đẳng thức xảy ra ⇔ x = y = z = 3.

Vậy P đạt giá trị lớn nhất là 36, giá trị này đạt được ⇔ x = y = z = 3.

Bài 6: Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A=x+\sqrt{x}$.

Lời giải "có vấn đề"

Ta có $A=x+\sqrt{x}=\left(x+\sqrt{x}+\frac{1}{4}\right)-\frac{1}{4}=\left(\sqrt{x}+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}\ge -\frac{1}{4}$. Vậy $\min A=-\frac{1}{4}$.

Bình luận

Lời giải rất "hồn nhiên" và "ngắn gọn" nhưng lập luận đã chặt chẽ chưa? Kết quả có chính xác không? Theo bạn "kẽ hở" ở chỗ nào?

Giải đáp

Sau khi chứng minh $A\ge -\frac{1}{4}$, chưa chỉ ra trường hợp xảy ra $A\ge -\frac{1}{4}$,. Xảy ra dấu đẳng thức ⇔ $\sqrt{x}=-\frac{1}{2}$, vô lí.

Lời giải đúng

Để tồn tại $\sqrt{x}$ phải có $x\ge 0$. Do đó $A=x+\sqrt{x}\ge 0$. $Min\ A=0 \Leftrightarrow x=0$.

Bài 7: Tìm GTNN của biểu thức $A=\frac{\left(x+a\right)\left(x+b\right)}{x}$, với $x>0$, a và b là các hằng số dương cho trước.

Lời giải "có vấn đề"

Ta có $x+a\ge 2\sqrt{ax}$ (1)

$x+b\ge 2\sqrt{bx}$ (2)

Do đó $A=\dfrac{(x+a)(x+b)}{x}\ge\dfrac{2\sqrt{ax}.2\sqrt{bx}}{x}=4\sqrt{ab}$

$Min\,A=4\sqrt{ab}\Leftrightarrow x=a=b.$

Bình luận

Lời giải "thuyết phục" đấy chứ, có cần phải giải lại không?

Giải đáp

Chỉ xảy ra $A=4\sqrt{ab}$ khi ở (1) và (2) xảy ra dấu đẳng thức, tức là x = a và x = b. Như vậy đòi hỏi phải có a = b. Nếu a $\neq$ b thì không có được $A=4\sqrt{ab}$.

Lời giải đúng

Ta thực hiện phép nhân và tách ra các hằng số:

$$A=\frac{(x+a)(x+b)}{x}=\frac{x^2+ax+bx+ab}{x}=\left(x+\frac{ab}{x}\right)+(a+b).$$

Ta có $x+\dfrac{ab}{x}\ge 2\sqrt{ab}$ (BĐT Côsi) nên $A\ge 2\sqrt{ab}+a+b=\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2$

Min $A=\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{ab}{x}\\ x>0\end{cases}\Leftrightarrow x=\sqrt{ab}.$

Bài 8: Cho a, b, c là các số dương, hãy tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\left(1+\dfrac{a}{5b}\right)\left(1+\dfrac{b}{5c}\right)\left(1+\dfrac{c}{5a}\right).$

Lời giải "có vấn đề"

Do a, b, c là các số dương nên áp dụng bất đẳng thức Côsi ta có:

$1+\dfrac{a}{5b}\ge 2\sqrt{\dfrac{a}{5b}}$ (1); $1+\dfrac{b}{5c}\ge 2\sqrt{\dfrac{b}{5c}}$ (2); $1+\dfrac{c}{5a}\ge 2\sqrt{\dfrac{c}{5a}}$ (3)

Nhân từng vế của ba bất đẳng thức cùng chiều và các vế đều dương ta được $P\ge 8\sqrt{\dfrac{a}{5b}}.\sqrt{\dfrac{b}{5c}}.\sqrt{\dfrac{c}{5a}}=\dfrac{8\sqrt{5}}{25}.$

Do đó P nhỏ nhất bằng $\dfrac{8\sqrt{5}}{25}.$

Bình luận

Các bạn có đồng tình với cách giải này không?

Giải đáp

Để ý không tồn tại a, b, c để $P=\frac{8\sqrt{5}}{25}$. Đây là sai lầm thường mắc khi dùng bất đẳng thức để tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của một biểu thức. Một nguyên nhân sâu xa hơn nhiều là bạn đọc không hiểu đúng nghĩa của dấu "≥" và dấu "≤". Không phải khi nào viết "≥" cũng có thể xảy ra dấu "=". Ví dụ ta viết $10 \geq 2$ là đúng nhưng không thể có $10 = 2$.

Lời giải đúng

Biến đổi $P=\left(1+\frac{a}{5b}\right)\left(1+\frac{b}{5c}\right)\left(1+\frac{c}{5a}\right)=1+\frac{1}{5}\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\right)+\frac{1}{25}\left(\frac{a}{c}+\frac{b}{a}+\frac{c}{b}\right)+\frac{1}{125}$ (1)

Do a, b, c là các số dương nên áp dụng bất đẳng thức Côsi ta có :

$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\geq 3\sqrt[3]{\frac{a}{b}.\frac{b}{c}.\frac{c}{a}}=3$ (2) $\qquad$ $\frac{a}{c}+\frac{b}{a}+\frac{c}{b}\geq 3\sqrt[3]{\frac{a}{c}.\frac{b}{a}.\frac{c}{b}}=3$ (3)

Từ (1), (2), (3) ta có $P\geq 1+\frac{1}{5}.3+\frac{1}{25}.3+\frac{1}{125}=\frac{216}{125}$.

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi các dấu đẳng thức ở (2) và (3) đồng thời xảy ra, tức là a = b = c.

Vậy Min $P=\frac{216}{125}$, giá trị này đạt được khi và chỉ khi a = b = c > 0.

