Chương 2

Đa thức đối xứng ba biến

2.1 Các khái niệm cơ bản

Định nghĩa 2.1. *Một đơn thức $\varphi(x, y, z)$ của các biến x, y, z được hiểu là hàm số có dạng*

$$\varphi(x, y, z) = a_{klm}x^k y^l z^m,$$

trong đó $k, l, m \in \mathbb{N}$ được gọi là bậc của các biến x, y, z;
số $a_{klm} \in \mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ được gọi là hệ số của đơn thức, còn số $k + j + m$ được gọi là bậc của đơn thức $\varphi(x, y, z)$.

Định nghĩa 2.2. *Một hàm số $P(x, y, z)$ của các biến x, y, z được gọi là một đa thức, nếu nó có thể được biểu diễn ở dạng tổng hữu hạn các đơn thức:*

$$P(x, y, z) = \sum_{k+l+m \leqslant n} a_{klm}x^k y^l z^m.$$

Bậc lớn nhất của các đơn thức trong đa thức được gọi là bậc của đa thức.

Định nghĩa 2.3. *Đa thức $P(x, y, z)$ được gọi là đối xứng, nếu nó không thay đổi với mọi hoán vị của x, y, z, nghĩa là*

$$P(x, y, z) = P(y, x, z) = P(z, y, x) = P(x, z, y).$$

Ví dụ : Các đa thức dưới đây là những đa thức đối đối xứng theo các biến x, y, z

$xy + yz + zx,$

$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz,$

$(x + y)(y + z)(z + x),$

$x(y^4 + z^4) + y(x^4 + z^4) + z(x^4 + y^4).$

Định nghĩa 2.4. *Đa thức* $f(x, y, z)$ *được gọi là thuần nhất bậc* m, *nếu:*

$$f(tx, ty, tz) = t^m f(x, y, z), \quad t \neq 0.$$

Định nghĩa 2.5. *Các đa thức*

$$\sigma_1 = x + y + z, \quad \sigma_2 = xy + yz + zx, \quad \sigma_3 = xyz,$$

được gọi là các đa thức đối xứng cơ sở của các biến x, y, z.

2.2 Tổng luỹ thừa và tổng nghịch đảo

Định nghĩa 2.6. *Các đa thức* $s_k = x^k + y^k + z^k$, $(k = 0, 1, ...)$, *được gọi là tổng luỹ thừa bậc* k *của các biến* x, y, z.

Định lý 2.1 (*Công thức Newton*). *Với mọi* $k \in \mathbb{Z}$, *ta có hệ thức*

$$s_k = \sigma_1 s_{k-1} - \sigma_2 s_{k-2} + \sigma_3 s_{k-3}. \tag{2.1}$$

Chứng minh. *Thật vậy, ta có*

$\sigma_1 s_{k-1} - \sigma_2 s_{k-2} + \sigma_3 s_{k-3} = (x + y + z)(x^{k-1} + y^{k-1} + z^{k-1})-$

$-(xy + xz + yz)(x^{k-2} + y^{k-2} + z^{k-2}) + xyz(x^{k-3} + y^{k-3} + z^{k-3}) =$

$= (x^k + y^k + z^k + xy^{k-1} + x^{k-1}y + xz^{k-1} + x^{k-1}z + yz^{k-1} + y^{k-1}z)-$

$-(x^{k-1}y + xy^{k-1}x^{k-1}z + xz^{k-1} + y^{k-1}zyz^{k-1} + xyz^{k-2} + xy^{k-2}z + x^{k-2}yz)+$

$+(x^{k-2}yz + xy^{k-2}z + xyz^{k-2}) = x^k + y^k + z^k = s_k.$

Định lý 2.2. *Mỗi tổng luỹ thừa $s_k = x^k + y^k + z^k$ đều có thể biểu diễn được dưới dạng một đa thức bậc n theo các biến $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$.*

Chứng minh. *Ta chứng minh Định lí 2.2 bằng phương pháp quy nạp. Ta có*

$$s_0 = 3, \quad s_1 = x + y + z = \sigma_1,$$

$$s_2 = x^2 + y^2 + z^2 = (x+y+z)^2 - 2(xy+yz+zx) = \sigma_1^2 - 2\sigma_2.$$

Như vậy, Định lí đúng với $n = 0, n = 1, n = 2$. Giả sử Định lí đúng với $n = k-1, n = k-2, n = k-3$ $(k \geq 3)$. Khi đó, theo công thức Newton (2.1), Định lí cũng đúng với $n = k$. Định lí được chứng minh.

Công thức truy hồi (2.1) cho phép biểu diễn các tổng luỹ thừa s_k theo các đa thức đối xứng cơ sở $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$, nếu biết trước công thức biểu diễn của s_{k-1}, s_{k-2}. Định lí dưới đây cho ta công thức biểu diễn trực tiếp s_k theo $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$.

Định lý 2.3 (*Công thức Waring*). *Tổng luỹ thừa s_k được biểu diễn qua các đa thức đối xứng cơ sở theo công thức:*

$$\frac{s_k}{k} = \sum_{l+2m+3n=k} \frac{(-1)^{k-l-m-n}(l+m+n-1)!}{l!m!n!}\sigma_1^l\sigma_2^m\sigma_3^n. \tag{2.2}$$

Công thức (2.2) *có thể được chứng minh bằng phương pháp quy nạp với sự trợ giúp của công thức* (2.1). *Nhờ công thức Waring chúng ta có thể tìm được các công thức sau*

$s_0 = 3,$

$s_1 = \sigma_1,$

$s_2 = \sigma_1^2 - 2\sigma_2,$

$s_3 = \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 + 3\sigma_3,$

$s_4 = \sigma_1^4 - 4\sigma_1^2\sigma_2 + 2\sigma_2^2 + 4\sigma_1\sigma_3,$

$s_5 = \sigma_1^5 - 5\sigma_1^3\sigma_2 + 5\sigma_1\sigma_2^2 + 5\sigma_1^2\sigma_3 - 5\sigma_2\sigma_3,$

$s_6 = \sigma_1^6 - 6\sigma_1^4\sigma_2 + 9\sigma_1^2\sigma_2^2 - 2\sigma_2^3 + 6\sigma_1^3\sigma_3 - 12\sigma_1\sigma_2\sigma_3 + 3\sigma_3^2,$

$$s_7 = \sigma_1^7 - 7\sigma_1^5\sigma_2 + 14\sigma_1^3\sigma_2^2 - 7\sigma_1\sigma_2^3 + 7\sigma_1^4\sigma_3 - 21\sigma_1^2\sigma_2\sigma_3 + 7\sigma_1\sigma_3^2 + 7\sigma_2^2\sigma_3,$$

$$s_8 = \sigma_1^8 - 8\sigma_1^6\sigma_2 + 20\sigma_1^4\sigma_2^3 - 16\sigma_1^2\sigma_2^3 + 2\sigma_2^4 + 8\sigma_1^5\sigma_3 - 32\sigma_1^3\sigma_2\sigma_3 + 12\sigma_1^2\sigma_3^2 + \\ + 24\sigma_1\sigma_2^2\sigma_3 - 8\sigma_2\sigma_3^2,$$

$$s_9 = \sigma_1^9 - 9\sigma_1^7\sigma_2 + 27\sigma_1^5\sigma_2^2 - 30\sigma_1^3\sigma_2^3 + 9\sigma_1^6\sigma_3 - 45\sigma_1^4\sigma_2\sigma_3 + 54\sigma_1^2\sigma_2^2\sigma_3 + \\ + 18\sigma_1^3\sigma_3^2 - -9\sigma_2^3\sigma_3 - 27\sigma_1\sigma_2\sigma_3^2 + 3\sigma_3^3$$

$$s_{10} = \sigma_1^{10} - 10\sigma_1^8\sigma_2 + 35\sigma_1^6\sigma_2^2 - 50\sigma_1^4\sigma_2^3 + 25\sigma_1^2\sigma_2^4 - 2\sigma_2^5 + 10\sigma_1^7\sigma_3 - \\ -60\sigma_1^5\sigma_2\sigma_3 + 100\sigma_1^3\sigma_2^2\sigma_3 + 25\sigma_1^4\sigma_3^2 - 40\sigma_1\sigma_2^3\sigma_3 + 60\sigma_1^2\sigma_2\sigma_3^2 + \\ +10\sigma_1\sigma_3^3 + 15\sigma_2^2\sigma_3^2.$$

Định nghĩa 2.7. *Các biểu thức* $s_{-k} = \dfrac{1}{x^k} + \dfrac{1}{y^k} + \dfrac{1}{z^k}, (k = 1, 2, ...)$, *được gọi là tổng nghịch đảo của các biến* x, y, z.

Do công thức (2.1) *đúng với* $\forall k \in \mathbb{Z}$, *nên nếu trong công thức trên thay* k *bởi* $3 - k$, *ta được*

$$s_{-k} = \frac{\sigma_2}{\sigma_3}s_{1-k} - \frac{\sigma_1}{\sigma_3}s_{2-k} + \frac{1}{\sigma_3}s_{3-k}. \tag{2.3}$$

Sử dụng công thức (2.3) *ta có thể tìm được các biểu thức của các tổng nghịch đảo theo các đa thức đối xứng cơ sở. Xét một số trường hợp sau:*

$$s_{-1} = \frac{\sigma_2}{\sigma_3}s_0 - \frac{\sigma_1}{\sigma_3}s_1 + \frac{1}{\sigma_3}s_2 = \frac{\sigma_2}{\sigma_3}3 - \frac{\sigma_1}{\sigma_3}\sigma_1 + \frac{1}{\sigma_3}(\sigma_1^2 - 2\sigma_2) = \frac{\sigma_2}{\sigma_3},$$

$$s_{-2} = \frac{\sigma_2}{\sigma_3}s_{-1} - \frac{\sigma_1}{\sigma_3}s_0 + \frac{1}{\sigma_3}s_1 = \frac{\sigma_2^2 - 2\sigma_1\sigma_3}{\sigma_3^2},$$

$$s_{-3} = \frac{\sigma_2}{\sigma_3}s_{-2} - \frac{\sigma_1}{\sigma_3}s_{-1} + \frac{1}{\sigma_3}s_0 = \frac{\sigma_2^3 - 3\sigma_1\sigma_2\sigma_3 + 3\sigma_3^2}{\sigma_3^3},$$

$$s_{-4} = \frac{\sigma_2}{\sigma_3}s_{-3} - \frac{\sigma_1}{\sigma_3}s_{-2} + \frac{1}{\sigma_3}s_{-1} = \frac{\sigma_2^4 - 4\sigma_1\sigma_2^2\sigma_3 + 4\sigma_2\sigma_3^2 + 2\sigma_1^2\sigma_3^2}{\sigma_3^4}.$$

2.3 Quỹ đạo của đơn thức

Định nghĩa 2.8. *Đa thức đối xứng với số các số hạng tối thiểu, một trong các số hạng của nó là đơn thức $x^k y^l z^m$ được gọi là quỹ đạo của đơn thức $x^k y^l z^m$ và được kí hiệu là $O(x^k y^l z^m)$.*

Rõ ràng là để tìm các quỹ đạo của đơn thức $x^k y^l z^m$ cần phải bổ sung vào đơn thức đó tất cả các hoán vị của x, y, z. Với $k \neq l \neq m$, ta có:

$$O(x^k y^l z^m) = x^k y^l z^m + x^k y^m z^l + x^l y^k z^m + x^l y^m z^k + x^m y^k z^l + x^m y^l z^k.$$

Ví dụ:

$$O(x^5y^2z) = x^5y^2z + x^5yz^2 + x^2y^5z + x^2yz^5 + xy^5z^2 + xy^2z^5,$$

$$O(x^3y) = O(x^3yz^0) = x^3y + xy^3 + x^3z + xz^3 + y^3z + yz^3.$$

Nếu như trong đơn thức $x^k y^l z^m$ có hai số mũ nào đó bằng nhau, chẳng hạn $k = l \neq m$, thì

$$O(x^k y^k z^m) = x^k y^k z^m + x^k y^m z^k + x^m y^k z^k.$$

Chẳng hạn :

$O(xyz^5) = xyz^5 + xy^5z + x^5yz,$

$O(xy) = O(xyz^0) = xy + xz + yz,$

$O(x^3y^3) = x^3y^3 + x^3z^3 + y^3z^3.$

Các trường hợp riêng của quỹ đạo :

$$O(x) = O(xy^0z^0) = x + y + z = \sigma_1,\ O(xy) = O(xyz^0) = xy + xz + yz = \sigma_2,$$

$$O(xyz) = xyz = \sigma_3, \quad O(x^k) = O(x^k y^0 z^0) = x^k + y^k + z^k = s_k,\ k \in \mathbb{N}.$$

Định lý 2.4. *Quỹ đạo của mọi đơn thức biểu diễn được dưới dạng đa thức theo các đơn thức đối xứng cơ sở.*

Chứng minh. *Trước hết ta có* $O(x^k) = s_k$, *nên theo Định lí 2.2,* $O(x^k)$ *biểu diễn được theo các đa thức đối xứng cơ sở.*

Chuyển sang trường hợp khi quỹ đạo có dạng $O(x^k y^l)$. *Ta có công thức*

$$O(x^k y^l) = O(x^k)O(x^l) - O(x^{k+l}) \quad (k \neq l). \tag{2.4}$$

Thật vậy, ta có

$$O(x^k)O(x^l) - O(x^{k+l}) = (x^k + y^k + z^k)(x^l + y^l + z^l) - (x^{k+j} + y^{k+l} + z^{k+l}) =$$

$$= (x^{k+l} + y^{k+l} + z^{k+l} + x^k y^l + x^l y^k + x^k z^l + x^l z^k + y^k z^l + y^l z^k) -$$

$$-(x^{k+l} + y^{k+l} + z^{k+l}) = x^k y^l + x^l y^k + x^k z^l + x^l z^k + y^k z^l + y^l z^k = O(x^k y^l).$$

Nếu $k = l$ *thì công thức* (2.4) *được thay bởi công thức sau:*

$$O(x^k y^k) = \frac{1}{2}[(O(x^k))^2 - O(x^{2k})]. \tag{2.5}$$

Từ (2.4) *và* (2.5), *suy ra các quỹ đạo* $O(x^k y^l)$ *biểu diễn được ở dạng đa thức theo các biến* $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$.

Cuối cùng, nếu đơn thức $x^k y^l z^m$ *phụ thuộc vào cả ba biến* x, y, z, *nghĩa là* $k \neq l \neq m \neq 0$, *thì đơn thức* $x^k y^l z^m$ *sẽ chia hết cho luỹ thừa với số mũ nào đó của* xyz. *Vì vậy trong đa thức* $O(x^k y^l z^m)$ *có thể đưa luỹ thừa với số mũ nào đó của* $xyz = \sigma_3$ *ra ngoài ngoặc, khi đó trong ngoặc chỉ là quỹ đạo phụ thuộc vào số biến ít hơn ba. Do đó, quỹ đạo* $O(x^k y^l z^m)$ *biểu diễn được dưới dạng đa thức của* $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$. *Định lí được chứng minh.*

Bằng cách trên, ta có thể dễ dàng nhận được các công thức sau:

$O(xy) = \sigma_2,$

$O(x^2 y) = \sigma_1\sigma_2 - 3\sigma_3,$

$O(x^2 y^2) = \sigma_2^2 - 2\sigma_1\sigma_3,$

$O(x^3 y) = \sigma_1^2\sigma_2 - 2\sigma_2^2 - \sigma_1\sigma_3,$

$O(x^3 y^2) = \sigma_1\sigma_2^2 - 2\sigma_1^2\sigma_3 - \sigma_2\sigma_3,$

$$O(x^4y) = \sigma_1^3\sigma_2 - 3\sigma_1\sigma_2^2 - \sigma_1^2\sigma_3 + 5\sigma_2\sigma_3,$$
$$O(x^3y^3) = \sigma_2^3 + 3\sigma_3^2 - 3\sigma_1\sigma_2\sigma_3,$$
$$O(x^4y^2) = \sigma_1^2\sigma_2^2 - 2\sigma_2^3 - 2\sigma_1^3\sigma_3 + 4\sigma_1\sigma_2\sigma_3 - 3\sigma_3^2,$$
$$O(x^5y) = \sigma_1^4\sigma_2 - 4\sigma_1^2\sigma_2^2 - \sigma_1^3\sigma_3 + 7\sigma_1\sigma_2\sigma_3 + 2\sigma_2^3 - 3\sigma_3^2.$$

Sử dụng các công thức biểu diễn của tổng nghịch đảo theo các đa thức cơ sở, dễ dàng tìm được các quỹ đạo $O(x^ky^k)$. *Thật vậy, ta có*

$$s_{-k} = \frac{1}{x^k} + \frac{1}{y^k} + \frac{1}{z^k} = \frac{y^kz^k + x^kz^k + x^ky^k}{x^ky^kz^k} = \frac{O(x^ky^k)}{\sigma_3^k}.$$

Suy ra

$$O(x^ky^k) = \sigma_3^k s_{-k},$$
$$O(x^2y^2) = \sigma_3^2 s_{-2} = \sigma_2^2 - 2\sigma_1\sigma_3,$$
$$O(x^3y^3) = \sigma_3^3 s_{-3} = \sigma_2^3 - 3\sigma_1\sigma_2\sigma_3 + 3\sigma_3^2,$$
$$O(x^4y^4) = \sigma_3^4 s_{-4} = \sigma_2^4 - 4\sigma_1\sigma_2^2\sigma_3 + 4\sigma_2\sigma_3^2 + 2\sigma_1^2\sigma_3^2.$$

2.4 Các định lí cơ bản của đa thức đối xứng ba biến

Định lý 2.5. *Mọi đa thức đối xứng ba biến* x, y, z *đều có thể biểu diễn ở dạng đa thức theo các biến* $\sigma_1 = x + y + z$, $\sigma_2 = xy + yz + zx$, $\sigma_3 = xyz$.