Bài 9: Cho a, b là hai số dương và x, y, z là các số dương tuỳ ý. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$M=\frac{x^2}{(ay+bz)(az+by)}+\frac{y^2}{(az+bx)(ax+bz)}+\frac{z^2}{(ax+by)(ay+bx)}.$$

Lời giải "có vấn đề"

Dễ thấy $(ay+bz)^2\leq(a^2+b^2)(y^2+z^2)$ và $(az+by)^2\leq(a^2+b^2)(z^2+y^2)$

Vậy $\frac{x^2}{(ay+bz)(az+by)}\geq\frac{x^2}{(a^2+b^2)(y^2+z^2)}$

Tương tự ta có $\frac{y^2}{(az+bx)(ax+bz)}\geq\frac{x^2}{(a^2+b^2)(z^2+x^2)}$

$$\frac{z^2}{(ax+by)(ay+bx)}\geq\frac{z^2}{(a^2+b^2)(x^2+y^2)}.$$

Do đó $M\geq\frac{1}{a^2+b^2}\left(\frac{x^2}{y^2+z^2}+\frac{y^2}{z^2+x^2}+\frac{z^2}{x^2+y^2}\right)$.

Mặt khác chứng minh được $\frac{x^2}{y^2+z^2}+\frac{y^2}{z^2+x^2}+\frac{z^2}{x^2+y^2}\geq\frac{3}{2}$

Suy ra $M\geq\frac{3}{2(a^2+b^2)}$. Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của M là $\dfrac{3}{2\left(a^2+b^2\right)}$, giá trị này đạt được khi và chỉ khi $x=y=z$.

Bình luận

Cách giải trên phải chăng là … đúng! Bạn giải bài toán này như thế nào?

Giải đáp

Lời giải đã sử dụng khá nhiều bất đẳng thức nhưng bạn học sinh này chỉ xét dấu đẳng thức xảy ra ở bất đẳng thức $\dfrac{x^2}{y^2+z^2}+\dfrac{y^2}{z^2+x^2}+\dfrac{z^2}{x^2+y^2}\ge\dfrac{3}{2}$ mà không xét dấu đẳng thức xảy ra ở các bất đẳng thức còn lại.

Theo đó đẳng thức $M=\dfrac{3}{2\left(a^2+b^2\right)}$ xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z$ và a = b. Nhưng theo giả thiết a, b là hai số dương tuỳ ý, nên với $a\ne b$ thì $M>\dfrac{3}{2\left(a^2+b^2\right)}$.

Lời giải đúng

Ta có $(ay+bz)(az+by)\le\dfrac{(ay+bz+az+by)^2}{4}=\dfrac{(a+b)^2(y+z)^2}{4}\le\dfrac{(a+b)^2\left(y^2+z^2\right)}{2}$

Suy ra $\dfrac{x^2}{(ay+bz)(az+by)}\ge\dfrac{2x^2}{(a+b)^2\left(y^2+z^2\right)}$.

Tương tự ta cũng có $\dfrac{y^2}{(az+bx)(ax+bz)}\ge\dfrac{2y^2}{(a+b)^2\left(x^2+z^2\right)}$

$$\dfrac{z^2}{(ax+by)(ay+bx)}\ge\dfrac{2z^2}{(a+b)^2\left(y^2+x^2\right)}.$$

Do đó $M\ge\dfrac{2}{(a+b)^2}\left(\dfrac{x^2}{y^2+z^2}+\dfrac{y^2}{z^2+x^2}+\dfrac{z^2}{x^2+y^2}\right)$.

Mặt khác theo bất đẳng thức Na-sơ-bit thì $\dfrac{x^2}{y^2+z^2}+\dfrac{y^2}{z^2+x^2}+\dfrac{z^2}{x^2+y^2}\ge\dfrac{3}{2}$,

suy ra $M\ge\dfrac{3}{(a+b)^2}$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z$.

Vậy $\min M=\dfrac{3}{(a+b)^2}$ khi và chỉ khi $x=y=z$.

Bài 10: Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=2x^2+5y^2+4xy-4x-8y+6$

Lời giải ‘‘có vấn đề’’

Ta có $P=\left(x^2+4y^2+1+4xy-2x-4y\right)+\left(x^2-2x+1\right)+\left(y^2-4y+4\right)$

$$P=(x+2y-1)^2+(x-1)^2+(y-2)^2$$

Do $(x+2y-1)^2\ge 0,\ \ (x-1)^2\ge 0,\ \ (y-2)^2\ge 0$ nên

$$P=(x+2y-1)^2+(x-1)^2+(y-2)^2\ge 0.$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của P bằng 0.

Bình luận

Lời giải "quá gọn", bạn có ý kiến gì không?

Giải đáp

Khẳng định $P\ge 0$ là đúng nhưng … chẳng được gì, bởi vì không có giá trị nào của x, y để dấu "=" xảy ra.

Sai lầm ở lời giải trên xuất phát từ việc người giải đã không thực hiện bước 2 khi tìm giá trị lớn nhất (hoặc nhỏ nhất) của biểu thức ta phải trả lời câu hỏi "dấu bằng xảy ra khi nào?"

Lời giải đúng

Coi x là biến chính để biến đổi như sau:

$$P=2x^2+5y^2+4xy-4x-8y+6=2\left[x^2+2x(y-1)+(y-1)^2\right]-2(y-1)^2+5y^2-8y+6$$

$$P=(x+y-1)^2+3y^2-4y+4=(x+y-1)^2+3\left(y^2-2y.\frac{2}{3}+\frac{4}{9}\right)-\frac{4}{3}+4$$

$$P=(x+y-1)^2+3\left(y-\frac{2}{3}\right)^2+\frac{8}{3}$$

Nhận thấy $(x+y-1)^2\ge 0,\ 3\left(y-\frac{2}{3}\right)^2\ge 0$ nên

$P=(x+y-1)^2+3\left(y-\frac{2}{3}\right)^2+\frac{8}{3}\ge\frac{8}{3}$ với mọi x, y.

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases}(x+y-1)^2=0\\ 3\left(y-\frac{2}{3}\right)^2=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+y-1=0\\ y-\frac{2}{3}=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\frac{1}{3}\\ y=\frac{2}{3}\end{cases}$

Vậy $Min\,P=\frac{8}{3}$. Giá trị này đạt được khi $(x,\ y)=\left(\frac{1}{3},\ \frac{2}{3}\right)$

A3 - DẠNG SAI LẦM THỨ BA

Bất đẳng thức $f\left(x\right)\ge a$ không xảy ra đẳng thức ứng với một giá trị $x=x_0$ nào đó (x_0 thoả mãn điều kiện của bài toán) đã kết luận biểu thức $f\left(x\right)$ đạt giá trị nhỏ nhất bằng a hoặc biểu thức $f\left(x\right)$ không đạt giá trị nhỏ nhất.

Bài 11: Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\sqrt{28+3x-x^2}+\sqrt{5+4x-x^2}$.

Lời giải "có vấn đề"

Điều kiện của x để biểu thức P có nghĩa là

$$\begin{cases}28+3x-x^2\ge 0\\ 5+4x-x^2\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(4+x)(7-x)\ge 0\\ (1+x)(5-x)\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-4\le x\le 7\\ -1\le x\le 5\end{cases}\Leftrightarrow -1\le x\le 5.$$

Nhận xét: Với $-1\le x\le 5$ ta có

$5+4x-x^2=(1+x)(5-x)\ge 0$, suy ra $\sqrt{5+4x-x^2}\ge 0.$

$28+3x-x^2=(4+x)(7-x)>0$, suy ra $\sqrt{28+3x-x^2}>0.$

Do đó, với $-1\le x\le 5$ thì $P=\sqrt{28+3x-x^2}+\sqrt{5+4x-x^2}>0,$ nên P không có giá trị nhỏ nhất.

Bình luận

Kết luận của lời giải sai về mặt lôgic, tương tự như trường hợp

$Q=x^2+1>0$ với mọi x nhưng Q vẫn đạt giá trị nhỏ nhất bằng 1 khi x = 0.

Lời giải đúng

Điều kiện của x để P có nghĩa là $-1\le x\le 5$. Khi đó ta có

$$P=\sqrt{23-x+(1+x)(5-x)}+\sqrt{(1+x)(5-x)}\ge\sqrt{23-x}\ge\sqrt{23-5}=3\sqrt{2}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi x = 5.

Vậy $\min P=3\sqrt{2}$ khi và chỉ khi $x=5$.

Bài 12: Tìm m để phương trình $x^2+(m+1)x+1=0$ có tổng bình phương các nghiệm đạt GTNN.

Lời giải "có vấn đề"

Điều kiện để phương trình có nghiệm là: $\Delta\ge 0\Leftrightarrow (m+1)^2-4\ge 0\Leftrightarrow (m+3)(m-1)\ge 0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m\ge 1\\ m\le -3\end{array}\right.$ (*).

Khi đó tổng bình phương các nghiệm là: $x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=(m+1)^2-2$ (Theo định lí Viét).

Ta có $(m+1)^2-2\ge -2$ nên tổng bình phương các nghiệm đạt giá trị nhỏ nhất là -2 khi và chỉ khi $m+1=0\Leftrightarrow m=-1.$

Giá trị m = -1 không thoả mãn điều kiện (*) nên không tồn tại giá trị của m để tổng bình phương các nghiệm đạt giá trị nhỏ nhất.

Bình luận

Mấu chốt của sai lầm trong lời giải này ở chỗ em học sinh chưa nắm vững khái niệm giá trị nhỏ nhất của một biểu thức. Chúng ta cần lưu ý rằng: Nếu bất đẳng thức $f(x) \geq a$ không xảy ra đẳng thức ứng với một giá trị $x = x_0$ nào đó (x_0 thoả mãn điều kiện của bài toán) thì không thể kết luận được biểu thức $f(x)$ đạt giá trị nhỏ nhất bằng a hoặc biểu thức $f(x)$ không đạt giá trị nhỏ nhất.

Lời giải đúng

Điều kiện để phương trình có nghiệm là: $\Delta \geq 0 \Leftrightarrow (m+1)^2 - 4 \geq 0 \Leftrightarrow (m+3)(m-1) \geq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m \geq 1 \\ m \leq -3 \end{array}\right.$ (*).

Khi đó tổng bình phương các nghiệm là : $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = (m+1)^2 - 2 = \left[(m+1)^2 - 4\right] + 2 \geq 2.$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow$ $(m+1)^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 1 \\ m = -3 \end{array}\right.$ (thoả mãn (*).

Vậy tổng bình phương các nghiệm đạt giá trị nhỏ nhất bằng 2 khi và chỉ khi m = 1 hoặc m = -3.

Bài 13: Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $A = \dfrac{1}{x^2 - 6x + 10}$.

Lời giải "có vấn đề"

Phân thức $\dfrac{1}{x^2 - 6x + 10}$ có tử không đổi nên A có giá trị lớn nhất khi mẫu nhỏ nhất.

Ta có: $x^2 - 6x + 10 = (x-3)^2 + 1 \geq 1.$

$\mathrm{Min}\left(x^2 - 6x + 10\right) = 1 \Leftrightarrow x = 3.$

Vậy $\max A = 1 \Leftrightarrow x = 3.$

Bình luận

Lời giải có vẻ khá "trơn", nhưng nếu đi thi mà làm vậy thì "trượt". Tại sao vậy?

Giải đáp

Tuy đáp số không sai nhưng lập luận lại sai khi khẳng định "A có tử số không đổi nên A có giá trị lớn nhất khi mẫu nhỏ nhất" mà chưa đưa ra nhận xét tử và mẫu là các số dương.

Ví dụ như: Xét biểu thức $B = \dfrac{1}{x^2 - 10}$. Với lập luận như trên "Phân thức $\dfrac{1}{x^2 - 10}$ có tử không đổi nên có giá trị lớn nhất khi mẫu nhỏ nhất", do mẫu nhỏ nhất bằng -10 khi x = 0, ta sẽ đi đến kết luận $max\,B = \dfrac{-1}{10} \Leftrightarrow x = 0$. Điều này không đúng vì $\dfrac{-1}{10}$ không phải là giá trị lớn nhất của B, chẳng hạn với x = 5 thì $B = \dfrac{1}{15} > \dfrac{-1}{10}$.

Mắc sai lầm trên là do người làm không nắm vững tính chất của bất đẳng thức, đã máy móc áp dụng quy tắc so sánh hai phân số có tử và mẫu là các số tự nhiên sang hai phân số có tử và mẫu là các bất kì.