Chứng minh. *Giả sử* $f(x, y, z)$ *là đa thức đối xứng và* $ax^ky^lz^m$ *là một trong các số hạng của* $f(x, y, z)$. *Do tính đối xứng, cùng với số hạng trên ,*$f(x, y, z)$ *chứa quỹ đạo* $O(x^ky^lz^m)$ *với thừa số chung là a. Như vậy ta có*

$$f(x, y, z) = aO(x^ky^lz^m) + f_1(x, y, z), \tag{2.6}$$

trong đó $f_1(x, y, z)$ *là đa thức đối xứng nào đó với ít số hạng hơn. Đối với* $f_1(x, y, z)$, *ta lại có công thức tương tự như công thức* (2.6). *Theo một số hữu hạn bước nói trên, ta có thể phân tích đa thức* $f(x, y, z)$ *thành tổng các quỹ đạo. Theo Định lí 2.4, mỗi quỹ đạo lại là một đa thức theo các đa thức đối xứng cơ sở, do đó mọi đa thức đối* *xứng có thể biểu diễn được ở dạng đa thức theo các đa thức đối xứng cơ sở. Định lí được chứng minh.*

Định lý 2.6 (*Định lí duy nhất*). *Nếu hai đa thức $\varphi(t,u,v)$, $\psi(t,u,v)$ khi thay $t = \sigma_1 = x+y+z$, $u = xy+xz+yz$, $v = xyz$ cho ta cùng một đa thức đối xứng $P(x,y,z)$, thì chúng phải đồng nhất bằng nhau.*

Chứng minh. *Để thuận tiện ta đặt*

$$t_1 = t, \quad t_2 = u, \quad t_3 = v; \quad x_1 = x, \quad x_2 = y, \quad x_3 = z.$$

$$\phi(t_1,t_2,t_3) = \varphi(t_1,t_2,t_3) - \psi(t_1,t_2,t_3).$$

Theo giả thiết ta có

$$\phi(\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3) = P(x_1,x_2,x_3) - P(x_1,x_2,x_3) = 0.$$

$$\forall\ \sigma_1 = x_1+x_2+x_3, \quad \sigma_2 = x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3, \quad \sigma_3 = x_1x_2x_3.$$

Chúng ta sẽ chứng minh ϕ là đa thức không, nghĩa là đồng nhất bằng không. Đặt

$$Q(x_1,x_2,x_3) = \phi(x_1+x_2+x_3, x_1x_2+x_2x_3+x_2x_3, x_1x_2x_2) = \phi(\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3).$$

Rõ ràng $Q(x_1,x_2,x_3)$ là đa thức đối xứng. Ta viết lại $\phi(t_1,t_2,t_3)$ ở dạng

$$\phi(t_1,t_2,t_3) = \phi_0(t_1,t_2) + \phi_1(t_1,t_2)t_3 + \phi_2(t_1,t_2)t_3^2 + ... + \phi_m(t_1,t_2)t_3^m$$

và kí kí hiệu τ_1, τ_2 là những đa thức đối xứng cơ sở của các biến x_1, x_2. Dễ thấy rằng

$$\sigma_k(x_1,x_2,0) = \tau_k(x_1,x_2) \quad (k=1,2), \quad \sigma_3(x_1,x_2,0) = \tau_3(x_1,x_2) = 0.$$

Theo điều kiện của bài toán ta có

$$Q(x_1,x_2,x_3) = \phi_0(\sigma_1,\sigma_2) + \phi_1(\sigma_1,\sigma_2)\sigma_3 + \phi_2(\sigma_1,\sigma_2)\sigma_3^2 +$$

$$+ ... + \phi_m(\sigma_1,\sigma_2)\sigma_3^m = 0, \ \forall x_1,x_2,x_3.$$

Khi đó thì

$$R(x_1,x_2) := Q(x_1,x_2,0) = \phi_0(\tau_1,\tau_2) = 0, \quad \forall x_1, x_1.$$

Vì $R(x_1,x_2)$ là đa thức đối xứng hai biến, nên theo tính duy nhất của Định lí cơ bản 2 biến suy ra ϕ_0 đồng nhất bằng không. Như vậy ta có

$$Q(x_1,x_2,x_3) = \sigma_3[\phi_1(\sigma_1,\sigma_2) + \phi_2(\sigma_1,\sigma_2)\sigma_3 +$$

$$+ \ldots + \phi_m(\sigma_1,\sigma_2)\sigma_3^{m-1} = 0], \ \forall x_1,x_2,x_3.$$

Và vì $\sigma_3 \neq 0$, nên đa thức

$$Q_1(x_1,x_2,x_3) = \phi_1(\sigma_1,\sigma_2) + \phi_2(\sigma_1,\sigma_2)\sigma_3 + \ldots + \phi_m(\sigma_1,\sigma_2)\sigma_3^{m-1} = 0.$$

Lập luận tương tự như phần trên suy ra ϕ_1 đồng nhất bằng không. Hoàn toàn tương tự ta có $\phi_2, \phi_3, \ldots, \phi_m$ là những đa thức không. Vậy ϕ là đa thức không. Định lí được chứng minh.

Để biểu diễn một đa thức đối xứng qua các đa thức đối xứng cơ sở, một cách tổng quát, ta có thể tiến hành theo các bước như trong chứng minh của Định lí 2.5. Tuy nhiên, trong trường hợp đa thức là thuần nhất, ta có thể dùng phương pháp " hệ số bất định." Cơ sở của phương pháp này là mệnh đề sau đây.

Mệnh đề 2.1. *Cho $f_m(x,y,z)$ là một đa thức đối xứng thuần nhất bậc m. Khi đó $f_m(x,y,z)$ được biểu diễn qua các đa thức đối xứng cơ sở theo công thức*

$$f_m(x,y,z) = \sum_{i+2j+3k=m} a_{ijk}\sigma_1^i\sigma_2^j\sigma_3^k, \quad (j,j,k \in \mathbb{N}).$$

Mệnh đề 2.1 được suy ra từ các định lí cơ bản với chú ý rằng, $\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3$ lần lượt có bậc là 1, 2, 3 đối với các biến x,y,z. Dưới đây là một số trường hợp riêng của Mệnh đề này.

$f_1(x,y,z) = a_1\sigma_1,$

$f_2(x,y,z) = a_1\sigma_1^2 + a_2\sigma_2,$

$$f_3(x,y,z) = a_1\sigma_1^3 + a_2\sigma_1\sigma_2 + a_3\sigma_3,$$

$$f_4(x,y,z) = a_1\sigma_1^2 + a_2\sigma_1^2\sigma_2 + a_3\sigma_2^2 + a_4\sigma_1\sigma_3,$$

$$f_5(x,y,z) = a_1\sigma_1^5 + a_2\sigma_1^3\sigma_2 + a_3\sigma_1\sigma_2^2 + a_4\sigma_1^2\sigma_3 + a_5\sigma_2\sigma_3,$$

$$f_6(x,y,z) = a_1\sigma_1^6 + a_2\sigma_1^4\sigma_2 + a_3\sigma_1^2\sigma_2^2 + a_4\sigma_2^3 a_5\sigma_1^3\sigma_3 + a_6\sigma_3^2 + a_7\sigma_1\sigma_2\sigma_3,$$

trong đó, $a_i, (i = 1, 2, ...)$ *là các hằng số được xác định duy nhất (theo Định lí 2.6) và để tìm các hệ số này, ta chỉ việc cho* x, y, z *nhận các giá trị cụ thể thích hợp nào đó. Xét các ví dụ sau.*

Ví dụ 2.1. Biểu diễn đa thức sau đây theo các đa thức đối xứng cơ sở

$$f(x,y,z) = x^3 + y^3 + z^3 - 4xyz + 2x^2y + 2xy^2 + 2x^2z + 2xz^2 + 2y^2z + 2yz^2.$$

Lời giải. *Ta có*

$$f(x,y,z) = O(x^3) - 4O(xyz) + 2O(x^2y) = (\sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 + 3\sigma_3) -$$

$$-4\sigma_3 + 2(\sigma_1\sigma_2 - 3\sigma_3) = \sigma_1^3 - \sigma_1\sigma_2 - 7\sigma_3.$$

Ví dụ 2.2. Biểu diễn đa thức sau đây theo các đa thức đối xứng cơ sở

$$\Delta(x,y,z) = (x-y)^2(x-z)^2(y-z)^2.$$

Lời giải. *Do* $\Delta(x,y,z)$ *là đa thức đối xứng thuần nhất bậc 6, nên theo Mệnh đề 2.1, ta có*

$$\Delta(x,y,z) = a_1\sigma_1^6 + a_2\sigma_1^4\sigma_2 + a_3\sigma_1^2\sigma_2^2 + a_4\sigma_2^3 + a_5\sigma_1^3\sigma_3 + a_6\sigma_3^2 + a_7\sigma_1\sigma_2\sigma_3.$$

Nhận xét rằng, $\Delta(x,y,z)$ *có bậc cao nhất đối với từng biến là 4, nên* $a_1 = a_2 = 0$. *Để tìm các hệ số còn lại, ta cho* (x,y,z) *lần lượt nhận các giá trị* $(0,1,-1), (0,1,1), (1,1,-2), (-1,1,1), (1,1,1)$, *ta tìm được* $a_4 = -4, a_3 = 1, a_6 = -27, a_5 = -4, a_7 = 18$. *Vậy, ta có kết quả*

$$\Delta(x,y,z) = \sigma_1^2\sigma_2^2 - 4\sigma_2^3 - 4\sigma_1^3\sigma_3 - 27\sigma_3^2 + 18\sigma_1\sigma_2\sigma_3.$$

Bài tập

Biểu diễn các đa thức sau theo các đa thức đối xứng cơ sở

1. $x^4 + y^4 + z^4 - 2x^2y^2 - 2x^2z^2 - 2y^2z^2$.

2. $x^5y^2 + x^5z^2 + x^2y^5 + x^2z^5 + y^5z^2 + y^2z^5$.

3. $(x + y)(y + z)(z + x)$.

4. $(x^2 + y^2)(y^2 + z^2)(z^2 + x^2)$.

5. $(2x + y + z)(x + 2y + z)(x + y + 2z)$.

2.5 Đa thức phản đối xứng

Định nghĩa 2.9. *Đa thức phản đối xứng là đa thức thay đổi dấu khi thay đổi vị trí của hai biến bất kì.*

Ví dụ: Các đa thức $x - y$, $x^3 - y^3$, $x^4y - xy^4$ *là các đa thức phản đối xứng hai biến, còn đa thức* $(x - y)(x - z)(y - z)$ *là ví dụ đơn giản về đa thức phản đối xứng ba biến.*

Sau này chúng ta sẽ cần đến Định lí Bezout dưới đây.

Định lý 2.7 (*Định lí Bezout*). *Giả sử* $f(t)$ *là đa thức bậc* $n \geq 1$. *Khi đó số dư trong phép chia của đa thức cho* $t - a$ *bằng* $f(a)$. *Đa thức* $f(t)$ *chia hết cho* $t - a$ *khi và chỉ khi* $f(a) = 0$.

Chứng minh. *Thật vậy, thực hiện phép chia đa thức* $f(t)$ *cho* $t - a$, *ta được*

$$f(t) = g(t)(t - a) + r(t).$$

Vì $t-a$ *có bậc bằng 1, nên đa thức dư* $r(t)$ *có bậc bằng không, nghĩa là* $r(t) = r = const$. *Trong đẳng thức trên cho* $t = a$, *ta được* $r = f(a)$. *Từ đó suy ra* $f(t)$ *chia hết cho* $t - a$ *khi và chỉ khi* $f(a) = 0$. *Định lí được chứng minh.*

Định lý 2.8. *Mọi đa thức phản đối xứng hai biến* $f(x, y)$ *đều có dạng:*

$$f(x, y) = (x - y)g(x, y), \tag{2.7}$$

trong đó $g(x,y)$ là đa thức đối xứng theo các biến x, y.

Chứng minh. *Trước hết nhận xét rằng, nếu $f(x,y)$ là đa thức phản đối xứng thì $f(x,x) = 0$. Thật vậy, theo định nghĩa ta có*

$$f(x,y) = -f(y,x).$$

Trong đẳng thức trên đặt $y = x$, ta có $f(x,x) = -f(x,x)$, suy ra $f(x,x) = 0$.
Ta kí hiệu $F_y(x) = f(x,y)$ là đa thức chỉ theo biến x (coi y là tham số). Theo nhận xét trên, ta có $F_y(y) = 0$. Theo Định lí Bezout, đa thức $F_y(x)$ chia hết cho $x - y$, do đó $f(x,y)$ chia hết cho $x - y$, nghĩa là có dạng

$$f(x,y) = (x-y)g(x,y), \tag{2.8}$$

trong đó $g(x,y)$ là đa thức nào đó. Trong công thức (2.8) đổi chỗ của x, y, ta có

$$f(y,x) = (y-x)g(y,x)$$

Vì theo giả thiết $f(x,y) = -f(y,x)$ và cũng vì $(x-y) = -(y-x)$, nên ta có :

$$f(x,y) = (x-y)g(y,x). \tag{2.9}$$

Từ (2.8) và (2.9), suy ra $g(x,y)$ là đa thức đối xứng theo các biến x, y. Định lí được chứng minh.

Định lý 2.9. *Mọi đa thức phản đối xứng ba biến $f(x,y,z)$ đều có dạng*

$$f(x,y,z) = (x-y)(x-z)(y-z)g(x,y,z),$$

trong đó $g(x,y,z)$ là đa thức đối xứng theo các biến x, y, z.

Chứng minh Định lí 2.9 được tiến hành tương tự như chứng minh Định lí 2.8.
Trong đa thức phản đối xứng, các đa thức $x - y$ và $T = (x-y)(x-z)(y-z)$ đóng vai trò rất quan trọng và được gọi là các đa thức phản đối xứng đơn giản nhất tương ứng đối với đa thức phản đối xứng hai biến và ba biến.

Định nghĩa 2.10. *Bình phương của đa thức phản đối xứng đơn giản nhất gọi là biệt thức .*

Như vậy, trong trường hợp hai biến, biệt thức của các biến x, y là

$$\Delta(x,y) = (x-y)^2,$$

còn trong trường hợp ba biến, thì biệt thức của các biến x, y, z là

$$\Delta(x,y,z) = T^2 = (x-y)^2(x-z)^2(y-z)^2.$$

Dễ dàng thấy rằng:

$$\Delta(x,y) = \sigma_1^2 - 4\sigma_2.$$

Theo Ví dụ 2.2, ta có

$$\Delta(x,y,z) = -4\sigma_1^3\sigma_3 + \sigma_1^2\sigma_2^2 + 18\sigma_1\sigma_2\sigma_3 - 4\sigma_2^3 - 27\sigma_3^2, \tag{2.10}$$

trong đó $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ là các đa thức đối xứng cơ sở.

2.6 Công thức Viète và phương trình bậc ba

Mặc dù cách giải phương trình bậc ba tổng quát không được giới thiệu ở bậc phổ thông, nhưng các bài toán liên quan đến phương trình bậc ba lại thường gặp trong các kì thi vào Đại học và thi học sinh giỏi. Trong mục này trình bày một số bài toán liên quan đến công thức Viète của phương trình bậc ba.

Định lý 2.10 (*Công thức Viète*). *Nếu x_1, x_2, x_3 là các nghiệm của phương trình*

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0, \quad (a \neq 0),$$

thì

$$\begin{cases} \sigma_1 = & x_1 + x_2 + x_3 & = -\dfrac{b}{a}, \\ \sigma_2 = & x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 & = \dfrac{c}{a}, \\ \sigma_3 = & x_1x_2x_3 & = -\dfrac{d}{a}. \end{cases}$$

Chứng minh. *Ta có đồng nhất thức*

$$a(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3) \equiv ax^3+bx^2+cx+d \Leftrightarrow$$

$$ax^3 - a(x_1+x_2+x_3)ax^2 + a(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)x - ax_1x_2x_3 \equiv$$

$$\equiv ax^3+bx^2+cx+d$$

So sánh hệ số các luỹ thừa cùng bậc của x ở hai vế của đẳng thức trên, suy ra điều phải chứng minh.

Định lý 2.11. *Xét phương trình bậc ba*

$$x^3+ax^2+bx+c=0 \tag{2.11}$$

với các hệ số là các số thực và

$$\Delta = -4a^3c + a^2b^2 + 18abc - 4b^3 - 27c^2 \tag{2.12}$$

là được gọi biệt thức của phương trình. Khi đó:

a) Nếu $\Delta > 0$, thì tất cả các nghiệm x_1, x_2, x_3 là các số thực và khác nhau.

b) Nếu $\Delta < 0$, thì một nghiệm của phương trình là thực, còn hai nghiệm kia là phức liên hợp cùng nhau.

c) Nếu $\Delta = 0$ và $a^2-3b \neq 0$, thì phương trình (2.11) có ba nghiệm thực, trong đó có hai nghiệm trùng nhau (nghiệm kép), nghiệm còn lại khác hai nghiệm trên. Nếu $\Delta = 0$ và $a^2-3b=0$ thì phương trình có ba nghiệm thực trùng nhau (nghiệm bội).