Lời giải đúng

Bổ xung thêm nhận xét $x^2-6x+10=(x-3)^2+1>0$ nên phân thức $\frac{1}{x^2-6x+10}$ có tử và mẫu đều là số dương, do đó A lớn nhất khi và chỉ khi $\frac{1}{A}$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow x^2-6x+10$ nhỏ nhất. Làm tiếp như trên ra kết quả.

Bài 14: Tìm x để biểu thức $P=\frac{1}{x^2+2x-3}$ đạt giá trị lớn nhất

Lời giải "có vấn đề"

Điều kiện $x\neq 1;\ x\neq -3$.

Ta có $P=\frac{1}{(x+1)^2-4}$.

Để biểu thức P đạt giá trị lớn nhất thì $(x+1)^2-4$ đạt giá trị nhỏ nhất. Điều này xảy ra khi $(x+1)^2=0$ hay $x=-1$. Khi đó giá trị lớn nhất của $P=-\frac{1}{4}$

Bình luận

Nhưng có thể thấy khi $x=2$ thì $P=\frac{1}{5}$, do đó $-\frac{1}{4}$ không phải là giá trị lớn nhất của P. Vậy sai lầm của lời giải ở đâu? Khắc phục sai lầm đó như thế nào?

Giải đáp

Sai lầm của lời giải mà bạn học sinh này đưa ra chính là ở bước lập luận "để biểu thức P đạt giá trị lớn nhất thì $(x+1)^2-4$ đạt giá trị nhỏ nhất". Điều này chỉ đúng khi tử và mẫu của P cùng dương mà tử phải là hằng số. ở đây mẫu chưa biết dương hay âm nên không thể lập luận như vậy được.

Lời giải đúng

Điều kiện $x\neq 1;\ x\neq -3$.

Dễ dàng chỉ ra với $x<-3$ hoặc $x>1$ thì $P>0$, còn với $-3<x<1$ thì $P<0$.

Ta thấy khi $x=1+a$ với $a>0$ thì $P=\frac{1}{a^2+4a}$ nên a càng nhỏ thì P càng lớn và lớn bao nhiêu cũng được, do đó biểu thức $P=\frac{1}{x^2+2x-3}$ không có giá trị lớn nhất.

A4 - DẠNG SAI LẦM THỨ TƯ

Nhầm tưởng vai trò của các biến trong bài như nhau nên sắp thứ tự các ẩn.

Bài 15: Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A=\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}$ với $x,y,z>0$.

Lời giải ‘‘có vấn đề’’

Khi hoán vị vòng quanh $x\to y\to z\to x$ thì biểu thức A không đổi nên không mất tính tổng quát, giả sử $x\ge y\ge z>0$, suy ra $x-z\ge 0$ $\Rightarrow y(x-z)\ge z(x-z)$ $\Rightarrow xy-yz+z^2\ge xz.$ (1)

Chia cả hai vế của (1) cho số dương xz ta được $\frac{y}{z}-\frac{y}{x}+\frac{z}{x}\ge 1.$ (2)

Mặt khác ta có $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\ge 2$ (3).

Cộng vế với vế của hai bất đẳng thức cùng chiều (2) và (3) ta được $\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}\ge 3.$

Từ đó suy ra $\min A=3\Leftrightarrow x=y=z.$

Bình luận

Tuy kết quả đúng, nhưng xem ra lời giải bất ổn. Tại sao vậy?

Giải đáp

Khi hoán vị vòng quanh $x\to y\to z\to x$ thì biểu thức A trở thành $\frac{y}{z}+\frac{z}{x}+\frac{x}{y}$, tức là biểu thức không đổi.

Điều đó cho phép ta được giả sử một trong ba số $x;\ y;\ z$ là số lớn nhất (hoặc số nhỏ nhất), nhưng không cho phép giả sử $x\ge y\ge z$ rồi sử dụng nó làm giả thiết bài toán khi đi chứng minh mà không xét các trường hợp còn lại.

Thật vậy sau khi chọn x là số lớn nhất (x ≥ y, x ≥ z) thì vai trò của y và z lại không bình đẳng:

giữ nguyên x, thay y bởi z và ngược lại ta được $\frac{x}{z}+\frac{z}{y}+\frac{y}{x}$, biểu thức này không bằng biểu thức A.

Khắc phục sai lầm

Với lời giải đã đưa ra, thay cho việc sắp thứ tự $x\ge y\ge z$, ta chỉ cần giả sử z là số nhỏ nhất trong ba số $x;\ y;\ z$ kết hợp với phần còn lại của lời giải đã trình bày đó ta được lời giải đúng.

Ngoài ra ta còn có thể giải bài toán này theo các cách sau:

Lời giải đúng

Cách 1: Sử dụng bất đẳng thức Côsi cho ba số dương ta có

$A=\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{y}\ge 3\sqrt[3]{\frac{x}{y}.\frac{y}{z}.\frac{z}{y}}=3.$ (Phải chứng minh BĐT Côsi cho ba số không âm)

Do đó $\min\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}\right)=3$ khi và chỉ khi $\frac{x}{y}=\frac{y}{z}=\frac{z}{x}$, tức là x = y = z.

Cách 2: Giả sử z là số nhỏ nhất trong 3 số x, y, z.

Ta có $\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}=\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)+\left(\frac{y}{z}+\frac{z}{x}-\frac{y}{x}\right)$.

Ta đã có $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\geq 2$ (do x, y > 0) nên để chứng minh $\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}\geq 3$ chỉ cần chứng minh

$$\frac{y}{z}+\frac{z}{x}-\frac{y}{x}\geq 1 \qquad (1).$$

Thật vậy $(1)\Leftrightarrow xy+z^2-yz\geq xz\,(do\,x,z\geq 0)$

Biến đổi đến $(x-z)(y-z)\geq 0 \qquad (2)$.

Do z là số nhỏ nhất trong 3 số x, y, z nên (2) luôn đúng. Từ đó tìm được giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A=3$ khi x = y = z.