Chứng minh. *Giả sử x_1, x_2, x_3 là các nghiệm của phương trình (2.11) (có thể là các số phức, nhưng ít nhất có một nghiệm là thực). Khi đó theo công thức Viète cho phương trình bậc ba, ta có*

$$\sigma_1 = x_1+x_2+x_3 = a,\ \sigma_2 = x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3 = b,\ \sigma_3 = x_1x_2x_3 = -c.$$

Xét bình phương của đa thức phản đối xứng đơn giản nhất của x_1, x_2, x_3.

$$\Delta = T^2 = (x_1 - x_2)^2(x_1 - x_3)^2(x_2 - x_3)^2.$$

Theo công thức (2.10) *và các hệ thức Viète trên đây, ta có*

$$\Delta = -4a^3c + a^2b^2 + 18abc - 4b^3 - 27c^2.$$

a) Rõ ràng là nếu tất cả các nghiệm đều là thực và khác nhau, thì T *là số thực và khác không, do đó* $\Delta = T^2 > 0$. *Điều ngược lại được suy ra từ dưới đây.*

b) Giả sử x_1 *là nghiệm thực, còn* x_2, x_3 *là phức:* $x_2 = \alpha + i\beta$, $x_3 = \alpha - i\beta$. *Khi đó*

$$T = (x_1 - \alpha - i\beta)(x_1 - \alpha + i\beta)2\beta i = 2i\beta[(x_1 - \alpha)^2 + \beta^2].$$

Do đó

$$\Delta = T^2 = -4\beta^2[(x_1 - \alpha)^2 + \beta^2] < 0.$$

c) Từ kết quả trình bày trong phần b) ta thấy nếu phương trình (2.11) *có hai nghiệm bằng nhau thì các nghiệm của phương trình đều là thực và* $\Delta = 0$. *Để làm sáng tỏ khi nào có chỉ có hai nghiệm bằng nhau (nghiệm kép), hoặc cả ba nghiệm bằng nhau (nghiệm bội), ta xét biểu thức*

$$\Delta_1 = (x_1 - x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 + (x_3 - x_1)^2 = 2(\sigma_1^2 - 3\sigma_2) = 2(a^2 - 3b).$$

Rõ ràng là, nếu x_1, x_2, x_3 *là các số thực, thì* $\Delta_1 = 0$, *tức là* $a^2 = 3b$ *khi và chỉ khi phương trình* (2.11) *có ba nghiệm thực bằng nhau (nghiệm bội). Vậy nếu* $\Delta = 0$ *và* $a^2 = 3b$ *thì phương trình* (2.11) *có nghiệm bội, còn nếu* $\Delta = 0$ *và* $a^2 \neq 3b$, *thì phương trình có nghiệm số kép. Định lí được chứng minh.*

Ví dụ 2.3. Thành lập một phương trình bậc ba có các nghiệm là bình phương các nghiệm của phương trình

$$u^3 - 2u^2 + u - 12 = 0.$$

Lời giải. *kí hiệu* u_1, u_2, u_3 *là các nghiệm của phương trình đã cho và* τ_1, τ_2, τ_3 *là các đa thức đối xứng cơ sở của các biến* u_1, u_2, u_3. *Theo Định lí Viète ta có*

$$\tau_1 = u_1 + u_2 + u_3 = 2, \quad \tau_2 = u_1u_2 + u_2u_3 + u_3u_1 = 1, \quad \tau_3 = u_1u_2u_3 = 12.$$

Giả sử phương trình cần lập có dạng

$$x^3 - \sigma_1 x^2 + \sigma_2 x - \sigma_3 = 0$$

và x_1, x_2, x_3 *là các nghiệm của nó. Theo điều kiện của đề bài ta có*

$$\sigma_1 = x_1 + x_2 + x_3 = u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = s_2 = \tau_1^2 - 2\tau_2 = 2^2 - 2 = 4,$$

$$\sigma_2 = x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = u_1^2u_2^2 + u_2^2u_3^2 + u_3^2u_1^2 = O(u_1^2u_2^2)$$

$$= \tau_2^2 - 2\tau_1\tau_3 = 1 - 2(2)(12) = -47.$$

$$\sigma_3 = x_1x_2x_3 = u_1^2u_2^2u_3^2 = \tau_3^2 = 12^2 = 144.$$

Vậy phương trình bậc ba cần lập sẽ là

$$x^3 - 4x^2 - 47x - 144 = 0.$$

Ví dụ 2.4 (*CHDC Đức, 1970*). . Cho x_1, x_2, x_3 là nghiệm của phương trình

$$ax^3 - ax^2 + bx + b = 0, \quad (a.b \neq 0).$$

Chứng minh rằng

$$(x_1 + x_2 + x_3)\Big(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3}\Big) = -1.$$

Lời giải. *Theo Định lí Viète, ta có*

$$\sigma_1 = x_1 + x_2 + x_3 = 1, \quad \sigma_2 = x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = \frac{b}{a}, \quad \sigma_3 = x_1x_2x_3 = -\frac{b}{a}.$$

Khi đó

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} = \frac{x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1}{x_1x_2x_3} = \frac{\sigma_2}{\sigma_3} = -1.$$

Do đó ta có

$$(x_1 + x_2 + x_3)(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3}) = -1.$$

Ví dụ 2.5 (*Áo, 1983*). Tìm a để các nghiệm x_1, x_2, x_3 của đa thức $f(x) = x^3 - 6x^2 + ax + a$ thoả mãn đẳng thức

$$(x_1 - 3)^2 + (x_2 - 3)^2 + (x_3 - 3)^2 = 0.$$

Lời giải. *Đặt $y = x - 3$. bài toán trở thành: tìm a để các nghiệm y_1, y_2, y_3 của đa thức*

$$g(y) = f(y+3) = (y+3)^3 - 6(y+3)^2 + a(y+3) + a = y^3 + 3y^2 + (a-9)y + 4a - 27$$

thoả mãn hệ thức

$$y_1^3 + y_2^3 + y_3^3 = 0.$$

Theo Định lí Viète, ta có

$$\sigma_1 = y_1 + y_2 + y_3 = -3, \sigma_2 = y_1y_2 + y_2y_3 + y_3y_1a - 9, \sigma_3 = y_1y_2y_3 = 27 - 4a.$$

Khi đó

$$y_1^3 + y_2^3 + y_3^3 = \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 + 3\sigma_3 = (-3)^3 - 3(-3)(a-9) + 3(27-4a) = -27 - 3a,$$

$$y_1^3 + y_2^3 + y_3^3 = 0 \Leftrightarrow -27 - 3a = 0 \Leftrightarrow a = -9.$$

Vậy giá trị cần tìm của a là $a = -9$.

Ví dụ 2.6 (*Việt nam, 1975*). Không giải phương trình

$$x^3 - x + 1 = 0,$$

hãy tính tổng các luỹ thừa bậc tám của các nghiệm .

Lời giải. *Gọi x_1, x_2, x_3 là các nghiệm của phương trình đã cho. Theo công thức Viète, ta có*

$$\sigma_1 = x_1 + x_2 + x_3 = 0,\ \sigma_2 = x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = -1,\ \sigma_3 = x_1x_2x_3 = -1.$$

Từ phương trình đã cho suy ra

$$x_i^3 = x_i - 1,\ x_i^5 = x_i^2(x_i - 1) = x_i^3 - x_i^2 = x_i - 1 - x_i^2,\ (i = 1, 2, 3),$$

$$x_i^8 = x_i^5 x_i^3 = (x_i - 1 - x_i^2)(x_i - 1) = 2x_i^2 - 2x_i + 1 - x_i^3 = 2x_i^2 - x_i + 2.$$

Như vậy, ta có

$$x_1^8 + x_2^8 + x_3^8 = 2(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) - (x_1 + x_2 + x_3) + 6 = 2(\sigma_1^2 - 2\sigma_2) - \sigma_1 + 6 = 10.$$

Nhận xét: Ta có thể giải bài toán này bằng cách sử dụng công thức Waring. Ta có

$$x_1^8 + x_2^8 + x_3^8 = s_8 = \sigma_1^8 - 8\sigma_1^6\sigma_2 + 20\sigma_1^4\sigma_2^2 - 16\sigma_1^2\sigma_2^3 + 2\sigma_2^4 +$$

$$+8\sigma_1^5\sigma_3 - 32\sigma_1^3\sigma_2\sigma_3 - 12\sigma_1^2\sigma_3^2 + 24\sigma_1^2\sigma_2^2\sigma_3 - 8\sigma_2\sigma_3^2.$$

Thay $\sigma_1 = 0, \sigma_2 = -1, \sigma_3 = -1$, *ta được* $x_1^8 + x_2^8 + x_3^8 = 10$.

Ví dụ 2.7. Biết rằng t, u, v là ba nghiệm thực của phương trình

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0, \tag{2.13}$$

trong đó a, b, c là các số thực. Tìm điều kiện của a, b, c để t^3, u^3, v^3 nghiệm đúng phương trình

$$x^3 + a^3x^2 + b^3x + c^3 = 0. \tag{2.14}$$

Lời giải. *Áp dụng công thức Viète cho phương trình* (2.13), *ta có*

$$\sigma_1 = t + u + v = -a,\ \sigma_2 = tu + uv + vt = b,\ \sigma_3 = tuv = -c. \tag{2.15}$$

Giả sử t^3, u^3, v^3 *là các nghiệm của phương trình* (2.14). *Theo công thức Viète, ta có*

$$\begin{cases} t^3 + u^3 + v^3 = -a^3, \\ t^3u^3 + u^3v^3 + v^3t^3 = b^3, \\ t^3u^3v^3 = -c^3. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 + 3\sigma_3 = -a^3, \\ \sigma_2^3 - 3\sigma_1\sigma_2\sigma_3 + 3\sigma_3^2 = b^3, \\ \sigma_3 = -c^3. \end{cases}$$

Thay các giá trị của $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ *từ* (2.15) *vào hệ trên và rút gọn, ta thu được hệ thức* $c = ab$. *Với* $c = ab$, *phương trình* (2.13) *trở thành*

$$x^3 + ax^2 + bx + ab = 0 \Leftrightarrow (x + a)(x^2 + b) = 0.$$

Vì tất cả các nghiệm của phương trình đã cho là thực, nên ta phải có $b \leqslant 0$. *Vậy, điều kiện cần tìm của* a, b, c *là* $c = ab$ *và* $b \leqslant 0$.

Bài tập

1. *Thành lập một phương trình bậc ba có các nghiệm là lập phương các nghiệm của phương trình:*

$$u^3 - 2u^2 + u - 12 = 0.$$

2. *Biết rằng* x_1, x_2, x_3 *là các nghiệm của phương trình*

$$x^3 - 2x^2 + x + 1 = 0,$$

Thành lập phương trình bậc ba mà các nghiệm của nó là

a) $y_1 = x_2x_3, \quad y_2 = x_3x_1, \quad y_3 = x_1x_2,$

b) $y_1 = x_2 + x_3, \quad y_2 = x_3 + x_1, \quad y_3 = x_1 + x_2.$

3. *Chứng minh rằng nếu*

$$a^3 + pa + q = b^3 + pb + q = c^3 + pc + q,$$

trong đó a, b, c *là các số thực đôi một khác nhau, thì* $a + b + c = 0$.

4. *Cho* p, q *là các số nguyên. Chứng minh rằng nếu các nghiệm của phương trình*

$$x^3 - px - q = 0$$

là các số nguyên, thì $p^3 - 27q$ *là số chính phương (bằng bình phương của số nguyên).*

5. *(Canada, 1982). Giả sử một trong các nghiệm của đa thức*

$$P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c, \quad a, b, c \in Z$$

bằng tích của hai nghiệm kia. Chứng minh rằng số $2P(-1)$ *chia hết cho số* $P(1) + P(-1) - 2[1 + P(0)]$.

6. *Giả sử phương trình* $x^3 + -px^2 + qx - r = 0$ *có ba nghiệm thực. Chứng minh rằng ba nghiệm này lập thành một cấp số nhân khi và chỉ khi* $q^3 = rp^3$.

7. *Chứng minh rằng, nếu phương trình*

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0, \quad (a \neq 0)$$

có các nghiệm phân biệt x_1, x_2, *thì*

$$x_1x_2 \geq \frac{4ac - b^2}{4a^2}.$$

8. *Biết rằng các nghiệm của phương trình*

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0$$

lập thành một cấp số cộng. Chứng minh rằng

$$2a^3 - 9ab + 27c = 0.$$

9. *Biết rằng phương trình*

$$x^3 + px^2 + qx + r = 0$$

có ba nghiệm dương và các đoạn thẳng mà chiều dài của chúng bằng các nghiệm trên, là ba cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng

$$p^3 - 4pq + 8r > 0.$$

10. *Biết rằng tất cả các nghiệm của phương trình* $x^3 + px + q = 0$, $(q \neq 0)$, *là các số thực. Chứng minh rằng* $p < 0$.

11. *Cho phương trình* $x^3 + ax^2 - b = 0$, *trong đó* a, b *là các số thực, ngoài ra* $b > 0$. *Chứng minh rằng phương trình đã cho có một và chỉ một nghiệm dương.*

12. *Giải phương trình* $x^3 + px^2 + qx + r = 0$ *trong mỗi trường hợp sau* *a)* $x_1^2 = x_1x_2$.

b) $x_1 = x_2 + x_3$.

Giải các phương trình sau

13. $(x+a+b)(x+b+c)(x+c+a)(a+b+c) - abcx = 0$.

14. $x^3 + 3ax^2 + 3(a^2 - bc)x + a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = 0$.

15. *Cho* x_1, x_2, x_3 *là các nghiệm của phương trình*

$$x^3 + px + q = 0.$$

Đặt

$$A = x_1 + x_2\varepsilon + x_3\varepsilon^2, \quad B = x_1 + x_2\varepsilon^2 + x_3\varepsilon,$$

trong đó

$$\varepsilon^2 + \varepsilon + 1 = 0.$$

Chứng minh rằng, A^3 *và* B^3 *là các nghiệm của phương trình*

$$z^2 + 27qz - 27p^3 = 0.$$

2.7 Hệ phương trình đối xứng ba ẩn

Giả sử $P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z)$ *là các đa thức đối xứng. Xét hệ phương trình*

$$\begin{cases} P(x,y,z) &= 0, \\ Q(x,y,z) &= 0, \\ R(x,y,z) &= 0. \end{cases} \tag{2.16}$$

Bằng cách đặt

$$x + y + z = \sigma_1, \quad xy + yz + zx = \sigma_2, \quad xyz = \sigma_3,$$

trên cơ sở các định lí 2.5, 2.6, ta đưa hệ (2.16) về dạng

$$\begin{cases} p(\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3) &= 0, \\ q(\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3) &= 0, \\ r(\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3) &= 0. \end{cases} \tag{2.17}$$

Hệ phương trình (2.17) *thường đơn giản hơn hệ* (2.16) *và ta có thể dễ dàng tìm được nghiệm* $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$. *Sau khi tìm được các giá trị của* $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$, *cần phải tìm các giá trị của các ẩn số* x, y, z. *Điều này dễ dàng thực hiện được nhờ định lí sau đây.*

Định lý 2.12. *Giả sử* $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ *là các số thực nào đó. Khi đó phương trình bậc ba*

$$u^3 - \sigma_1 u^2 + \sigma_2 u - \sigma_3 = 0 \tag{2.18}$$

và hệ phương trình

$$\begin{cases} x + y + z &= \sigma_1, \\ xy + yz + zx &= \sigma_2, \\ xyz &= \sigma_3 \end{cases} \tag{2.19}$$

liên hệ với nhau như sau: nếu u_1, u_2, u_3 *là các nghiệm của phương trình* (2.18), *thì hệ* (2.19) *có các nghiệm*

$$\begin{cases} x_1 = u_1, \\ y_1 = u_2, \\ z_1 = u_3; \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = u_1, \\ y_2 = u_3, \\ z_2 = u_2. \end{cases} \quad \begin{cases} x_3 = u_2, \\ y_3 = u_1, \\ z_3 = u_3; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_4 = u_2, \\ y_4 = u_3, \\ z_4 = u_1; \end{cases} \quad \begin{cases} x_5 = u_3, \\ y_5 = u_1, \\ z_5 = u_2; \end{cases} \quad \begin{cases} x_6 = u_3, \\ y_6 = u_2, \\ z_6 = u_1. \end{cases}$$

và ngoài ra không còn các nghiệm nào khác. Ngược lại, nếu $x = a, y = b, z = c$ *là nghiệm của hệ* (2.19) *thì các số* a, b, c *là nghiệm của phương trình* (2.18).

Chứng minh. *Giả sử* u_1, u_2, u_3 *là các nghiệm của phương trình* (2.18). *Khi đó ta có đồng nhất thức:*

$$u^3 - \sigma_1 u^2 + \sigma_2 u - \sigma_3 = (u - u_1)(u - u_2)(u - u_3).$$

Từ đó ta có các hệ thức Viète:

$$\begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 &= \sigma_1, \\ u_1u_2 + u_1u_3 + u_2u_3 &= \sigma_2, \\ u_1u_2u_3 &= \sigma_3. \end{cases}$$

Suy ra u_1, u_2, u_3 *là nghiệm của hệ* (2.19). *Ngoài ra còn năm nghiệm nữa được nhận được bằng cách hoán vị các giá trị của các ẩn số. Vấn đề hệ* (2.19) *không còn nghiệm nào khác sẽ được làm sáng tỏ dưới đây.*

Giả sử $x = a, y = b, z = c$ *là nghiệm của hệ* (2.19), *nghĩa là*

$$\begin{cases} a+b+c & = \sigma_1, \\ ab+bc+ca & = \sigma_2, \\ abc & = \sigma_3. \end{cases}$$

Khi đó ta có

$$u^3 - \sigma_1 u^2 + \sigma_2 u - \sigma_3 = u^3 - (a+b+c)u^2 + (ab+bc+ca)u - abc =$$

$$= (u-a)(u-b)(u-c).$$

Điều đó chứng tỏ rằng các số a, b, c *là nghiệm của phương trình bậc ba* (2.18). *Định lí được chứng minh.*

Định lý 2.13. *Giả sử* $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ *là các số thực đã cho. Để các số* x, y, z *xác định bởi hệ phương trình* (2.19) *là các số thực, điều kiện cần và đủ là*

$$\Delta = -4\sigma_1^3\sigma_3 + \sigma_1^2\sigma_2^2 + 18\sigma_1\sigma_2\sigma_3 - 4\sigma_2^3 - 27\sigma_3 \geq 0. \tag{2.20}$$

Ngoài ra, để các số x, y, z *là không âm thì*

$$\sigma_1 \geq 0, \quad \sigma_2 \geq 0, \quad \sigma_3 \geq 0.$$

Chứng minh. *Giả sử* x, y, z *là nghiệm của hệ* (2.19). *Khi đó theo Định lí 2.12,* x, y, z *là các nghiệm của phương trình* (2.18). *Theo Định lí 2.11, phương trình* (2.18) *có nghiệm thực khi và chỉ khi biệt thức của nó không âm, nghĩa là* (2.20) *được thoả mãn. Ngoài ra, nếu các số* x, y, z *là không âm, thì hiển nhiên* $\sigma_i \geq 0 \quad (i = 1, 2, 3)$. *Ngược lại, nếu* $\sigma_i \geq 0 \quad (i = 1, 2, 3)$ *và* (2.20) *được thoả mãn, thì phương trình* (2.18) *không thể có nghiệm âm. Thật vậy, trong* (2.18) *thay* $u = -v$ *ta có phương trình*

$$v^3 + \sigma_1 v^2 + \sigma_2 v + \sigma_2 = 0. \tag{2.21}$$

Vì $\sigma_i \geq 0$ $(i = 1, 2, 3)$, *nên phương trình* (2.21) *không thể có nghiệm dương, do đó phương trình* (2.18) *không thể có nghiệm âm. Từ đó suy ra* x, y, z *là các số không âm. Định lí được chứng minh.*

Ví dụ 2.8. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x+y+z &= 2, \\ x^2+y^2+z^2 &= 6, \\ x^3+y^3+z^3 &= 8. \end{cases}$$

Lời giải. *Đặt* $\sigma_1 = x+y+x$, $\sigma_2 = xy+xz+yz$, $\sigma_3 = xyz$. *Sử dụng công thức Waring ta có*

$$x^2+y^2+z^2 = \sigma_1^2 - 2\sigma_2, \quad x^3+y^3+z^3 = \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 + 3\sigma_3.$$

Do đó hệ phương trình ban đầu trở thành

$$\begin{cases} \sigma_1 &= 2, \\ \sigma_1^2 - 2\sigma_2 &= 6, \\ \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 + 3\sigma_3. &= 8. \end{cases}$$

Giải hệ này ta tìm được $\sigma_1 = 2, \sigma_2 = -1, \sigma_3 = -2$. *Theo Định lí 2.12, ta có* x, y, z *là các nghiệm của phương trình*

$$u^3 - 2u^2 - u + 2 = 0 \Leftrightarrow (u^2-1)(u-2) = 0.$$

Nghiệm của phương trình này là $u_1 = -1, u_2 = 1, u_3 = 2$. *Từ đó suy ra nghiệm của hệ đã cho là những bộ* (x, y, z) :

$$(-1,1,2),\ (-1,2,1),\ (1,-1,2),\ (1,2,1),\ (2,-1,1),\ (2,1,-1).$$

Ví dụ 2.9. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x+y+z &= 6, \\ xy+yz+zx &= 11, \\ (x-y)(y-z)(z-x) &= -2. \end{cases}$$

Lời giải. *Đặt*

$$\sigma_1 = x+y+z, \quad \sigma_2 = xy+xz+yz, \quad \sigma_3 = xyz.$$

Nhận xét rằng

$$(x-y)(y-z)(z-x) \leqslant 0, \quad \forall x, y, z \in \mathbb{R}.$$

Do đó

$$(x-y)(y-z)(z-x) = -2 \Leftrightarrow (x-y)^2(y-z)^2(z-x)^2 = 4.$$

Theo công thức (2.10), ta có

$$(x-y)^2(y-z)^2(z-x)^2 = -4\sigma_1^3\sigma_3 + \sigma_1^2\sigma_2^2 + 18\sigma_1\sigma_2\sigma_3 - 4\sigma_2^3 - 27\sigma_3^2.$$

Hệ phương trình đã cho trở thành

$$\begin{cases} \sigma_1 & = & 6, \\ \sigma_2 & = & 11, \\ -4\sigma_1^3\sigma_3 + \sigma_1^2\sigma_2^2 + 18\sigma_1\sigma_2\sigma_3 - 4\sigma_2^3 - 27\sigma_3^2 & = & 4. \end{cases}$$

Từ đó suy ra

$$\sigma_3^2 - 12\sigma_3 + 36 = 0.$$

Phương trình này có nghiệm duy nhất $\sigma_3 = 6$. *Vậy ta có* $\sigma_1 = 6, \sigma_2 = 11, \sigma_3 = 6$.

Theo Định lí 2.12, ta có x, y, z *là các nghiệm của phương trình*

$$u^3 - 6u^2 + 11u - 6 = 0 \Leftrightarrow (u-1)(u-2)(u-3) = 0.$$

Nghiệm của phương trình này là $u_1 = 1, u_2 = 2, u_3 = 3$.

Vậy nghiệm của hệ đã cho là những bộ (x, y, z) :

$$(1,2,3),\ (1,3,2),\ (2,3,1),\ (2,1,3),\ (3,2,1),\ (3,1,2).$$

Ví dụ 2.10. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x+y+z & = & 2, \\ (x+y)(y+z)+(y+z)(z+x)+(z+x)(x+y) & = & 1, \\ x^2(y+z)+y^2(z+x)+z^2(x+y) & = & -6. \end{cases}$$

Lời giải. *Đặt*

$$\sigma_1 = x+y+z, \quad \sigma_2 = xy+xz+yz, \quad \sigma_3 = xyz.$$

Sử dụng công thức Waring và biến đổi vế trái của các phương trình thứ hai và thứ ba của hệ như sau:

$$(x+y)(y+z)+(y+z)(z+x)+(z+x)(x+y)=(\sigma_1-z)(\sigma_1-x)+(\sigma_1-x)(\sigma_1-y)$$
$$+(\sigma_1-y)(\sigma_1-z)=3\sigma_1^2-2\sigma_1(x+y+z)+(xy+yz+zx)=\sigma_1^2+\sigma_2.$$
$$x^2(y+z)+y^2(z+x)+z^2(x+y)=x^2(\sigma_1-x)+y^2(\sigma_1-y)+z^2(\sigma_1-z)=$$
$$\sigma_1(x^2+y^2+z^2)-3(x^3+y^3+z^3)=\sigma_1(\sigma_1-2\sigma_2)-(\sigma_1^3-3\sigma_1\sigma_2+3\sigma_3)=$$
$$=\sigma_1\sigma_2-3\sigma_3.$$

Vậy hệ đã cho trở thành

$$\begin{cases} \sigma_1 & = & 2, \\ \sigma_1^2+\sigma_2 & = & 1, \\ \sigma_1\sigma_2-3\sigma_3 & = & -6. \end{cases}$$

Giải hệ này ta được $\sigma_1=2, \sigma_2=-3, \sigma_3=0$. Theo Định lí 2.12, ta có x, y, z là các nghiệm của phương trình

$$u^3-2u^2-3u=0.$$

Nghiệm của phương trình này là $u_1=0, u_2=-1, u_3=3$. Do đó nghiệm của hệ đã cho là các bộ (x, y, z):

$$(0,-1,3),(0,3,-1),(-1,0,3),(-1,3,0),(3,0,-1),(3,-1,0).$$

Ví dụ 2.11. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x+2y-3z & = & 9, \\ 2xy-6yz-3xz & = & 27, \\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{2y}-\dfrac{1}{3z} & = & 1. \end{cases}$$

Lời giải. *Hệ đã cho không phải là hệ đối xứng theo x, y, z. Tuy nhiên, nếu đặt $u=x, v=2y, w=-3z$, thì hệ đối xứng tương đương với hệ trên:*

$$\begin{cases} u+v+w & = & 9, \\ uv+vw+wu & = & 27, \\ \dfrac{1}{u}+\dfrac{1}{v}+\dfrac{1}{w} & = & 1. \end{cases}$$

Đặt

$$\sigma_1 = u + v + w, \quad \sigma_2 = uv + vw + wu, \quad \sigma_3 = uvw.$$

Khi đó hệ trên trở thành

$$\begin{cases} \sigma_1 & = & 9, \\ \sigma_2 & = & 27, \\ \dfrac{\sigma_2}{\sigma_3}. & = & 1. \end{cases}$$

Suy ra $\sigma_1 = 9, \sigma_2 = 27, \sigma_3 = 27$. *Theo Định lí 2.12, các số* u, v, w *là các nghiệm của phương trình*

$$t^3 - 9t^2 + 27t - 27 = 0.$$

Ta có

$$t^3 - 9t^2 + 27t - 27 = 0 \Leftrightarrow (t-3)^3 = 0.$$

Vậy ta có $t_1 = t_2 = t_3 = 3$, *nên* $u = v = w = 3$. *Từ đó ta tìm được nghiệm của hệ đã cho là những bộ số* (x, y, z):

$$(3, \frac{3}{2}, -1),\ (3, -1, \frac{3}{2}),\ (\frac{3}{2}, 3, -1),\ (\frac{3}{2}, -1, 3),\ (3, \frac{3}{2}, -1),\ (3, -1, \frac{3}{2}).$$

Ví dụ 2.12. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x + y + z & = & a, \\ xy + yz + zx & = & ab, \\ x^3 + y^3 + z^3 & = & a^2 b, \end{cases}$$

trong đó a, b là các số thực cho trước.

Lời giải. *Đặt*

$$\sigma_1 = x + y + z,\ \sigma_2 = xy + yz + zx,\ \sigma_3 = xyz.$$

Khi đó hệ đã cho có dạng

$$\begin{cases} \sigma_1 = a, \\ \sigma_2 = ab, \\ \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 + 3\sigma_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sigma_1 = a, \\ \sigma_2 = ab, \\ a^3 - 3a^2 b + 3\sigma_3 = a^3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sigma_1 = a, \\ \sigma_2 = ab, \\ \sigma_3 = a^2 b. \end{cases}$$

Suy ra, theo Định lí 2.12, x, y, z là các nghiệm của phương trình

$$t^3 - at^2 + abt - a^2bt = 0 \Leftrightarrow (t-a)(t^2+ab) = 0. \tag{2.22}$$

Từ (2.22), suy ra,

a) Nếu $ab > 0$, thì phương trình (2.22) chỉ có một nghiệm thực $t = a$, do đó hệ đã cho không có nghiệm thực. Trong phạm vi số phức, thì phương trình (2.22) có các nghiệm $t_1 = a, t_2 = i\sqrt{ab}, t_3 = -i\sqrt{ab}$, trong đó i là đơn vị ảo. Khi đó, hệ đã cho có nghiệm (x, y, z) là bộ số $(a, i\sqrt{ab}, -i\sqrt{ab})$ và tất cả các hoán vị của nó.

b) Nếu $ab \leqslant 0$, thì phương trình (2.22) có ba nghiệm thực $t_1 = a$, $t_2 = \sqrt{-ab}$, $t_3 = -\sqrt{-ab}$. Khi đó nghiệm của hệ phương trình đã cho có nghiệm (x, y, z)là bộ số $(a, \sqrt{-ab}, -\sqrt{-ab})$ và tất cả các hoán vị của nó.

Bài tập

1. $\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 1, \\ y^2 + yz + z^2 = 7, \\ z^2 + zx + x^2 = 4. \end{cases}$

2. $\begin{cases} x + y + z = 2, \\ x^2 + y^2 + z^2 = 6, \\ x^3 + y^3 + z^3 = 8. \end{cases}$

3. $\begin{cases} x + y + z = 9, \\ \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} = 1, \\ xy + yz + zx = 27. \end{cases}$

4. $\begin{cases} x + y + z = \dfrac{13}{3}, \\ \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} = \dfrac{13}{3}, \\ xyz = 1. \end{cases}$

5. $\begin{cases} x + y + z = xy + yz + zx, \\ xyz = 1, \\ x^3 + y^3 + z^3 = \dfrac{73}{8}. \end{cases}$

6. $\begin{cases} x + y + z = 0, \\ x^2 + y^2 + z^2 = x^3 + y^3 + z^3, \\ xyz = 2. \end{cases}$

Với a, b, c là các số thực cho trước, giải các hệ phương trình sau đây

7. $\begin{cases} x + y + z = a, \\ x^2 + y^2 + z^2 = a^2, \\ x^3 + y^3 + z^3 = a^3. \end{cases}$

8. $\begin{cases} x + y + z = a, \\ xy + yz + zx = a^2, \\ xyz = a^3. \end{cases}$

9. $\begin{cases} x + y + z = a, \\ x^2 + y^2 + z^2 = b^2, \\ \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{c}. \end{cases}$

10. $\begin{cases} x + y + z = a, \\ x^2 + y^2 + z^2 = 3a^2, \\ xyz = a^3. \end{cases}$

2.8 Phân tích đa thức thành nhân tử

Trong mục này trình bày các ứng dụng của đa thức đối xứng và phản đối xứng ba biến vào các bài toán về phân tích thành nhân tử.

Giả sử $f(x, y, z)$ *là đa thức đối xứng ba biến. Để phân tích* $f(x, y, z)$ *thành nhân tử, trước hết cần phải biểu diễn nó qua các đa thức đối xứng cơ sở* $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$, *để được đa thức* $\varphi(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$, *sau đó cố gắng phân tích đa thức cuối cùng thành nhân tử. Các phương pháp cơ bản của phân tích đa thức thành nhân tử đã được trình bày trong chương 1 cho trường hợp đa thức đối xứng hai biến. Như đa thấy trong trường hợp hai biến, khi phân tích một đa thức đối xứng thành nhân tử có thể gặp các nhân tử là đa thức đối xứng và không đối xứng. Nếu trong các nhân tử của* $f(x, y, z)$ *có đa thức không đối xứng* $h(x, y, z)$, *thì do* $f(x, y, z)$ *là đối xứng sẽ phải có các nhân tử nhận được từ* $h(x, y, z)$ *bằng cách hoán vị các biến* $x, y, z.$, *nghĩa là có các nhân tử dạng:*

$$h(x, y, z)h(x, z, x)h(y, x, z)h(y, z, x)h(z, x, y)h(z, y, x).$$

Nếu trong các nhân tử có nhân tử $g(x, y, z)$ *là đa thức đối xứng chỉ với hai biến, thí dụ đối với* x, y, *nghĩa là*

$$g(x, y, z) = g(y, x, z),$$

thì các nhân tử cùng dạng sẽ là

$$g(x, y, z)g(y, z, x)g(z, x, y).$$

Nếu như trong các nhân tử có nhân tử $k(x, y, z)$ *đối xứng chẵn, nghĩa là*

$$k(x, y, z) = k(y, z, x) = k(z, x, y),$$

thì các nhân tử cùng dạng sẽ là

$$k(x, y, z)k(y, z, x).$$

Như vậy, trong phân tích thành nhân tử của đa thức đối xứng $f(x, y, z)$ có thể gặp các nhân tử dạng sau đây:

1) Nhân tử là đa thức đối xứng $p(x, y, z)$.

2) Nhân tử có dạng $k(x, y, z)k(y, z, x)$, trong đó $k(x, y, z)$ là đối xứng chẵn.

3) Nhân tử có dạng $g(x, y, z)g(y, z, x)g(z, x, y)$, trong đó $g(x, y, z)$ đối xứng theo hai biến, thí dụ x, y.

4) Nhân tử dạng $h(x, y, z)h(x, z, x)h(y, x, z)h(y, z, x)h(z, x, y)h(z, y, x)$, trong đó $h(x, y, z)$ không có tính đối xứng.

Đối với đa thức phản đối xứng $f(x, y, z)$, theo Định lí 2.9, ta có phân tích

$$f(x, y, z) = T(x, y, z)g(x, y, z),$$

trong đó $T(x, y, z)$ là đa thức phản đối xứng đơn giản nhất, còn $g(x, y, z)$ là đa thức đối xứng. Ngoài ra, đối với đa thức phản đối xứng thuần nhất có kết quả sau đây.

Mệnh đề 2.2. *kí hiệu $\theta_m(x, y, z)$ là đa thức phản đối xứng bậc m. Khi đó*

$\theta_3(x, y, z) = aT(x, y, z),$

$\theta_4(x, y, z) = aT(x, y, z)\sigma_1,$

$\theta_5(x, y, z) = T(x, y, z)(a\sigma_1^2 + b\sigma_2),$

$\theta_6(x, y, z) = T(x, y, z)(a\sigma_1^3 + b\sigma_1\sigma_2 + c\sigma_3)$, *trong đó a, b, c là các hằng số.*

Xét một số ví dụ sau đây.

Ví dụ 2.13. Phân tích đa thức sau thành nhân tử

$$f(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz.$$

Lời giải. *Ta có*

$$f(x, y, z) = (\sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 + 3\sigma_3) - 3\sigma_3 = \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 = \sigma_1(\sigma_1^2 - 3\sigma_2) =$$

$$= (x + y + z)[(x + y + z)^2 - 3(xy + yz + zx)] =$$

$$= (x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx).$$

Ví dụ 2.14. Phân tích thành nhân tử:

$$f(x,y,z) = 2x^2y^2+2x^2z^2+2y^2z^2-x^4-y^4-z^4.$$

Lời giải. *Ta có :*

$$f(x,y,z) = 2x^2y^2+2x^2z^2+2y^2z^2-x^4-y^4-z^4 =$$

$$2O(x^2y^2)-s_4 = 2(\sigma_2^2-2\sigma_1\sigma_3)-(\sigma_1^4-4\sigma_1^2\sigma_2+2\sigma_2^2+4\sigma_1\sigma_3) =$$

$$= -\sigma_1^4+4\sigma_1^2\sigma_2-8\sigma_1\sigma_3 = \sigma_1(4\sigma_1\sigma_2-\sigma_1^3-8\sigma_3).$$

Như vậy, đa thức đã cho chia hết cho $\sigma_1 = x+y+z$. Nhưng vì đa thức đã cho là hàm chẵn đối với x, y và z, nên nó cũng chia hết cho $-x+y+z$, $x-y+z$, $x+y-z$. Cũng vì đa thức đã cho có bậc bằng bốn, nên ta có:

$$f(x,y,z) = C(x+y+z)(-x+y+z)(x-y+z)(x+y-z),$$

trong đó C là hằng số nào đó. Để xác định C ta cho $x = y = z = 1$ và tìm được $C = 1$. Vậy ta có kết quả:

$$2x^2y^2+2x^2z^2+2y^2z^2-x^4-y^4-z^4 = (x+y+z)(-x+y+z)(x-y+z)(x+y-z).$$

Ví dụ 2.15. Phân tích đa thức sau thành nhân tử:

$$a(b+c-a)^2+b(c+a-b)^2+c(a+b-c)^2+(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c).$$

Lời giải. *Ta biến đổi đa thức đã cho như sau:*

$$a(\sigma_1-2a)^2+b(\sigma_1-2b)^2+c(\sigma_1-2c)^2+(\sigma_1-2a)(\sigma_1-2b)(\sigma_1-2c) =$$

$$= (a+b+c)\sigma_1^2-4\sigma_1(a^2+b^2+c^2)+4(a^3+b^3+c^3)+\sigma_1^3-2\sigma_1^2(a+b+c)+$$

$$+4\sigma_1(ab+bc+ca)-8abc = \sigma_1^3-4\sigma_1(\sigma_1^2-2\sigma_2)+$$

$$+4(\sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 + 3\sigma_3) + \sigma_1^3 - 2\sigma_1^3 + 4\sigma_1\sigma_2 - 8\sigma_3 = 4\sigma_3 = 4abc.$$

Vậy ta có kết quả

$$a(b+c-a)^2 + b(c+a-b)^2 + c(a+b-c)^2 + (b+c-a)(c+a-b)(a+b-c) = 4abc.$$

Ví dụ 2.16. Phân tích các đa thức sau thành nhân tử

a) $f(x,y,z) = (x+y+z)^3 - x^3 - y^3 - z^3$.

b) $g(x,y,z) = (x+y+z)^5 - x^5 - y^5 - z^5$.