Bài 16: Cho x, y, z là các số thực lớn hơn -1. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=\frac{1+x^2}{1+y+z^2}+\frac{1+y^2}{1+z+x^2}+\frac{1+z^2}{1+x+y^2}.$$

Lời giải "có vấn đề"

Nếu $x<0$, ta thay x bởi (-x) thì hai hạng tử đầu của P không đổi còn hạng tử còn lại giảm xuống. Từ đó không mất tính tổng quát giả sử $x\geq y\geq z\geq 0$.

Từ $(x-1)^2\geq 0$, suy ra $3\left(x^2+1\right)\geq 2\left(x^2+x+1\right)$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi x = 1.

Do đó $\frac{1+x^2}{1+y+z^2}\geq\frac{1+x^2}{1+x+x^2}\geq\frac{2}{3}$.

Tương tự ta cũng có $\frac{1+y^2}{1+z+x^2}\geq\frac{2}{3}$; $\frac{1+z^2}{1+x+y^2}\geq\frac{2}{3}$.

Từ đó suy ra $P\geq 2$. Dấu "=' xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z=1$.

Bình luận

Theo các bạn lời giải trên đã chuẩn chưa? Lời giải của bạn như thế nào?

Giải đáp

Các biến $x,\ y,\ z$ trong biểu thức P có dạng hoán vị vòng quanh mà không có vai trò như nhau nên chỉ được xem biến bất kì nào là lớn nhất hoặc nhỏ nhất mà thôi. Do đó đoạn lập luận:

Không mất tính tổng quát giả sử $x\geq y\geq z\geq 0$.

Từ $(x-1)^2 \ge 0$, suy ra $3(x^2+1) \ge 2(x^2+x+1)$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi x = 1.

Do đó $\quad \dfrac{1+x^2}{1+y+z^2} \ge \dfrac{1+x^2}{1+x+x^2} \ge \dfrac{2}{3} \qquad (1)$

Tương tự ta cũng có $\dfrac{1+y^2}{1+z+x^2} \ge \dfrac{2}{3}; \quad (2)$

$$\dfrac{1+z^2}{1+x+y^2} \ge \dfrac{2}{3} \quad (3)$$

là không đúng. Không thể từ (1) suy ra (2) và (3) bằng phép tương tự vì vai trò của các biến x, y, z trong P không như nhau.

<u>Lời giải đúng</u>

Ta có $P = \dfrac{1+x^2}{1+y+z^2} + \dfrac{1+y^2}{1+z+x^2} + \dfrac{1+z^2}{1+x+y^2} \ge \dfrac{2(1+x^2)}{2(1+z^2)+(1+y^2)} + \dfrac{2(1+y^2)}{2(1+x^2)+(1+z^2)} + \dfrac{2(1+z^2)}{2(1+y^2)+(1+x^2)} = M$

Đặt $1+x^2 = a;\ 1+y^2 = b;\ 1+z^2 = c\,(a, b, c > 0)$.

Lúc đó $M = \dfrac{2a}{2c+b} + \dfrac{2b}{2a+c} + \dfrac{2c}{2b+a}$.

Đặt $N = \dfrac{c}{2c+b} + \dfrac{a}{2a+c} + \dfrac{b}{2b+a}$.

$$H = \dfrac{b}{2c+b} + \dfrac{c}{2a+c} + \dfrac{a}{2b+a}$$

Khi đó $2N + H = 3$.

áp dụng bất đẳng thức Cô-si ta có $M + N = \dfrac{2a+c}{2c+b} + \dfrac{2b+a}{2a+c} + \dfrac{2c+b}{2b+a} \ge 3$, suy ra $2M + 2N \ge 6 \qquad (4)$

Lại có $2H + \dfrac{M}{2} = \dfrac{2b+a}{2c+b} + \dfrac{2c+b}{2a+c} + \dfrac{2a+c}{2b+a} \ge 3$, suy ra $H + \dfrac{M}{4} \ge \dfrac{3}{2} \qquad (5)$

Cộng vế theo vế các bất đẳng thức (4) và (5) ta có: $\dfrac{9M}{4} + (2N+H) \ge \dfrac{15}{2}$. Mà $2N + H = 3$ nên $M \ge 2$.

Từ đó suy ra $P \ge 2$. Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z = 1$.

A6 - MỘT SỐ DẠNG SAI LẦM KHÁC

Bài 17: Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng

$$a^4+b^4+c^4<2\left(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\right).$$

Lời giải "có vấn đề"

Vì a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác nên

$$\begin{aligned}
&|b-c|<a\\
&\Rightarrow b^2-2bc+c^2<a^2\\
&\Rightarrow b^2+c^2-a^2<2bc\\
&\Rightarrow \left(b^2+c^2-a^2\right)^2<(2bc)^2\\
&\Rightarrow b^4+c^4+a^4+2b^2c^2-2b^2a^2-2c^2a^2<4b^2c^2\\
&\Rightarrow a^4+b^4+c^4<2\left(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\right)
\end{aligned}$$

Bình luận

Lời giải trên đã đúng chưa? Nếu chưa, giải thế nào thì đúng?

Giải đáp

Nâng lên luỹ thừa bậc chẵn ở hai vế của BĐT mà không có điều kiện hai vế cùng không âm

Lời giải chưa đúng vì từ $b^2+c^2-a^2<2bc\Rightarrow\left(b^2+c^2-a^2\right)^2<(2bc)^2$ là sai, chẳng hạn

$-2<1\Rightarrow(-2)^2<1^2$ (sai). Lưu ý chỉ được bình phương hai vế của BĐT khi cả hai vế đều không âm.

Lời giải đúng

Vì a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác nên

$$\begin{aligned}
&|b-c|<a<b+c\\
&\Rightarrow (b-c)^2<a^2<(b+c)^2\\
&\Rightarrow b^2-2bc+c^2<a^2<b^2+2bc+c^2\\
&\Rightarrow -2bc<a^2-b^2-c^2<2bc\\
&\Rightarrow \left|a^2-b^2-c^2\right|<2bc\\
&\Rightarrow \left(a^2-b^2-c^2\right)^2<(2bc)^2\\
&\Rightarrow a^4+b^4+c^4-2a^2b^2-2c^2a^2+2b^2c^2<4b^2c^2\\
&\Rightarrow a^4+b^4+c^4<2\left(a^2b^2+c^2a^2+b^2c^2\right)
\end{aligned}$$

Bài 18: Cho hai số x; y thoả mãn x > y và $xy=1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A=\dfrac{x^2+y^2}{x-y}$.