Lời giải.

a) Đặt $\sigma_1 = x+y+x, \sigma_2 = xy+yz+xz, \sigma_3 = xyz, s_3 = x^3+y^3+z^3$. *Sử dụng công thức Waring ta có*

$$f = \sigma_1^3 - s_3 = \sigma_1^3 - (\sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 + 3\sigma_3) = 3(\sigma_1\sigma_2 - \sigma_3) =$$

$$= 3[(x+y+z)(xy+yz+zx) - xyz] =$$

$$= 3[(x+y)(xy+yz+zx) + xyz + z(yz+zx) - xyz] =$$

$$= 3[(x+y)(xy+yz+zx) + z^2(x+y)] = (x+y)(xy+yz+zx+z^2) =$$

$$= 3(x+y)[(xy+yz) + (zx+z^2)] = 3(x+y)(x+z)(y+z).$$

b) Tương tự, ta có

$$g(x,y,z) = \sigma_1^5 - s_5 = \sigma_1^5 - (\sigma_1^5 - 5\sigma_1^3\sigma_2 + 5\sigma_1\sigma_2^2 + 5\sigma_1^2\sigma_3 - 5\sigma_2\sigma_3) =$$

$$= (5\sigma_1^3\sigma_2 - 5\sigma_1\sigma_2^2) - (5\sigma_1^2\sigma_3 - 5\sigma_2\sigma_3) = 5(\sigma_1^2 - \sigma_2)(\sigma_1\sigma_2 - \sigma_3) =$$

$$= 5(x^2+y^2+z^2+xy+yz+zx)[(x+y+z)(xy+yz+zx) - xyz] =$$

$$= 5(x+y)(y+z)(z+x)(x^2+y^2+z^2+xy+yz+zx).$$

Chúng ta thấy việc biểu diễn một đa thức đối xứng theo các đa thức đối xứng cơ sở $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ *rất thuận tiện trong bài toán phân tích thành nhân tử, nhưng để có phân tích* *triệt để đôi khi cần thiết phải có những biến đổi thích hợp tiếp theo. Việc phân tích một đa thức đối xứng thành nhân tử đôi khi rất dễ dàng, nếu vận dụng Định lí Bezout. Để minh hoạ, xét phần b) trong Ví dụ 2.16, nếu tạm coi* y, z *như tham số thì* g *là đa thức bậc 5 theo* x. *Nếu cho* $x = -y$, *thì* $g = 0$, *chứng tỏ* g *chia hết cho* $x + y$. *Vì vai trò của* x, y, z *như nhau, nên đa thức chia hết cho* $(x+y)(y+z)(z+x)$. *Do đó đa thức thương là đa thức đối xứng bậc 2 nên có dạng* $a(x^2+y^2+z^2)+b(xy+yz+xz)$, *trong đó* a, b *là các số nào đó. Để xác định a và b ta có thể làm như sau. Cho* $x = 1, y = 1, z = 0$ *và cho* $x = 1, y = 1, z = 1$ *ta có các đẳng thức* $2a + b = 15$, $a + b = 10$. *Suy ra* $a = 5, b = 5$. *Vậy ta có*

$$g(x, y, z) = 5(x+y)(y+z)(z+x)(x^2+y^2+z^2+xy+yz+zx).$$

Ví dụ 2.17. Phân tích đa thức sau thành nhân tử

$$f(x, y, z) = 2(x^3+y^3+z^3) + 7(x^2y+xy^2+x^2z+xz^2+y^2z+yz^2) + 16xyz.$$

Lời giải. *Trước hết ta biểu diễn* f *qua các đa thức đối xứng cơ sở. Sử dụng công thức quỹ đạo :*

$$O(x^2y) = O(x^2)O(y) - O(x^3) = s_2\sigma_1 - s_3$$

và công thức Waring, ta có

$$f(x, y, z) = 2s_3 + 7(s_2\sigma_1 - s_3) + 16\sigma_3 = 2\sigma_1^3 + \sigma_1\sigma_2 + \sigma_3.$$

Đa thức ở vế phải không thể phân tích được thành nhân tử. Điều đó chứng tỏ f *không có nhân tử đối xứng theo* x, y, z. *Vì* f *là đa thức đối xứng bậc 3, nên nó có thể phân tích thành tích của 3 nhân tử bậc nhất. Như vậy, mỗi nhân tử là đối xứng theo hai biến. Do đó ta tìm nhân tử ở dạng*

$$f(x, y, z) = (ax+ay+bz)(ax+by+az)(bx+ay+az).$$

Chúng ta cần phải tìm các hệ số a, b. *Nếu trong đẳng thức trên cho* $x = 1$, $y = 1, z = 1$, *ta được* $64 = (2a+b)^3$, *suy ra* $2a + b = 4$. *Tiếp theo, nếu cho*

$x = y = 1, z = -1$, *thì*

$$(2a - b)b^2 = 0.$$

Nếu $b = 0$ *thì* $a = 2$ *và ta có*

$$f(x, y, z) = 8(x + y)(y + z)(z + x).$$

Dễ thấy rằng đẳng thức này không đúng vì

$$8(x + y)(y + z)(z + x) = 8.O(x^2y) + 16xyz,$$

trong khi đó

$$f(x, y, z) = 2.O(x^3) + 7.O(x^2y) + 16xyz \neq 8.O(x^2y) + 16xyz.$$

Vậy $b \neq 0$, *nên* $2a - b = 0$. *Từ các đẳng thức* $2a + b = 4$, $2a - b = 0$, *suy ra* $a = 1$, $b = 2$. *Do đó ta có kết quả*

$$f(x, y, z) = (x + y + 2z)(x + 2y + z)(2x + y + z).$$

Các ví dụ trên đây liên quan đến các đa thức đối xứng. Dưới đây sẽ trình bày một số ứng dụng của đa thức phản đối xứng trong phân tích các đa thức thành nhân tử.

Ví dụ 2.18. Phân tích đa thức sau thành nhân tử

$$f(x, y, z) = (x - y)^3 + (y - z)^3 + (z - x)^3.$$

Lời giải. *Rõ ràng* $f(x, y, z)$ *là đa thức phản đối xứng bậc ba. Theo Mệnh đề 2.2, ta có* $f(x, y, z) = aT(x, y, z)$. *Để tìm* a , *cho* $x = 0, y = 1, z = 2$, *tìm được* $a = 3$. *Vậy ta có kết quả:*

$$(x - y)^3 + (y - z)^3 + (z - x)^3 = 3(x - y)(y - z)(z - x).$$

Ví dụ 2.19. Phân tích đa thức sau thành nhân tử

$$f(x,y,z) = yz(y^2 - z^2) + xz(z^2 - x^2) + xy(x^2 - y^2).$$

Lời giải. *Vì $f(x,y,z)$ là đa thức phản đối xứng và đẳng cấp bậc bốn, nên theo Mệnh đề 2.2 ta có :$f(x,y,z) = aT(x,y,z)\sigma_1$. Để tìm a, ta cho $x = 0, y = 1, z = 2$, và tìm được$a = -1$. Vậy ta có kết quả:*

$$yz(y^2 - z^2) + xz(z^2 - x^2) + xy(x^2 - y^2) = -(x+y+z)(x-y)(y-z)(z-x).$$

Ví dụ 2.20. Phân tích thành nhân tử:

$$f(x,y,z) = x^3(y^2 - z^2) + y^3(z^2 - x^2) + z^3(x^2 - y^2).$$

Lời giải. *Rõ ràng $f(x,y,z)$ là đa thức phản đối xứng thuần nhất bậc năm, nên theo Mệnh đề 2.2, ta có: $f(x,y,z) = T(x,y,z)(a\sigma_1^2 + b\sigma_2)$. Để tìm các hằng số a và b, cho $x = -1, y = 0, z = 1$. Dễ dàng tìm được : $a = 0, b = -1$. Vậy ta có kết quả:*

$$x^3(y^2 - z^2) + y^3(z^2 - x^2) + z^3(x^2 - y^2) = -(x-y)(y-z)(z-x)(xy+yz+zx).$$

Bài tập

Phân tích các đa thức(đối xứng) sau đây thành nhân tử:

1. $(x+y)(y+z)(z+x) + xyz.$

2. $2(a^3 + b^3 + c^3) + a^2b + a^2c + b^2a + b^2c + c^2a + c^b - 3abc.$

3. $a^3(b+c) + b^3(c+a) + c^3(a+b) + abc(a+b+c).$

4. $(a+b+c)^3 - (b+c-a)^3 - (c+a-b)^3 - (a+b-c)^3.$

5. $x^4 + y^4 + z^4 + (x+y+z)^4 - (y+z)^4 - (z+x)^4 - (x+y)^4.$

6. $(a+b+c)^5 - (-a+b+c)^5 - (a-b+c)^5 - (a+b-c)^5.$

7. $(a^2 + b^2 + c^2 + ab + ac + bc)^2 - (a+b+c)^2(a^2 + b^2 + c^2).$

Phân tích các đa thức (phản đối xứng) sau thành nhân tử

8. $x(y^2 - z^2) + y(z^2 - x^2) + z(x^2 - y^2).$

9. $ab(a-b)+bc(b-c)+ca(c-a)$.

10. $a^2(a+b)(a+c)(b-c)+b^2(b+c)(b+a)(c-a)+c^2(c+a)(c+b)(a-b)$.

11. $(x-y)^5+(y-z)^5+(z-x)^5$.

12. $x^4(y^2-z^2)+y^4(z^2-x^2)+z^4(x^2-y^2)$

13. $(b-c)(b+c)^4+(c-a)(c+a)^4+(a-b)(a+b)^4$.

14. $a^4(b-c)+b^4(c-a)+c^4(a-b)$.

15. $a^2(b-c)(c+a-b)(a+b-c)+b^2(c-a)(a+b-c)(b+c-a)+$
$+c^2(a-b)(b+c-a)(c+a-b)$.

2.9 Tính chia hết của các đa thức đối xứng

Trong mục này trình bày một số bài toán về tính chia hết của các đa thức đối xứng và phản đối xứng. Để giải các bài toán về tính chia hết giữa các đa thức ta thường sử dụng Định lí Bezout và các kỹ năng phân tích thành nhân tử. Sau đây là một số ví dụ.

Ví dụ 2.21. Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n, đa thức

$$f(x,y,z)=(x+y+z)^{2n+1}-x^{2n+1}-y^{2n+1}-z^{2n+1}$$

chia hết cho đa thức

$$g(x,y,z)=(x+y+z)^3-x^3-y^3-z^3.$$

Lời giải. *Trước hết ta phân tích $g(x,y,z)$ thành nhân tử. Vì khi $x=-y$, $x=-z, y=-z$ thì $g=0$, nên theo định lí Bezout đa thức $g(x,y,z)$ chia hết cho $(x+y)(x+z)(y+z)$. Mặt khác, vì bậc của g bằng 3, nên nó có dạng*

$$g(x,y,z)=a(x+y)(x+z)(y+z)$$

Cho $x=y=z=1$ ta tìm được $a=3$. Vậy ta có

$$g(x,y,z)=(x+y+z)^3-x^3-y^3-z^3=3(x+y)(x+z)(y+z).$$

Bằng cách tương tự ta thấy $f(x,y,z)$ chia hết cho $(x+y)(x+z)(y+z)$ với mọi n nguyên dương, tức là $f(x,y,z)$ chia hết cho $g(x,y,z)$.

Ví dụ 2.22. Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương $n \geq 2$, đa thức

$$f(x,y,z) = (x+y+z)^{2n} + x^{2n} + y^{2n} + z^{2n} - (x+y)^{2n} - (y+z)^{2n} - (z+x)^{2n}$$

chia hết cho đa thức

$$g(x,y,z) = (x+y+z)^4 + x^4 + y^4 + z^4 - (x+y)^4 - (y+z)^4 - (z+x)^4.$$

Lời giải. *Đặt*

$$\sigma_1 = x+y+z, \quad \sigma_2 = xy+yz+zx, \quad \sigma_3 = xyz, \quad s_k = x^k + y^k + z^k.$$

Sử dụng khái niệm quỹ đạo và công thức Waring ta có

$$g(x,y,z) = \sigma_1^4 + s_4 - [2s_4 = 4.O(x^3y) + 6.O(x^2y^2)] =$$

$$= \sigma_1^4 - s_4 - 4.O(x^3y) - 6.O(x^2y^2) = \sigma^4 - (\sigma_1^4 - 4\sigma_1^2\sigma_2 + 2\sigma_2^2 + 4\sigma_1\sigma_3) -$$

$$-4(\sigma_1\sigma_2^2 - \sigma_1\sigma_3 - 2\sigma_2^2) - 6(\sigma_2^2 - 2\sigma_1\sigma_3) = 12\sigma_1\sigma_3 = 12(x+y+z)xyz.$$

Tiếp theochúng ta biến đổi $f(x,y,z)$ như sau

$$f(x,y,z) = (x+y+z)^4 + [x^{2n} - (y+z)^{2n}] + [y^{2n} - (x+z)^{2n}] + [z^{2n} - (x+y)^{2n}].$$

Ta có $x^{2n} - (y+z)^{2n}$ chia hết cho $x^2 - (y+z)^2 = (x+y+z)(x-y-z)$, do đó $x^{2n} - (y+z)^{2n}$ chia hết cho $x+y+z$. Tương tự, $y^{2n} - (x+z)^{2n}$ và $z^{2n} - (x+y)^{2n}$ chia hết cho $x+y+z$.

Mặt khác

$$f(0,y,z) = f(x,0,z) = f(x,y,0) = 0.$$

Do đó theo Định lí Bezout, $f(x,y,z)$ chia hết cho xyz. Vậy $f(x,y,z)$ chia hết cho $(x+y+z)xyz$, suy ra $f(x,y,z)$ chia hết cho $g(x,y,z)$.

Ví dụ 2.23. Chứng minh rằng, nếu đa thức đối xứng $f(x, y, z)$ chia hết cho $x - y$, thì nó chia hết cho $(x-y)^2(x-z)^2(y-z)^2$.

Lời giải. *Giả sử rằng*

$$f(x, y, z) = (x - y)g(x, y, z).$$

Vì

$$f(x, y, z) = f(y, x, z) = (y - x)g(y, x, z) = -(x - y)g(y, x, z),$$

nên

$$g(y, x, z) = -g(x, y, z),$$

suy ra $g(x, y, z)$ *là đa thức phản đối xứng theo hai biến* x, y. *Vậy* $g(x, y, z)$ *chia hết cho* $x - y$. *Do đó* $f(x, y, z)$ *chia hết cho* $(x - y)^2$. *Vì* $f(x, y, z)$ *là đa thức đối xứng, nên vai trò của* x, y, z *là như nhau, cho nên* $f(x, y, z)$ *cũng chia hết cho* $(x - z)^2$ *và* $(y - z)^2$. *Vậy* $f(x, y, z)$ *chia hết cho* $(x - y)^2(x - z)^2(y - z)^2$.

Ví dụ 2.24. Tìm điều kiện cần và đủ, để đa thức $x^3 + y^3 + z^3 + kxyz$ chia hết cho $x + y + z$.

Lời giải. *Xét đa thức theo biến* x

$$f(x) = x^3 + (kyz)x + (y^3 + z^3).$$

Theo Định lí Bezout, $f(x)$ *chia hết cho* $x + y + z = x - (-y - z)$ *khi và chỉ khi* $f(-y - z) = 0$. *Ta có*

$$f(-y - z) = -(y + z)^3 - kyz(y + z) + (y^3 + z^3) = (k + 3)yz(y + z) = 0, \ \forall y, z.$$

Từ đó suy ra $k = -3$.

Vậy, điều kiện cần và đủ để $x^3 + y^3 + z^3 + kxyz$ *chia hết cho* $x + y + z$ *là* $k = -3$.

Ví dụ 2.25. Cho a, b, c là các số nguyên. Chứng minh rằng, nếu $x + y + z$ chia hết cho 6, thì $a^3 + b^3 + c^3$ cũng chia hết cho 6.

Lời giải. *Theo kết quả của Ví dụ 2.13, ta có*

$$x^3 + y^3 + z^3 = (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx) + 3xyz.$$

Theo giả thiết $x + y + z$ chia hết cho 6, nên trong ba số x, y, z phải có ít nhất một số chia hết cho 2. Từ đó suy ra $3xyz$ chia hết cho 6. Vậy, theo đẳng thức trên, thì $x^3 + y^3 + x^3$ chia hết cho 6.

Bài tập

1. *Chứng minh rằng, nếu đa thức đối xứng $f(x, y)$ chia hết cho $x^2 - y^2$, thì nó chia hết cho $x^3 + y^3 - (x + y)xy$.*

2. *Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên p, q thì đa thức*

$$x^p y^q + y^p z^q + z^p x^q - x^q y^p - y^q z^p - z^q x^p$$

chia hết cho $(x - y)(x - z)(y - z)$.

3. *Chứng minh rằng, với mọi các số tự nhiên k, m, n, thì đa thức*

$$x^k y^m z^n + y^k z^m x^n + z^k x^m y^n - x^n y^m z^k - y^n z^m x^k - z^k x^m y^k$$

chia hết cho $(x - y)(x - z)(y - z)$.

4. *Cho đa thức*

$$f(x, y, z) = x^m y^n + y^m z^n + z^m x^n - x^n y^m - y^n z^m - z^n x^m.$$

Chứng minh rằng, nếu $f(x, y, z)$ chia hết cho $(x + y)(x + z)(y + x)$, thì nó chia hết cho $(x^2 - y^2)(x^2 - z^2)(y^2 - z^2)$.

5. *Chứng minh rằng, đa thức*

$$a^4(b^2 + c^2 - a^2)^3 + b^4(c^2 + a^2 - b^2)^3 + c^4(a^2 + b^2 - c^2)^3$$

chia hết cho $a^4 + b^4 + c^4 - 2a^2b^2 - 2a^2c^2 - 2b^2c^2$.

2.10 Chứng minh các đẳng thức

Rất nhiều bài toán về chứng minh đẳng thức có thể được thực hiện dễ dàng nếu vận dụng các đa thức đối xứng cơ sở. Để minh hoạ xét một số ví dụ sau.

Ví dụ 2.26. Chứng minh đồng nhất thức

$$(x+y+z)(xy+yz+zx)-xyz=(x+y)(y+z)(z+x).$$

Lời giải. *Khai triển vế phải, sử dụng các công thức quỹ đạo, ta có*

$$(x+y)(y+z)(z+x)=x^2y+x^2z+y^2x+y^2z+z^2x+z^2y+2xyz=$$

$$=O(x^2y)+2\sigma_3=(\sigma_1\sigma_2-3\sigma_3)+2\sigma_3=\sigma_1\sigma_2-\sigma_3=$$

$$=(x+y+z)(xy+xz+yz)-xyz.$$

Ví dụ 2.27. Chứng minh rằng, nếu $x+y+z=0$, thì

$$x^4+y^4+z^4=2(xy+yz+zx).$$

Lời giải. *Theo công thức Waring, ta có*

$$x^4+y^4+z^4=\sigma_1^4-4\sigma_1^2\sigma_2+2\sigma_2^2+4\sigma_1\sigma_3.$$

Vì $\sigma_1=x+y+z=0$, *nên*

$$x^4+y^4+z^4=2\sigma_2^2=2(xy+yz+zx)^2.$$

Ví dụ 2.28. Chứng minh rằng, nếu

$$x+y+z=x^2+y^2+z^2=x^3+y^3+z^3=1,$$

thì

$$xy+yz+xx=0,\quad xyz=0.$$

Lời giải. *Theo điều kiện của đề bài ta có* $\sigma_1 = s_2 = s_3 = 1$. *Suy ra*

$$\sigma_1 = 1, \quad \sigma_1^2 - 2\sigma_2 = 1, \quad \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 + 3\sigma_3 = 1.$$

Từ các đẳng thức trên nhanh chóng suy ra $\sigma_2 = 0, \sigma_3 = 0$, *tức là* $xy + yz + zx = 0$ *và* $xyz = 0$.