Lời giải "có vấn đề"

Ta có $A=\dfrac{x^2+y^2}{x-y}=\dfrac{x^2-2xy+y^2+2xy}{x-y}=\dfrac{(x-y)^2+2xy}{x-y}$

Do x > y và $xy = 1$ nên

$$A = \frac{(x-y)^2}{x-y} + \frac{2xy}{x-y} = x - y + \frac{2}{x-y}$$

Biết rằng nếu a > 0 thì $a + \frac{1}{a} \geq 2$ (BĐT Côsi)

Do đó $A = \frac{x-y}{2} + \frac{2}{x-y} + \frac{x-y}{2} \geq 2 + \frac{x-y}{2}$.

Vậy A có giá trị nhỏ nhất khi $\frac{x-y}{2} + \frac{2}{x-y} = 2$

$\Leftrightarrow (x-y)^2 + 4 = 4(x-y) \Leftrightarrow (x-y)^2 - 4(x-y) + 4 = 0$.

Giải phương trình này được nghiệm x — y = 2.

Do đó ta có hệ phương trình sau $\begin{cases} x - y = 2 \\ xy = 1 \end{cases}$, nghiệm của hệ phương trình là

$(x;y) = \left(1+\sqrt{2}; -1+\sqrt{2}\right)$; $(x;y) = \left(1-\sqrt{2}; -1-\sqrt{2}\right)$ (Thoả mãn điều kiện bài ra).

Vậy giá trị nhỏ nhất của A là $A = \frac{x-y}{2} + 2 = \frac{2}{2} + 2 = 3.$

<u>Bình luận</u>

Nhưng với $x = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$; $y = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$ thì có x > y; $xy = \frac{6-2}{4} = 1$ và $A = 2\sqrt{2} < 3.$ Tại sao lại như thế?

<u>Giải đáp</u>

Chứng minh $f \geq m$ (hay $f \leq m$), khẳng định giá trị nhỏ nhất (hay lớn nhất) của f bằng m mà không chỉ ra m là hằng số

Rõ ràng lời giải sai . Vì $A \geq 2 + \frac{x-y}{2}$ mà $\frac{x-y}{2}$ chưa là hằng số. Sai lầm ở đây là sai lầm ở bước 1, đánh giá $f \geq m$ nhưng m không là hằng số.

<u>Lời giải đúng</u>

$$A = \frac{x^2+y^2}{x-y} = \frac{x^2-2xy+y^2+2xy}{x-y} = \frac{(x-y)^2+2xy}{x-y}$$

$$= (x-y) + \frac{2}{x-y} \geq 2\sqrt{(x-y).\frac{2}{x-y}} = 2\sqrt{2}$$

(áp dụng BĐT Côsi cho hai số dương x — y và $\frac{2}{x-y}$).

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} x-y=\frac{2}{x-y} \\ xy=1 \end{cases}$. Giải hệ này tìm ra $x=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$; $y=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$ thoả mãn đề bài.

Bài 19: Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A=\left|x^2-x+3\right|+\left|x^2-x-2\right|$.

Lời giải "có vấn đề"

Ta có $A=\left|x^2-x+3\right|+\left|x^2-x-2\right|=\left|x^2-2.\frac{1}{2}x+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\frac{11}{4}\right|+\left|x^2-2.\frac{1}{2}x+\left(\frac{1}{2}\right)^2-\frac{9}{4}\right|$

$=\left|\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{11}{4}\right|+\left|\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{9}{4}\right|$.

Suy ra $A\ge\left|\frac{11}{4}\right|+\left|-\frac{9}{4}\right|=\frac{11}{4}+\frac{9}{4}=5$.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \left(x-\frac{1}{2}\right)^2=0\Leftrightarrow x-\frac{1}{2}=0\Leftrightarrow x=\frac{1}{2}$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của A là 5 khi $x=\frac{1}{2}$.

Bình luận

Trong lớp có hai nhóm đưa ra các nhận xét khác nhau, nhóm thứ nhất cho là lời giải của bạn học sinh trên "có vấn đề", nhóm thứ hai hoàn toàn nhất trí với lời giải trên. Còn bạn, bạn sẽ đứng ở nhóm nào? Tại sao?

Giải đáp

Hiểu sai nhiều loại BĐT như $\left|A^2+m\right|\ge|m|$

Bước giải sai lầm $\left|\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{11}{4}\right|+\left|\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{9}{4}\right|\ge\left|\frac{11}{4}\right|+\left|-\frac{9}{4}\right|=5$.

Ta thấy $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{9}{4}\ge-\frac{9}{4}$ với mọi x, nhưng không thể suy ra $\left|\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{9}{4}\right|\ge\left|-\frac{9}{4}\right|$

Chẳng hạn nếu $x=0$ thì $\left|\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{9}{4}\right|=\left|\left(0-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{9}{4}\right|=\left|\frac{1}{4}-\frac{9}{4}\right|=|-2|<\left|-\frac{9}{4}\right|$

Lưu ý từ $a\ge b$ chỉ suy ra được $|a|\ge|b|$ khi $a\ge b\ge 0$.

Lời giải đúng

$$A=\left|\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{11}{4}\right|+\left|\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{9}{4}\right|=\left|\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{11}{4}\right|+\left|\frac{9}{4}-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2\right|$$

$$\geq\left|\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{11}{4}+\frac{9}{4}-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2\right|=\left|\frac{11}{4}+\frac{9}{4}\right|=5.$$

Do đó A đạt giá trị nhỏ nhất là 5 khi và chỉ khi

$$\left[\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{11}{4}\right].\left[\frac{9}{4}-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2\right]\geq 0\Leftrightarrow\frac{9}{4}-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2\geq 0\quad \text{(vì } \left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{11}{4}\geq 0 \text{ với mọi x)}$$

Từ đó tìm được $-1\leq x\leq 2$

Bài 20: Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\left(x^2-1\right)\left(x^2+1\right)$.

Lời giải "có vấn đề"

Ta có $x^2\geq 0$ với mọi x, suy ra $x^2-1\geq -1$ và $x^2+1\geq 1$

Suy ra $P=\left(x^2-1\right)\left(x^2+1\right)\geq(-1).1=-1\Rightarrow P\geq -1.$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases}x^2-1=-1\\x^2+1=1\end{cases}\Leftrightarrow x=0.$

Vậy P đạt giá trị nhỏ nhất là -1 khi x = 0.

Bình luận

Sai lầm ở đâu?

Giải đáp

Vận dụng sai các tính chất của BĐT như nhân hai BĐT cùng chiều mà không có điều kiện hai vế cùng không âm.

Phân tích sai lầm: Chỗ sai của lời giải trên là đã nhân hai vế của bất đẳng thức cùng chiều trong khi có những vế nhận giá trị âm, chẳng hạn 5 > 3 và -2 > -3 nhưng 5.(-2) < 3.(-3)

Lời giải đúng

Lời giải đúng khá đơn giản: $P=\left(x^2-1\right)\left(x^2+1\right)=x^4-1\geq -1\Rightarrow P\geq -1.$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $x^4=0\Leftrightarrow x=0.$

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là -1, giá trị này đạt được khi và chỉ khi x = 0.

Bài 21: Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=x-2\sqrt{xy}+3y-2\sqrt{x}+1$

Lời giải "có vấn đề"

Điều kiện $x\geq 0;\ y\geq 0.$

Ta có $P = x - 2\sqrt{xy} + 3y - 2\sqrt{x} + 1 \; = \left(\sqrt{x} - \sqrt{y}\right)^2 + 1 - 2\left(\sqrt{x} - \sqrt{y}\right) - 2\sqrt{y} + 2y$

$= \left(\sqrt{x} - \sqrt{y} - 1\right)^2 + 2y - 2\sqrt{y} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \; = \left(\sqrt{x} - \sqrt{y} - 1\right)^2 + \frac{1}{2}\left(2\sqrt{y} - 1\right)^2 - \frac{1}{2}$

Từ đó đánh giá được $\min P = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow y = \frac{1}{4};\ x = \frac{9}{4}.$

Bình luận

Lời giải rất ‘logic”, liệu các bạn có chấp nhận không?

Giải đáp

Xác định sai điều kiện của biến nên tập xác định bị mở rộng dẫn đến kết quả sai.

Phân tích sai lầm, sửa chữa: Bài toán sai ngay từ điều kiện, điều kiện đúng là $x \geq 0;\ xy \geq 0.$ Thật vậy, nếu $x = 0$ thì y tùy ý, khi đó P = 3y + 1 không đạt giá trị nhỏ nhất vì y nhỏ tùy ý nên P nhỏ tùy ý.

Do sai ngay từ điều kiện nên lời giải trên đã bài toán thiếu 1 trường hợp.

Lời giải đúng

Điều kiện $x \geq 0;\ xy \geq 0.$

Xét hai trường hợp:

- TH 1: $x > 0;\ y \geq 0.$

Điều kiện $x \geq 0;\ y \geq 0.$

Ta có $P = x - 2\sqrt{xy} + 3y - 2\sqrt{x} + 1 = \left(\sqrt{x} - \sqrt{y}\right)^2 + 1 - 2\left(\sqrt{x} - \sqrt{y}\right) - 2\sqrt{y} + 2y$

$= \left(\sqrt{x} - \sqrt{y} - 1\right)^2 + 2y - 2\sqrt{y} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \; = \left(\sqrt{x} - \sqrt{y} - 1\right)^2 + \frac{1}{2}\left(2\sqrt{y} - 1\right)^2 - \frac{1}{2}$

Từ đó đánh giá được $\min P = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow y = \frac{1}{4};\ x = \frac{9}{4}.$

- TH 2: $x = 0;\ y$ tùy ý khi đó P = 3y + 1 không đạt giá trị nhỏ nhất vì y nhỏ tùy ý nên P nhỏ tùy ý.

KL chung: Biểu thức P không đạt giá trị nhỏ nhất.

Bài 22: Cho $(x,\ y)$ là nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases} x + y = m \\ x^2 + y^2 = -m^2 + 6 \end{cases}$ (I). Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $F = xy + 2(x + y)$

Lời giải ‘‘có vấn đề’’

Từ hệ (I) ta có $\begin{cases} x + y = m \\ (x + y)^2 - 2xy = -m^2 + 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = m \\ xy = m^2 - 3 \end{cases}$

Khi đó $F = m^2 - 3 + 2m = (m + 1)^2 - 4$

Ta thấy $(m+1)^2-4\ge -4$, dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $m=-1$nên $\min F=-4$ khi và chỉ khi $m=-1$.

Mặt khác dễ thấy m càng lớn thì $F=(m+1)^2-4$ càng lớn, do đó biểu thức F không đạt giá trị lớn nhất.

Bình luận

Bài toán có lỗ hổng không? Nếu có thì nó nằm ở đâu?

Giải đáp

Người làm toán đã không để ý điều kiện để hệ phương trình $\begin{cases} x+y=S \\ xy=P \end{cases}$ có nghiệm là $S^2\ge 4P$, do vậy đã không xác định điều kiện của m để hệ có nghiệm. Tình huống $\min F=-4$ khi và chỉ khi $m=-1$ chỉ là may mắn nhưng cũng không được chấp nhận, còn kết luận biểu thức F không đạt giá trị lớn nhất là sai lầm.

Lời giải đúng

Trước hết ta tìm điều kiện của m để hệ (I) có nghiệm $(I)\Leftrightarrow \begin{cases} x+y=m \\ xy=m^2-3 \end{cases}$,

Điều kiện để hệ (I) có nghiệm là $m^2\ge 4(m^2-3)\Leftrightarrow -3m^2+12\ge 0\Leftrightarrow -2\le m\le 2$

- Khi đó $F=m^2-3+2m=(m+1)^2-4$

Ta thấy $(m+1)^2-4\ge -4$, dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $m=-1$ (Thoả mãn $-2\le m\le 2$) nên $\min F=-4$ khi và chỉ khi $m=-1$.