Ví dụ 2.29. Chứng minh rằng, nếu các số thực x, y, z, a, b, c thoả mãn các hệ thức

$$\begin{cases} x + y + z + a + b + c, \\ x^2 + y^2 + z^2 = a^2 + b^2 + c^2, \\ x^3 + y^3 + z^3 = a^3 + b^3 + c + 3. \end{cases}$$

thì với mọi số tự nhiên n:

$$x^n + y^n + z^n = a^n + b^n + c^n.$$

Lời giải. *kí hiệu* $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ *là các đa thức đối xứng cơ sở theo các biến, còn* τ_1, τ_2, τ_3 *là các đa thức đối xứng cơ sở theo các biến* a, b, c. *Sử dụng các công thức Waring, theo giả thiết ta có* $\sigma_1 = \tau_1$,

$\sigma_1^2 - 2\sigma_2 = \tau_1^2 - 2\tau_2$,

$\sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 + 3\sigma_3 = \tau_1^3 - 3\tau_1\tau_2 + 3\tau_3$.

Suy ra

$$\sigma_1 = \tau_1, \quad \sigma_2 = \tau_2, \quad \sigma_3 = \tau_3.$$

Khi đó với mọi đa thức $\varphi(t_1, t_2, t_3)$ *ta có*

$$\varphi(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = \varphi(\tau_1, \tau_2, \tau_3).$$

Giả sử $f(x, y, z)$ *là một đa thức đối xứng và theo Định lí cơ bản* $f(x, y, z) = \varphi(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$, $f(a, b, c) = \varphi(\tau_1, \tau_2, \tau_3)$. *Từ đó suy ra* $f(x, y, z) = f(a, b, c)$. *Trong trường hợp riêng ta có*

$$x^n + y^n + z^n = a^n + b^n + c^n.$$

Ví dụ 2.30. Chứng minh đồng nhất thức

$$\frac{(a+b)^7-a^7-b^7}{(a+b)^3-a^3-b^3}=\frac{7}{6}[(a+b)^4+a^4+b^4].$$

Lời giải. *Đặt* $x=a,\quad y=b,\quad z=-a-b$. *Khi đó ta có* $\sigma_1=a+b+(-a-b)=0$, *nên theo công thức Waring ta có*

$$\frac{(a+b)^7-a^7-b^7}{(a+b)^3-a^3-b^3}=\frac{-z^7-x^7-y^7}{-z^3-x^3-y^3}=\frac{x^7+y^7+z^7}{x^3+y^3+z^3}=\frac{s_7}{s_3}=\frac{7\sigma_2^2\sigma_3}{3\sigma_3}=\frac{7}{3}\sigma_2^2.$$

Ta biến đổi vế phải của đẳng thức cần chứng minh như sau:

$$\frac{7}{6}[(a+b)^4+a^4+b^4]=\frac{7}{6}[(-z)^4+x^4+y^4]=\frac{7}{6}[x^4+y^4+z^4]\frac{7}{6}s_4=\frac{7}{6}.2\sigma_2^2=\frac{7}{3}\sigma_2^2.$$

Từ đó suy ra điều phải chứng minh.

Phương pháp trình bày trên đây thường được áp dụng khi trong bài toán có các hiệu $a-b, b-c, c-a$. *Khi đó nếu đặt* $x=a-b, y=b-c, z-c-a$, *thì* $\sigma_1=x+y+z=0$. *Trong trường hợp này các công thức Waring đối với tổng luỹ thừa trở nên đơn giản rất nhiều. Để minh hoạ, xét các ví dụ sau đây.*

Ví dụ 2.31. Cho a,b,c là các số thực đôi một khác nhau và khác không. Chứng minh rằng

$$\frac{[(a-b)^5+(b-c)^5+(c-a)^5]^2}{(a-b)^7+(b-c)^7+(c-a)^7}=\frac{25}{7}(a-b)(b-c)(c-a).$$

Lời giải. *Đặt* $x=a-b, y=b-c, z=c-a$. *Đẳng thức đã cho trở thành*

$$\frac{(x^5+y^5+z^5)^2}{x^7+y^7+z^7}=\frac{25}{7}xyz.$$

Gọi $\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3$ *là các đa thức đối xứng cơ sở của các biến* x,y,z. *Theo công thức Waring ta có*

$$x^5+y^5+z^5=s_5=\sigma_1^5-5\sigma_1^3\sigma_2+5\sigma_1\sigma_2^2+5\sigma_1^2\sigma_3-5\sigma_2\sigma_3,$$

$$x^7+y^7+z^7=s_7=\sigma_1^7-7\sigma_1^5\sigma_2+14\sigma_1^3\sigma_2^2-7\sigma_1\sigma_2^3+7\sigma_1^4\sigma_3-21\sigma_1^2\sigma_2\sigma_3+7\sigma_1\sigma_3^2+7\sigma_2^2\sigma_3$$

Từ cách đặt trên ta có $\sigma_1 = x + y + z = (a - b) + (b_c) + (c - a) = 0$. *Khi đó*

$$x^5 + y^5 + z^5 = -5\sigma_2\sigma_3, \quad x^7 + y^7 + z^7 = 7\sigma_2^2\sigma_3.$$

Do đó

$$\frac{(x^5 + y^5 + z^5)^2}{x^7 + y^7 + z^7} = \frac{25\sigma_2^2\sigma_3^2}{7\sigma_2^2\sigma_3} = \frac{25}{7}xyz.$$

Thay x, y, z *tương ứng bằng* $a - b, b - c, c - a$ *ta có điều phải chứng minh.*

Ví dụ 2.32. Chứng minh đồng nhất thức

$$(a - b)^6 + (b - c)^6 + (c - a)^6 - 9(a - b)^2(b - c)^2(c - a)^2$$

$$= 2(a - b)^3(a - c)^3 + 2(b - c)^3(b - a)^3 + 2(c - a)^3(c - b)^3.$$

Lời giải. *Nếu đặt* $x = a - b, y = b - c, z = c - a$, *thì* $\sigma_1 = x + y + z = 0$ *và đẳng thức cần chứng minh trở thành*

$$x^6 + y^6 + z^6 - 9x^2y^2z^2 = -2(x^3y^3 + x^3z^3 + y^3z^3)$$

hay là

$$s_6 - 9\sigma_3^2 = -2.O(x^3y^3).$$

Sử dụng các công thức của tổng luỹ thừa và quỹ đạo với chú ý rằng $\sigma_1 = 0$, *ta có*

$$s_6 = 3\sigma_3^2 - 2\sigma_2^3, \quad O(x^3y^3) = \sigma_2^3 + 3\sigma_3^2.$$

Từ đó suy ra điều phải chứng minh.

Ví dụ 2.33. Chứng minh rằng nếu $a + b + c = 0$, thì các đẳng thức sau đây đúng

a) $\dfrac{a^5 + b^5 + c^5}{5} = \dfrac{a^3 + b^3 + c^3}{3}.\dfrac{a^2 + b^2 + c^2}{2} = abc.\dfrac{a^2 + b^2 + c^2}{2}$,

b) $\dfrac{a^7 + b^7 + c^7}{7} = \dfrac{a^5 + b^5 + c^5}{5}.\dfrac{a^2 + b^2 + c^2}{2} = \dfrac{a^4 + b^4 + c^4}{4}.\dfrac{a^3 + b^3 + c^3}{3}$,

c) $\dfrac{a^7 + b^7 + c^7}{7}.\dfrac{a^3 + b^3 + c^3}{3} = \left(\dfrac{a^5 + b^5 + c^5}{5}\right)^2$.

Lời giải. *kí hiệu $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ là và s_k tương ứng là các đa thức đối xứng cơ sở và tổng luỹ thừa của các biến a, b, c. Theo công thức Waring ta có*

$$a+b+c=\sigma_1=0,$$
$$a^2+b^2+c^2=s_2=\sigma_1^2-2\sigma_2=-2\sigma_2,$$
$$a^3+b^3+c^3=s_3=\sigma_1^3-3\sigma_1\sigma_2+3\sigma_3=3\sigma_3,$$
$$a^4+b^4+c^4=s_4=\sigma_1^4-4\sigma_1^2\sigma_2+2\sigma_2^2+4\sigma_1\sigma_3=2\sigma_2^2,$$
$$a^5+b^5+c^5=s_5=\sigma_1^5-5\sigma_1^3\sigma_2+5\sigma_1\sigma_2^2+5\sigma_1^2\sigma_3-5\sigma_2\sigma_3=-5\sigma_2\sigma_3,$$
$$a^7+b^7+c^7=s_7=\sigma_1^7-7\sigma_1^5\sigma_2+14\sigma_1^3\sigma_2^2-7\sigma_1\sigma_2^3+7\sigma_1^4\sigma_3-21\sigma_1^2\sigma_2\sigma_3+$$
$$+7\sigma_1\sigma_3^2+7\sigma_2^2\sigma_3=7\sigma_2^2\sigma_3.$$

Từ đó ta có

a) $$\frac{a^3+b^3+c^3}{3}.\frac{a^2+b^2+c^2}{2}=-\sigma_2\sigma_3=\frac{a^5+b^5+c^5}{5}=$$
$$=\sigma_3.\frac{-2\sigma_2}{2}=abc.\frac{a^2+b^2+c^2}{2}.$$

b) $$\frac{a^5+b^5+c^5}{5}.\frac{a^2+b^2+c^2}{2}=(-\sigma_2\sigma_3)(-\sigma_2)=\sigma_2^2\sigma_3=$$
$$=\frac{a^7+b^7+c^7}{7}=\frac{\sigma_2^2}{2}.2\sigma_3=\frac{a^4+b^4+c^4}{4}.\frac{a^3+b^3+c^3}{3}.$$

c) $$\frac{a^7+b^7+c^7}{7}.\frac{a^3+b^3+c^3}{3}=\sigma_2^2\sigma_3.\sigma_3=(\sigma_2\sigma_3)^2=\Big(\frac{a^5+b^5+c^5}{5}\Big)^2.$$

Ví dụ 2.34. Cho a, b, c là các số thực khác không và đôi một khác nhau thoả mãn điều kiện $a+b+c=0$. Chứng minh rằng

$$\Big(\frac{a-b}{c}+\frac{b-c}{a}+\frac{c-a}{b}\Big)\Big(\frac{c}{a-b}+\frac{a}{b-c}+\frac{b}{c-a}\Big)=9.$$

Lời giải. *Đặt*

$$\frac{a-b}{c}=x,\quad \frac{b-c}{a}=y,\quad \frac{c-a}{b}=z.$$

Khi đó vế trái của đẳng thức cần chứng minh có dạng

$$(x+y+z)\Big(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\Big)=3+\frac{y+z}{x}+\frac{x+z}{y}+\frac{x+y}{z}.$$

Xét phân thức $\dfrac{y+z}{x}$. *Ta có*

$$\frac{y+z}{x} = \left(\frac{b-c}{a} + \frac{c-a}{b}\right).\frac{c}{a-b} = \frac{b^2 - bc + ac - a^2}{ab}.\frac{c}{a-b} =$$

$$= \frac{(b^2-a^2) - c(b-a)}{ab}.\frac{c}{a-b} = \frac{c}{ab}(-a-b+c) = \frac{c}{ab}(-a-b-c+2c) = \frac{2c^2}{ab}.$$

Áp dụng vòng quanh ta được

$$\frac{y+z}{x} + \frac{x+z}{y} + \frac{x+y}{z} = \frac{2c^2}{ab} + \frac{2a^2}{bc} + \frac{2b^2}{ac} = \frac{2}{abc}(a^3+b^3+c^3).$$

Nhưng vì $a+b+c=0$, *nên* $a^3+b^3+c^3 = 3abc$ *(Ví dụ 2.13). Do đó*

$$\frac{y+z}{x} + \frac{x+z}{y} + \frac{x+y}{z} = 6.$$

Đẳng thức được chứng minh.

Ví dụ 2.35. Các số thực a, b, c, x, y, z thoả mãn các hệ thức

$$(b^2+c^2-a^2)(c^2+a^2-b^2)(a^2+b^2-c^2) \neq 0,$$

$$a^3+b^3+c^3 = (a+b)(b+c)(c+a),$$

$$(b^2+c^2-a^2)x = (c^2+a^2-b^2)y = (a^2+b^2-c^2)z.$$

Chứng minh rằng

$$x^3+y^3+z^3 = (x+y)(y+z)(z+x).$$

Lời giải. *Đặt*

$$A = b^2+c^2-a^2, \quad B = c^2+a^2-b^2, \quad C = a^2+b^2-c^2,$$

$$Ax = By = Cz = \lambda.$$

Suy ra

$$x = \frac{\lambda}{A}, \quad y = \frac{\lambda}{B}, \quad z = \frac{\lambda}{B}.$$

Sử dụng đồng nhất thức (Ví dụ 2.16)

$$(x+y+z)^3 - x^3 - y^3 - z^3 = 3(x+y)(y+z)(z+x),$$

dễ dàng chứng minh được các đẳng thức sau đây là tương đương

$$x^3 + y^3 + z^3 = (x+y)(y+z)(z+x),$$

$$(x+y+z)^3 = 4(x^3+y^3+z^3) = 4(x+y)(y+z)(z+x), \tag{2.23}$$

$$(x+y-z)(x+z-y)(y+z-x) = -4xyz. \tag{2.24}$$

Như vậy đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\left(\frac{1}{A}+\frac{1}{B}+\frac{1}{C}\right)^3 = 4\left(\frac{1}{A}+\frac{1}{B}\right)\left(\frac{1}{B}+\frac{1}{C}\right)\left(\frac{1}{A}+\frac{1}{B}\right),$$

nghĩa là

$$(AB+BC+CA)^3 = 4(A+B)(B+C)(C+A).ABC.$$

Nhưng

$$A+B = 2c^2, \quad B+C = 2a^2, \quad C+A = 2b^2,$$

nên ta cần phải chứng minh

$$(AB+BC+CA)^3 = 32a^2b^2c^2.ABC. \tag{2.25}$$

Trước hết chúng ta hãy xét $AB+BC+CA$, sau đó là ABC. Ta có

$$\begin{aligned}
&AB+BC+CA = A(B+C)+BC = 5\\
&= (b^2+c^2-a^2)2a^2 + [a^2+(b^2-c^2)][a^2-(b^2-c^2)]\\
&= 2a^2b^2 + 2a^2c^2 - 2a^4 + a^4 - b^4 - c^4 + 2b^2c^2\\
&= -a^4 - b^4 - c^4 + 2a^2b^2 + 2b^2c^2 + 2c^2a^2\\
&= 4a^2b^2 - (a^2+b^2-c^2)^2\\
&= (a-b+c)(-a+b+c)(a+b-c)(a+b+c).
\end{aligned}$$

Theo (2.24), ta có

$$(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a) = -4abc,$$

do đó

$$AB + BC + CA = -4abc(a+b+c). \tag{2.26}$$

Xét ABC. *Đặt*

$$\sigma_1 = a+b+c,\ \sigma_2 = ab+bc+ca,\ \sigma_3 = abc,\ s_k = a^k + b^k + c^k.$$

Khi đó theo công thức Waring, ta có

$$a^3 + b^3 + c^3 = (a+b)(b+c)(c+a)$$

$$\Leftrightarrow \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 + 3\sigma_3 = \sigma_1\sigma_2 - \sigma_3$$

$$\Leftrightarrow \sigma_1^3 = 4(\sigma_1\sigma_2 - \sigma_3) \tag{2.27}$$

$$\begin{aligned} ABC &= (s_2 - 2a^2)(s_2 - 2b^2)(s_2 - 2c^2) = \\ &= s_2^3 - 2s_2^2(a^2+b^2+c^2) + 4s_2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2) - 8a^2b^2c^2 = \\ &= -s_2^3 + 4s_2O(a^2b^2) - 8\sigma_3^2 = -(\sigma_1^2 - 2\sigma_2)^3 + 4(\sigma_1^2 - 2\sigma_2)(\sigma_2^2 - 2\sigma_1\sigma_3) - 8\sigma_3^2 = \\ &= (\sigma_1^2 - 2\sigma_2)[4\sigma_2^2 - 8\sigma_1\sigma_3 - \sigma_1^4 + \sigma_1^2\sigma_2 - 4\sigma_2^2] - 8\sigma_3^2 = \\ &= -\sigma_1(\sigma_1^2 - 2\sigma_2)[\sigma_1^3 + 8\sigma_3 - 4\sigma_1\sigma_2] - 8\sigma_3^2. \end{aligned}$$

Trong biểu thức cuối cùng, theo (2.27), thay σ_1^3 *bằng* $4(\sigma_1\sigma_2 - \sigma_3)$ *ta có kết quả*

$$ABC = -8\sigma_3(\sigma_1\sigma_2 - \sigma_3) = -8abc(a+b)(b+c)(c+a).$$

Theo công thức (2.23) từ đây suy ra

$$ABC = -2abc(a+b+c)^3. \tag{2.28}$$

Từ các công thức (2.28) và (2.26) suy ra (2.25). Đẳng thức được chứng minh.