Mặt khác, đặt $f(m)=m^2+2m-3$

+ Chỉ ra $m\in[-2;-1]$ thì hàm số $f(m)$ nghịch biến nên $max\,F=f(-2)=-3$ (1)

+ Chỉ ra $m\in[-1;2]$ thì hàm số $f(m)$ đồng biến nên $max\,F=f(2)=5$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $max\,F=f(2)=5$

Kết luận chung.

Bài 23: Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số: $f(x)=\sqrt{x^2-x+1}+\sqrt{x^2-\sqrt{3}x+1}$ với $x\in R$

Lời giải "có vấn đề"

Đưa hàm số trên về dạng $f(x)=\sqrt{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}+\sqrt{\left(x-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2}$

Trong hệ trục tọa độ Oxy, xét các điểm $A\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $B\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2}\right)$ và $C(x,0)$.

Khi đó $f(x)=CA+CB$. Vì $CA+CB\ge AB$,

Trong đó $AB=\sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{2}\left(\sqrt{3}-1\right)}{2}$,

Suy ra $\min f(x)=\frac{\sqrt{2}\left(\sqrt{3}-1\right)}{2}$.

<u>Bình luận</u>

Bài toán này giải bằng phương pháp đại số rất khó khăn nhưng nếu giải bằng phương pháp hình học như thế này thì "khá đơn giản" phải không các bạn? Còn bạn sẽ giải bài toán này như thế nào?

<u>Giải đáp</u>

Sử dụng mặt phẳng toạ độ nhưng việc chọn điểm chưa phù hợp.

Trước hết ta nhớ lại một kết quả đúng sau: Trong mặt phẳng cho hai điểm A, B và đường thẳng (d) đi qua điểm C. Khi đó:

a) Nếu A, B cùng phía so với (d) thì CA + CB đạt giá trị nhỏ nhất (GTNN) khi C là giao điểm của AB' với (d) (trong đó B' là điểm đối xứng của B qua (d)), lúc đó CA + CB = AB'.

b) Nếu Nếu A, B khác phía so với (d) thì CA + CB đạt GTNN khi C là giao điểm của AB với (d), lúc đó CA + CB = AB.

Trong lời giải trên đã chọn $A\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $B\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2}\right)$ là hai điểm cùng phía so với trục hoành. Đoạn AB không cắt trục Ox, do đó dấu "=" ở bất đẳng thức

$CA+CB\geq AB$ không xảy ra (không tồn tại điểm C' trên Ox sao cho C'A + C'B = AB), nghĩa là $CA+CB>AB$ nên việc kết luận $\min f(x)=\frac{\sqrt{2}\left(\sqrt{3}-1\right)}{2}$ là sai lầm.

<u>Lời giải đúng</u>

Xét hệ trục tọa Oxy, trên đó chọn $A\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $B'\left(\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{1}{2}\right)$ và $C(x,0)$.

Ta có $f(x)=CA+CB'\geq AB'$ (trong đó $AB'=\sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\right)^2+\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\sqrt{2}$) nên $f(x)\geq\sqrt{2}\,(\forall x\in R)$.

Đẳng thức xảy ra khi $x=\sqrt{3}-1$. Do đó GTNN của hàm số đã cho là $\sqrt{2}$, giá trị này đạt được khi và chỉ khi $x=\sqrt{3}-1$.

Bài 24: Cho a là số cố định, còn x, y là những số biến thiên. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=(x-2y+1)^2+(2x+ay+5)^2$$

Lời giải ''có vấn đề''

Do $(x-2y+1)^2 \geq 0,\ (2x+ay+5)^2 \geq 0$ nên $P \geq 0$.

Do đó $\min P = 0$. Giá trị này đạt được khi và chỉ khi hệ $\begin{cases} x-2y+1=0 \\ 2x+ay+5=0 \end{cases}$ (I) có nghiệm.

Ta có $\begin{cases} x-2y+1=0 \\ 2x+ay+5=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2y-1 \\ 2(2y-1)+ay+5=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2y-1 \\ (a+4)y=-3 \quad (*) \end{cases}$

Hệ (I) có nghiệm khi và chỉ khi phương trình (*) có nghiệm. Điều này xảy ra khi và chỉ khi $a+4 \neq 0$ hay $a \neq -4$

Vậy $Min\, P = 0$ khi $a \neq -4$

Bình luận

Nhưng đầu bài có cho $a \neq -4$ không?

Giải đáp

Không xét hết các trường hợp trong mỗi bài toán mà đã kết luận

Phân tích sai lầm: Bài toán cần xét hai trường hợp, lời giải trên chỉ đúng trong trường hợp $a \neq -4$, ta cần xét thêm trường hợp $a = -4$.

Lời giải đúng

Do $(x-2y+1)^2 \geq 0,\ (2x+ay+5)^2 \geq 0$ nên $P \geq 0$.

a) $M\text{in}\, P = 0$ khi và chỉ khi hệ $\begin{cases} x-2y+1=0 \\ 2x+ay+5=0 \end{cases}$ (I) có nghiệm.

Ta có $\begin{cases} x-2y+1=0 \\ 2x+ay+5=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2y-1 \\ 2(2y-1)+ay+5=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2y-1 \\ (a+4)y=-3 \quad (*) \end{cases}$

Hệ (I) có nghiệm khi và chỉ khi phương trình (*) có nghiệm. Điều này xảy ra khi và chỉ khi $a+4 \neq 0$ hay $a \neq -4$

b) Với $a=-4$, khi đó $P=(x-2y+1)^2+(2x-4y+5)^2$.

Đặt $t = x-2y+1$.

Ta có $P = t^2 + (2t+3)^2 = 5t^2+12t+9 = 5\left(t+\frac{6}{5}\right)^2 + \frac{9}{5} \geq \frac{9}{5}$

Suy ra $\min P = \frac{9}{5}$ khi $t = -\frac{6}{5}$ hay $x-2y=-\frac{11}{5}$.

Vậy:

+ Nếu $a \neq -4$ thì $M\text{in}\, P = 0$

+ Nếu $a=-4$ thì $M\text{in}P=\dfrac{9}{5}$