Ví dụ 2.36. Đặt

$$\frac{a^k}{(a-b)(a-c)} + \frac{b^k}{(b-c)(b-a)} + \frac{c^k}{(c-a)(c-b)} = \tau_k.$$

Chứng minh rằng

$$\tau_0 = \tau_1 = 0, \quad \tau_2 = 1, \quad \tau_3 = a+b+c, \quad \tau_4 = a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca.$$

Lời giải. *Ta biến đổi τ_k như sau*

$$\tau_k = \frac{a^k(b-c) - b^k(a-c) + c^k(a-b)}{(a-b)(a-c)(b-c)} = \frac{F_k(a,b,c)}{T(a,b,c)}.$$

Ta có $T(a,b,c)$ là đa thức phản đối xứng đơn giản nhất của các biến a,b,c. Xét $F_k(a,b,c)$. Dễ thấy rằng $F_k(a,b,c)$ cũng là đa thức phản đối xứng, ngoài ra $F_k = 0$, khi $a = b, a = c$ và $b = c$. Do đó khi $k = 0;1$ thì $F_k = 0$, vì có bậc nhỏ hơn 3. Vậy $\tau_0 = \tau_1 = 0$. Với $k = 2$, ta có

$$\begin{aligned}
F_2(a,b,c) &= a^2(b-c) - b^2(a-c) + c^2(a-b) = \\
&= a^2(b-c) - b^2[(b-c)+(a-b)] + c^2(a-b) = \\
&= (b-c)(a^2-b^2) - (a-b)(b^2-c^2) = \\
&= (a-b)(a-c)(b-c) = T(a,b,c).
\end{aligned}$$

Do đó $\tau_2 = 1$. Để tìm τ_k $(k = 3,4,\ldots)$, ta làm như sau. Giả sử σ_1, σ_2, σ_3 là các đa thức đối xứng cơ sở của các biến a,b,c. Khi đó ta có

$$(x-a)(x-b)(x-c) = x^3 - \sigma_1 x^2 + \sigma_2 x - \sigma_3.$$

Trong đẳng thức trên lần lượt cho $x = a, x = b, c = c$, ta được

$$a^3 - \sigma_1 a^2 + \sigma_2 a - \sigma_3 = 0,$$

$$b^3 - \sigma_1 b^2 + \sigma_2 b - \sigma_3 = 0,$$

$$c^3 - \sigma_1 c^2 + \sigma_2 c - \sigma_3 = 0,$$

Chia lần lượt chia các đẳng thức trên cho $(a-b)(a-c), (b-a)(b-c), (c-a)(c-b)$, *rồi cộng vế với vế các đẳng thức vừa nhận được, ta có*

$$\tau_3 - \sigma_1\tau_2 + \sigma_2\tau_1 - \sigma_3\tau_0 = 0.$$

Vì $\tau_0 = \tau_1 = 0,\ \tau_2 = 1$, *nên từ đây suy ra* $\tau_3 = \sigma_1 = a + b + c$.

Để tính τ_4, *ta sử dụng hệ thức*

$$x(x-a)(x-b)(x-c) = x^4 - \sigma_1 x^3 + \sigma_2 x^2 - \sigma_3 x.$$

Tiến hành tương tự như trên, ta có

$$\tau_4 - \sigma_1\tau_3 + \sigma_2\tau_2 - \sigma_3\tau_1 = 0.$$

Từ đó suy ra

$$\tau_4 = \sigma_1\tau_3 - \sigma_2\tau_1 = (a+b+c)^2 - (ab+ac+bc) =$$

$$= a^2 + b^2 + c^2 + ab + ac + ba.$$

Tương tự như trên, để tính τ_k $(k = 3, 4, \ldots)$, *ta có công thức truy hồi*

$$\tau_k = \sigma_1\tau_{k-1} - \sigma_2\tau_{k-2} + \sigma_3\tau_{k-3}.$$

Ví dụ

$$\tau_5 = \sigma_1\tau_4 - \sigma_2\tau_3 + \sigma_3\tau_2 =$$

$$= a^2 + b^2 + c^2 + a^2b + a^2c + b^2a + b^2c + c^2a + c^2b + abc.$$

Ví dụ 2.37. Đặt

$$\chi_m = \frac{1}{a^m(a-b)(a-c)} + \frac{1}{b^m(b-a)(b-c)} + \frac{1}{c^m(c-a)(c-b)}.$$

Tính $\chi_0,\ \chi_1,\ \chi_2$.

Lời giải. *Xét phân thức thứ nhất. Ta biến đổi phân thức này như sau*

$$\frac{1}{a^m(a-b)(a-c)} = \frac{1}{abc}\frac{a^{-m-1}}{(a^{-1}-b^{-1})(a^{-1}-c^{-1})}.$$

Nếu đặt $x = a^{-1},\ y = b^{-1},\ z = c^{-1}$, *thì*

$$\frac{1}{a^m(a-b)(a-c)} = xyz.\frac{x^{m+1}}{(x-y)(x-z)}.$$

Do đó ta có

$$\chi_m = xyz.\tau_{m+1}(x,y,z),$$

trong đó $\tau_{m+1}(x,y,z)$ *được xác định bởi đẳng thức trong Ví dụ 2.36, khi thay* a,b,c, *tương ứng bằng* x,y,z. *Sử dụng các kết quả trong Ví dụ 2.36 ta có*

$$\chi_0 = xyz\tau_1(x,y,x) = 0,\ \chi_1 = xyz\tau_2(x,y,z) = xyz = \frac{1}{abc},$$

$$\tau_2 = xyz\tau_3(x,y,z) = xyz(x+y+z) = \frac{ab+bc+ca}{a^2b^2c^2}.$$

Ví dụ 2.38. Đặt

$$\lambda_m = a^m\frac{(a+b)(a+c)}{(a-b)(a-c)} + b^m\frac{(b+c)(b+a)}{(b-c)(b-a)} + c^m\frac{(c+a)(c+b)}{(c-a)(c-b)}.$$

Tính $\lambda_0,\ \lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3$.

Lời giải. *Xét số hạng thứ nhất. Ta biến đổi số hạng này như sau*

$$a^m\frac{(a+b)(a+c)}{(a-b)(a-c)} = \frac{(a+b+c)a^{m+1}+abca^{m-1}}{(a-b)(a-c)} =$$

$$= (a+b+c)\frac{a^{m+1}}{(a-b)(a-c)} + abc\frac{a^{m-1}}{(a-b)(a-c)}$$

Như vậy ta có

$$\lambda_m = (a+b+c)\tau_{m+1} + abc\tau_{m-1},$$

trong đó $\tau_k = \tau_k(a,b,c)$ *được xác định theo công thức trong Ví dụ 2.36. Suy ra*

$$\lambda_0 = (a+b+c)\tau_1 + abc\tau_{-1} = (a+b+c)\tau_1 + abc\chi_1 = abc.\frac{1}{abc} = 1.$$

$$\lambda_1 = (a+b+c)\tau_2 + abc\tau_0 = a+b+c,$$

$$\lambda_2 = (a+b+c)\tau_3 + abc\tau_1 = (a+b+c)^2,$$

$$\lambda_3 = (a+b+c)\tau_4 + abc\tau_2 = (a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca) + abc.$$

Ví dụ 2.39. Chứng minh đồng nhất thức

$$\rho_k = a^k\frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)} + b^k\frac{(x-c)(x-a)}{(b-c)(b-a)} + c^k\frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)} = x^k,$$

$$(k = 0, 1, 2).$$

Lời giải. *Trước hết ta biến đổi số hạng thứ nhất như sau*

$$a^k\frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)} = a^k\frac{x^2-(a+b+c)x+ax+bc}{(a-b)(a-c)} =$$

$$= [x^2-(a+b+c)x]\frac{a^k}{(a-b)(a-c)} + x\frac{a^{k+1}}{(a-b)(a-c)} + abc.\frac{a^{k-1}}{(a-b)(a-c)}$$

Các số hạng còn lại cũng biến đổi tương tự. Như vậy, ta có

$$\rho_k = abc\tau_{k-1} + [x^2-(a+b+c)x]\tau_k + x\tau_{k+1},$$

trong đó τ_k được xác định theo công thức trong Ví dụ 2.36. Ta có

$$\tau_{-1} = \frac{1}{abc}, \quad \tau_0 = \tau_1 = 0, \quad \tau_2 = 1, \quad \tau_3 = a+b+c.$$

Suy ra $\rho_k = x^k$, $(k = 0, 1, 2)$.

Nhận xét. *Bài toán trên đây có thể được giải theo cách sau. kí hiệu*

$$f(x) = a^k\frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)} + b^k\frac{(x-c)(x-a)}{(b-c)(b-a)} + c^k\frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)} - x^k.$$

Với $k = 0, 1, 2$, thì $f(x)$ là một đa thức có bậc không quá 2. Mặt khác, ta lại có

$$f(a) = f(b) = f(c) = 0.$$

Như vậy, a, b, c là ba nghiệm khác nhau của $f(x)$, nên $f(x)$ phải đồng nhất bằng không. Suy ra điều phải chứng minh. Bằng cách tương tự, dễ thấy rằng

$$a^k\frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)}+b^k\frac{(x-c)(x-a)}{(b-c)(b-a)}+c^k\frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}$$
$$=x^3-(x-a)(x-b)(x-c).$$

Ví dụ 2.40. Đơn giản biểu thức

$$T_k=\frac{a^k}{(a-b)(a-c)(x-a)}+\frac{b^k}{(b-c)(b-a)(x-b)}+\frac{c^k}{(c-a)(c-b)(x-c)},$$

trong đó $k = 0, 1, 2, 3$ và a, b, c là các số thực, đôi một khác nhau.

Lời giải. *Ta biến đổi biểu thức đã cho như sau*

$$T_k=\frac{1}{(x-a)(x-b)(x-c)}\Big[a^k\frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)}+$$
$$+b^k\frac{(x-c)(x-a)}{(b-c)(b-a)}+c^k\frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}\Big].$$

Theo kết quả của Ví dụ 2.39, suy ra

$$T_k=\frac{x^k}{(x-a)(x-b)(x-c)},\quad (k=0,1,2),$$

$$T_3=\frac{(a+b+c)x^2-(ab+bc+ca)x+abc}{(x-a)(x-b)(x-c)}.$$

Bài tập

Chứng minh các đồng nhất thức sau

1. $(a+b+c)^3+(a-b-c)^3+(b-a-c)^3+(c-a-b)^3=24abc.$

2. $a(b+c)^2+b(c+a)^2+c(a+b)^2-4abc=(a+b)(b+c)(c+a).$

3. $xyz(x+y+z)^3-(xy+yz+xz)^3=(x^2-yz)(y^2-xz)(z^2-xy).$

4. $(ab+bc+ca)^2+(a^2-bc)^2+(b^2-ca)^2+(c^2-ab)^2=(a^2+b^2+c^2)^2.$

5. $(x+y+z)^5-(-x+y+z)^5-(x-y+z)^5-(x+y-z)^5=80xyz(x^2+y^2+z^2).$

Chứng minh rằng nếu $a+b+c=0$ thì

6. $a^3+b^3+c^3+3(a+b)(b+c)(c+a)=0.$

7. $2(a^4+b^4+c^4)=(a^2+b^2+c^2)^2.$

8. $2(a^5+b^5+c^5)=5abc(a^2+b^2+c^2).$

9. $\left(\dfrac{a^7+b^7+c^7}{7}\right)^2=\left(\dfrac{a^5+b^5+c^5}{5}\right)^2.\dfrac{a^4+b^4+c^4}{2}.$

10. $a^2(b+c)^2+b^2(c+a)^2+c^2(a+b)^2+(a^2+b^2+c^2)(ab+bc+ca)=0.$

Với $a+b+c=2p$, chứng minh rằng

11. $a(p-a)^2+b(p-b)^2+c(p-c)^2+2(p-a)(p-b)(p-c)=abc.$

12. $p(p-a)(p-b)+p(p-b)(p-c)+p(p-c)(p-a)=(p-a)(p-b)(p-c)+abc.$

13. *Chứng minh rằng, nếu $xy+yz+zx=0$, thì*

$$(x+y)^2(x+z)^2(y+z)^2+2x^2y^2z^2=x^4(y+z)^2+y^4(x+z)^2+z^4(x+y)^2.$$

14. *Chứng minh rằng, nếu $xy+yz+xz=1$, thì*

$$\frac{x}{1-x^2}+\frac{y}{1-y^2}+\frac{z}{1-z^2}=\frac{4xyz}{(1-x^2)(1-y^2)(1-z^2)}.$$

15. *Chứng minh rằng, nếu*

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{a+b+c},$$

thì với mọi số lẻ n, ta có

$$\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^n=\frac{1}{a^n+b^n+c^n}=\frac{1}{(a+b+c)^n}.$$

Vận dụng các tính chất của đa thức phản đối xứng chứng minh các đẳng thức sau

16. $\dfrac{a-b}{a+b}+\dfrac{b-c}{b+c}+\dfrac{c-a}{c+a}=\dfrac{(a-b)(b-c)(c-a)}{(a+b)(b+c)(c+a)}.$

17. $\dfrac{x^2y^2}{(x-z)(y-z)}+\dfrac{y^2z^2}{(y-x)(z-x)}+\dfrac{z^2x^2}{(z-x)(z-y)}=xy+yz+zx.$

18. $\dfrac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{(x-c)(x-a)}{(b-c)(b-a)}+\dfrac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}=1.$

19. $x^2\dfrac{y^3z^3}{(x-y)(x-z)}+y^2\dfrac{x^3z^3}{(y-x)(y-z)}+z^2\dfrac{x^3y^3}{(z-x)(z-y)}=x^2y^2z^2.$

20. $$\frac{b-c}{(a-b)(a-c)}+\frac{c-a}{(b-c)(b-a)}+\frac{a-b}{(c-a)}=\frac{2}{a-b}+\frac{2}{b-c}+\frac{2}{c-a}.$$

21. $$bc\frac{(a-x)(a-y)(a-z)}{(a-b)(a-c)}+ca\frac{(b-x)(b-y)(b-z)}{(b-a)(b-c)}+$$
$$+ab\frac{(c-x)(c-y)(c-z)}{(c-a)(c-b)}=abc-xyz.$$

Rút gọn các biểu thức sau

22. $$\frac{x^3(y-z)+y^3(z-x)+z^3(x-y)}{x^2(y-z)+y^2(z-x)+z^2(x-y)}.$$

23. $$\Big(\frac{y-z}{x}+\frac{z-x}{y}+\frac{x-y}{z}\Big)\Big(\frac{x}{y-z}+\frac{y}{z-x}+\frac{z}{x-y}\Big),$$

với điều kiện $x+y+z=0$.

24. $$\frac{bc}{(a+b)(a+c)}+\frac{ac}{(b+c)(b+a)}+\frac{ab}{(c+a)(c+b)}+\frac{2abc}{(a+b)(b+c)(c+a)}.$$

2.11 Chứng minh các bất đẳng thức

Trong mục này trình bày một số ứng dụng của đa thức đối xứng ba biến để chứng minh các bất đẳng thức. Với các bộ số thực (x,y,x)*, hay* (a,b,c) *v.v.. ta luôn luôn hiểu* $\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3$ *là các đa thức đối xứng cơ sở của các bộ số đó, ví dụ đối với* x,y,z *:*

$$\sigma_1=x+y+z,\quad \sigma_2=xy+xz+yz,\quad \sigma_3=xyz.$$

Mệnh đề 2.3. *Với các số thực* x,y,z *có các bất đẳng thức:*

$$a)\quad \sigma_1^2\geq 3\sigma_2,\qquad\qquad b)\quad \sigma_2^2\geq 3\sigma_1\sigma_3. \tag{2.29}$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z$.

Chứng minh. *Với mọi số thực* x,y,z *ta luôn có bất đẳng thức*

$$(x-y)^2+(x-z)^2+(y-z)^2\geq 0.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z$. *Khai triển vế trái của bất đẳng thức trên và giản ước ta được* $s_2-\sigma_2\geq 0$. *Thay* $s_2=\sigma_1^2-2\sigma_2$*, ta có bất đẳng thức* $\sigma_1^2-3\sigma_2\geq 0$. *Từ đó suy ra bất đẳng thức thứ nhất trong (2.29).*

Theo bất đẳng thức thứ nhất trong (2.29), ta có

$$(x+y+z)^2 \geq 3(xy+xz+yz).$$

Trong bất đẳng thức trên thay $x = ab, y = bc, z = ca$, ta được

$$(ab+bc+ca)^2 \geq 3(a^2bc+ab^2c+abc^2) = 3(a+b+c)abc.$$

Từ đó suy ra bất đẳng thức thứ hai trong (2.29) đối với các số thực a, b, c.

Mệnh đề 2.4. *Với các số dương x, y, z ta có*

$$a)\quad \sigma_1\sigma_2 \geq 9\sigma_3, \qquad b)\quad \sigma_1^3 \geq 27\sigma_3, \qquad c)\quad \sigma_2^3 \geq 27\sigma_3^2. \tag{2.30}$$

Chứng minh. *Do x, y, z là các số dương, nên $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ cũng là các số dương. Nhân từng vế các bất đẳng thức trong (2.29), ta được $\sigma_1^2\sigma_2^2 \geq 9\sigma_1\sigma_2\sigma_3$. Sau khi giản ước hai vế đại lượng $\sigma_1\sigma_2$, ta được bất đẳng thức $\sigma_1\sigma_2 \geq 9\sigma_3$, tức là*

$$(x+y+z)(xy+yz+zx) \geq 9xyz.$$

Tiếp theo, từ bất đẳng thức $\sigma_1^2 \geq 3\sigma_2$, suy ra$\sigma_1^3 \geq 3\sigma_1\sigma_2$. Vì $\sigma_1\sigma_2 \geq 9\sigma_3$, nên từ đây suy ra $\sigma_1^3 \geq 27\sigma_3$, tức là

$$(x+y+z)^3 \geq 27xyz.$$

Từ công thức trên đây ta có bất đẳng thức quen biết giữa trung bình cộng và trung bình nhân:

$$\frac{x+y+x}{3} \geq \sqrt[3]{xyz}.$$

Xét bất đẳng thức thứ ba trong (2.30). Nhân từng vế các bất đẳng thức $\sigma_2^2 \geq 3\sigma_1\sigma_3$, $\sigma_1\sigma_2 \geq 9\sigma_3$, ta được $\sigma_1\sigma_2^3 \geq 27\sigma_1\sigma_3$. Suy ra bất đẳng thức $\sigma_2^3 \geq 27\sigma_3^2$, tức là bất đẳng thức

$$(xy+yz+zx)^3 \geq 27x^2y^2z^2.$$

Nhận xét . *Các bất đẳng thức trong (2.30) vẫn còn đúng nếu ta thay điều kiện x, y, z là các số dương bởi điều kiện x, y, z là các số không âm.*

Mệnh đề 2.5. *Với các số dương x, y, z ta có các bất đẳng thức*

$$\sigma_1^2\sigma_2 \geq 3\sigma_1\sigma_3 + 2\sigma_2^2, \quad \sigma_1\sigma_2^2 \geq 2\sigma_1^2\sigma_3 + 3\sigma_2\sigma_3, \quad \sigma_1^3\sigma_3 + \sigma_2^3 \geq 6\sigma_1\sigma_2\sigma_3. \tag{2.31}$$

Chứng minh. *Từ các bất đẳng thức trong (2.29), ta có*

$$\sigma_1^2\sigma_2 \geq 3\sigma_2^2 = \sigma_2^2 + 2\sigma_2^2 \geq 3\sigma_1\sigma_3 + 2\sigma_2^2.$$

Như vậy bất đẳng thức thứ nhất trong (2.31) được chứng minh và do đó, với các số dương x, y, z, ta có bất đẳng thức

$$(x+y+z)^2(xy+yz+xz) \geq 3(x+y+z)xyz + 2(xy+yz+zx)^2.$$

Xét bất đẳng thức thứ hai trong (2.31). Theo (2.29), ta có $\sigma_1^2 \geq 3\sigma_2$, suy ra $\sigma_1^2\sigma_3 \geq 3\sigma_2\sigma_3$. Mặt khác, theo (2.29), ta có $\sigma_2^2 \geq 3\sigma_1\sigma_3$, do đó

$$\sigma_1\sigma_2^2 \geq 3\sigma_1^2\sigma_3 = 2\sigma_1^2\sigma_3 + \sigma_1^2\sigma_3 \geq 2\sigma_1^2\sigma_3 + 3\sigma_2\sigma_3.$$

Từ bất đẳng thức vừa chứng minh trở lại các biến $(x, y, z) > 0$ ta có bất đẳng thức

$$(x+y+z)(xy+yz+zx)^2 \geq 2(x+y+z)^2xyz + 3(xy+yz+zx)xyz.$$

Bất đẳng thức còn lại trong (2.31) được chứng minh tương tự. Do đó với các số dương x, y, z ta có bất đẳng thức

$$(x+y+z)^3xyz + (xy+yz+zx)^3 \geq 6(x+y+z)(xy+yz+xz)xyz.$$

Dễ thấy rằng, các bất đẳng thức trong (2.31) vẫn còn đúng, nếu x, y, z là các số không âm.

Mệnh đề 2.6 (*Schur*)**.** *Giả sử x, y, z là các số thực không âm. Khi đó với mọi $r > 0$ thì*

$$f_r(x,y,z) := x^r(x-y)(x-z) + y^r(y-x)(y-z) + z^r(z-x)(z-y) \geq 0. \tag{2.32}$$

Chứng minh. *Thật vậy, vì $f_r(x,y,z)$ là hàm đối xứng theo x,y,z, nên không mất tính tổng quát ta giả sử rằng $x \geq y \geq z$. Khi đó bất đẳng thức đã cho được viết lại như sau*

$$f_r(x,y,z) = (x-y)[x^r(x-z) - y^r(y-z)] + z^r(x-z)(y-z) \geq 0.$$

Dễ thấy rằng bất đẳng thức này đúng.

Xét một vài trường hợp đặc biệt của $f_r(x,y,z)$ được xác định theo công thức (2.32). Ta có

$$f_1(x,y,z) = x(x-y)(x-z) + y(y-x)(y-z) + z(z-x)(z-y) =$$
$$= (x^3+y^3+z^3) + 3xyz - (x^2y + x^2z + y^2x + y^2z + z^2x + z^2y) =$$
$$= s_3 + 3\sigma_3 - O(x^2y) = (\sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 + 3\sigma_3) + 3\sigma_3 -$$
$$-(\sigma_1\sigma_2 - 3\sigma_3) = \sigma_1^3 - 4\sigma_1\sigma_2 + 9\sigma_3.$$
$$f_2(x,y,z) = x^2(x-y)(x-z) + y^2(y-x)(y-z) + z^2(z-x)(z-y) =$$
$$= (x^4+y^4+z^4) + (x+y+z)xyz - (x^3x + x^3z + y^3x + y^3z + z^3x + z^3y) =$$
$$= s_4 + \sigma_1\sigma_3 - O(x^3y) = (\sigma_1^4 - 4\sigma_1^2\sigma_2 + 2\sigma_2^2 + 4\sigma_1\sigma_3) +$$
$$+\sigma_1\sigma_3 - (\sigma_1^2\sigma_2 - 2\sigma_2^2 - \sigma_1\sigma_3) = \sigma_1^4 - 5\sigma_1^2\sigma_2 + 4\sigma_2^2 + 6\sigma_1\sigma_3.$$

Như vậy , ta có kết quả.

Mệnh đề 2.7. *Với các số thực không âm x,y,z giữa các đa thức đối xứng cở sở có các bất đẳng thức sau*

$$\sigma_1^3 + 9\sigma_3 \geq 4\sigma_1\sigma_2, \qquad \sigma_1^4 + 4\sigma_2^2 + 6\sigma_1\sigma_3 \geq 5\sigma_1^2\sigma_2. \tag{2.33}$$

Mệnh đề 2.8. *Với các số thực không âm x,y,z có các bất đẳng thức sau*

$$2\sigma_1^3 + 9\sigma_3 \geq 7\sigma_1\sigma_2, \quad \sigma_1^4 + 3\sigma_2^2 \geq 4\sigma_1^2\sigma_2 \tag{2.34}$$

$$\sigma_2^3 + 9\sigma_3^2 \geq 4\sigma_1\sigma_2\sigma_3, \qquad 2\sigma_2^3 + 9\sigma_3^2 \geq 7\sigma_1\sigma_2\sigma_3. \tag{2.35}$$

Chứng minh. *Trước hết giả thiết rằng, x, y, z là các số dương. Theo (2.29) và (2.33), ta có*

$$2\sigma_1^3 + 9\sigma_3 = (\sigma_1^3 + 9\sigma_3) + \sigma_1^3 \geq 4\sigma_1\sigma_2 + 3\sigma_1\sigma_2 = 7\sigma_1\sigma_2.$$

Suy ra bất đẳng thức thứ nhất trong (2.34) được chứng minh. Như vậy với các số dương x, y, z ta có bất đẳng thức

$$2(x + y + z)^3 + 9xyz \geq 7(x + y + z)(xy + yz + zx).$$

Ta chứng minh bất đẳng thức thứ hai trong (2.34). Theo (2.33), ta có

$$\sigma_1^4 + 4\sigma_2^2 + 6\sigma_1\sigma_3 \geq 5\sigma_1^2\sigma_2 \Leftrightarrow \sigma_1^4 + 3\sigma_2^2 \geq 4\sigma_1^2\sigma_2 + (\sigma_1^2\sigma_2 - \sigma_2^2 - 6\sigma_1\sigma_3) \geq 4\sigma_1^2\sigma_2,$$

vì

$$\sigma_1^2\sigma_2 \geq 3\sigma_2^2 = \sigma_2^2 + 2\sigma_2^2 \geq \sigma_2^2 + 6\sigma_1\sigma_3. \Leftrightarrow \sigma_1^2\sigma_2 - \sigma_2^2 - 6\sigma_1\sigma_3 \geq 0.$$

Từ bất đẳng thức vừa chứng minh suy ra, với các số dương x, y, z ta có

$$(x + y + z)^4 + 3(xy + yz + xz)^2 \geq 4(x + y + z)^2(xy + yz + zx).$$

Ta chứng minh bất đẳng thức thứ nhất trong (2.35). Từ bất đẳng thức thứ nhất trong (2.33), suy ra với các số dương x, y, z ta có

$$(x + y + z)^3 + 9xyz \geq 4(x + y + z)(xy + yz + zx) \qquad (**)$$

Trong (**) thay $x = ab, y = bc, z = ca$, ta được

$$(ab + bc + ca)^3 + 9(abc)^2 \geq 4(ab + bc + ca)(abbc + bcca + caab) =$$

$$= 4(a + b + c)(ab + bc + ca)abc.$$

Từ đây suy ra, với các số dương a, b, c, ta có

$$\sigma_2^3 + 9\sigma_3^2 \geq 4\sigma_1\sigma_2\sigma_3,$$

nghĩa là bất đẳng thức thứ nhất trong (2.35) được chứng minh. Bất dẳng thức thứ hai trong (2.35) được chứng minh bằng cách tương tự.

Như vậy với các số dương x, y, z ta có các bất đẳng thức

$$(xy + yz + xz)^3 + 9(xyz)^2 \geq 4(x + y + z)(xy + yz + zx)xyz,$$

$$2(xy + yz + zx)^3 + 9(xyz)^2 \geq 7(x + y + z)(xy + yz + zx)xyz.$$

Nhận xét. *Các bất đẳng thức trong (2.34) và (2.34) hiển nhiên là vẫn đúng, nếu x, y, z là các số không âm.*

Mệnh đề 2.9. *Với các số không âm x, y, z có bất đẳng thức*

$$s_k \geq \frac{\sigma_1^k}{3^{n-1}} \quad (k = 0, 1, ...), \tag{2.36}$$

trong đó $s_k = x^k + y^k + z^k$. Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z$.

Chứng minh. *Theo bất đẳng thức (1.26) trong Mệnh đề 1.2, với các số dương x, y, z, t, ta có các bất đẳng thức*

$$x^k + y^k \geq 2\Big(\frac{x + y}{2}\Big)^k, \quad z^k + t^k \geq 2\Big(\frac{z + t}{2}\Big)^k.$$

Cộng từng vế các bất đẳng thức trên và sử dụng chính các bất đẳng thức ấy ta được

$$x^k + y^k + z^k + t^k \geq 2\Big[\Big(\frac{x + y}{2}\Big)^k + \Big(\frac{z + t}{2}\Big)^k\Big] \geq 4\Big(\frac{x + y + z + t}{4}\Big)^k.$$

Bây giờ trong bất đẳng thức trên thay $t = \dfrac{x + y + z}{3}$ ta có

$$x^k + y^k + z^k + \Big(\frac{x + y + z}{3}\Big)^k \geq 4\Big(\frac{x + y + z}{3}\Big)^k.$$

Từ đó suy ra

$$x^k + y^k + z^k \geq 3\Big(\frac{x + y + z}{3}\Big)^k = \frac{(x + y + z)^k}{3^{k-1}},$$

tức là bất đẳng thức (2.36).

Mệnh đề 2.10. *Với các kí hiệu và điều kiện như trong Mệnh đề 2.9, ta có bất đẳng thức*

$$s_m s_n \leqslant 3s_{m+n}. \tag{2.37}$$

Chứng minh. *Với các số dương x, y, z, m, n ta có*

$$(x^m - y^m)(x^n - y^n) \geq 0, \quad (y^m - z^m)(y^n - z^n) \geq 0, \quad (z^m - x^m)(z^n - x^n) \geq 0.$$

Từ đó suy ra

$$x^{m+n} + y^{m+n} \geq x^m y^n + x^n y^m,$$

$$y^{m+n} + z^{m+n} \geq y^m y^n + z^n y^m,$$

$$z^{m+n} + x^{m+n} \geq z^m y^n + x^n y^m,$$

$$x^{m+n} + y^{m+n} + z^{m+n} = x^{m+n} + y^{m+n} + z^{m+n}.$$

Cộng theo từng vế các bất đẳng thức trên ta được

$$3(x^{m+n} + y^{m+n} + z^{m+n}) \geq (x^m + y^m + z^m)(x^n + y^n + z^n).$$

Từ đó suy ra điều phải chứng minh.

Xét một số ví dụ áp dụng các mệnh đề cơ bản trên đây vào chứng minh các bất đẳng thức.

Chứng minh rằng nếu $a, b, c > 0$, thì

$$(a+b+c)\Big(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\Big) - \frac{a^3 + b^3 + c^3}{abc} \leqslant 6.$$

Lời giải. *Đặt $\sigma_1 = a + b + c$, $\sigma_2 = ab + bc + ca$, $\sigma_3 = abc, s_3 = a^3 + b^3 + c^3$ và biến đổi bất đẳng thức đã cho tương đương với*

$$\sigma_1\sigma_2 - s_3 \leqslant 6\sigma_3 \Leftrightarrow \sigma_1\sigma_2 - (\sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 + 3\sigma_3) \leqslant 6\sigma_3 \Leftrightarrow 4\sigma_1\sigma_2 \leqslant \sigma_1^3 + 9\sigma_3.$$

Bất đẳng thức cuối cùng đã được chứng minh trong Mệnh đề 2.7. Vậy bất đẳng thức được chứng minh(dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$).

Ví dụ 2.41. Cho các số dương x, y, z. Chứng minh rằng

$$xyz \geq (y + z - x)(z + x - y)(x + y - z).$$

Lời giải. *Đặt* $\sigma_1 = x + y + z$, $\sigma_2 = xy + yz + zx$, $\sigma_3 = xyz$. *Khi đó bất đẳng thức đã cho có dạng*

$$\sigma_3 \geq (\sigma_1 - 2x)(\sigma_1 - 2y)(\sigma_1 - 2z) = \sigma_1^3 - 2(x + y + z)\sigma_1^2 + 2(xy + yz + xz)\sigma_1 - 8xyz$$

$$\Leftrightarrow \sigma_3 \geq \sigma_1^3 - 2\sigma_1^3 + 4\sigma_1\sigma_2 - 8\sigma_3 \Leftrightarrow \sigma_1^3 - 4\sigma_1\sigma_2 + 9\sigma_3 \geq 0.$$

Bất đẳng thức cuối cùng đúng theo Mệnh đề 2.8. Vậy bất đẳng thức đã cho được chứng minh (dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z$*).*

Ví dụ 2.42. Chứng minh rằng với mọi các số không âm a, b, c thì

$$(a + b + c)^2 + 3(abc)^{2/3} \geq 4(ab + bc + ca).$$

Lời giải. *Đặt* $\sigma_1 = a + b + c$, $\sigma_2 = ab + bc + ca$, $\sigma_3 = abc$. *Khi đó bất đẳng thức đã cho tương đương với*

$$\sigma_1^2 + 3\sigma_3^{2/3} \geq 4\sigma_2. \tag{2.38}$$

Rõ ràng là nếu $a = b = c = 0$, *thì* (2.38) *đúng. Xét trường hợp khi trong các số không âm* a, b, a *có ít nhất một số dương. Khi đó* $\sigma_1 >$, $\sigma_2 \geq 0$, $\sigma_3 \geq 0$, *nên ta có* $\sigma_2^3 \geq 27\sigma_2^3 \Leftrightarrow \sigma_2 \geq 3\sigma_3^{2/3}$. *Khi đó* (2.38) *tương đương với:*

$$\sigma_1^2 \geq 4\sigma_2 - 3\sigma_3^{2/3} \geq 4\sigma_2 - \sigma_2 = 3\sigma_2.$$

Theo (2.29) ta có điều phải chứng minh.

Nhận xét. *Bất đẳng thức đã cho cũng đúng cho mọi số thực* a, b, c. *Để chứng minh điều này cần phải xét chi tiết một số trường hợp riêng của các số* a, b, c.

Ví dụ 2.43 (*Anh, 1999*). Cho x, y, z là các số không âm thoả mãn điều kiện $x+y+z = 1$. Chứng minh rằng

$$7(xy + yz + xz) \leqslant 2 + 9xyz.$$

Lời giải. *Vì* $x+y+z=1$, *nên ta có thể viết lại bất đẳng thức đã cho ở dạng*

$$7(x+y+x)(xy+yz+zx) \leqslant 2(x+y+z)^3+9xyz.$$

Đặt $\sigma_1 = x+y+z,\ \sigma_2 = xy+yz+zx,\ \sigma_3 = xyz$. *Khi đó bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với*

$$7\sigma_1\sigma_2 \leqslant 2\sigma_1^3 + 9\sigma_3.$$

Theo (2.34) ta có điều phải chứng minh.

Ví dụ 2.44 (*Iran, 1996*). Cho các số dương x, y, z. Chứng minh rằng

$$(xy+yz+zx)\left[\frac{1}{(x+y)^2}+\frac{1}{(y+z)^2}+\frac{1}{(z+x)^2}\right] \geq \frac{9}{4}.$$

Lời giải. *Đặt* $\sigma_1 = x+y+z,\ \sigma_2 = xy+yz+xz,\ \sigma_3 = xyz$. *Khi đó dễ dàng chứng tỏ rằng bất đẳng thức trên tương đương với*

$$\sigma_2\left[\frac{\sigma_1^4 - 2\sigma_1^2\sigma_2 + \sigma_2^2 + 4\sigma_1\sigma_3}{(\sigma_1\sigma_2-\sigma_3)^2}\right] \geq \frac{9}{4}.$$

Bất đẳng thức trên tương đương với

$$4\sigma_1^4\sigma_2 - 17\sigma_1^2\sigma_2^2 + 4\sigma_2^3 + 34\sigma_1\sigma_2\sigma_3 - 9\sigma_3^2 \geq 0.$$

Ta viết lại bất đẳng thức trên đây ở dạng

$$\sigma_1\sigma_2(\sigma_1^3 - 4\sigma_1\sigma_2 + 9\sigma_3) + \sigma_2(\sigma_1^4 - 5\sigma_1^2\sigma_2 + 4\sigma_2^2 + 6\sigma_1\sigma_3) + \sigma_3(\sigma_1\sigma_2 - 9\sigma_3) \geq 0.$$

Theo các bất đẳng thức trong (2.30) và (2.33) thì mỗi số hạng ở vế trái của bất đẳng trên là không âm, vì vậy bất đẳng thức đã cho được chứng minh.

Ví dụ 2.45 (*IMO, 1961*). Giả sử a, b, c là các cạnh của một tam giác với diện tích S. Chứng minh rằng

$$a^2+b^2+c^2 \geq 4\sqrt{3}S.$$

Lời giải. *Đặt* $a = y + z,\ b = z + x,\ c = x + y, x, y, x > 0$. *Khi đó ta có*

$$a + b + c = 2(x + y + x),\ a = y + z,\ b = x + z,\ c = x + y,\ S^2 = (x + y + z)xyz.$$

Do đó bất đẳng thức đã cho có dạng

$$\left[(y + z)^2 + (x + z)^2 + (x + y)^2\right]^2 \geq 48(x + y + z)xyz.$$

Đặt $x + y + z = \sigma_1,\ xy + yz + zx = \sigma_2,\ xyz = \sigma_3$. *Khi đó bất đẳng thức trên tương đương với:*

$$\Leftrightarrow \left[(\sigma_1 - x)^2 + (\sigma_1 - y)^2 + (\sigma_1 - z)^2\right]^2 \geq 48\sigma_1\sigma_3$$

$$\Leftrightarrow \left[3\sigma_1^2 - 2(x + y + z)\sigma_1^2 + x^2 + y^2 + z^2\right]^2 \geq 48\sigma_1\sigma_3$$

$$\Leftrightarrow (\sigma_1^2 + s_2)^2 \geq 48\sigma_1\sigma_3 \Leftrightarrow (\sigma_1^2 + \sigma_1^2 - 2\sigma_2)^2 \geq 48\sigma_1\sigma_3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\sigma_1^2 - \sigma_2)^2 \geq 12\sigma_1\sigma_3 \Leftrightarrow \sigma_1^4 - 2\sigma_1^2\sigma_2 + \sigma_2^2 - 12\sigma_1\sigma_3 \geq 0.$$

Ta viết lại bất đẳng thức cuối cùng ở dạng

$$(\sigma_1^4 - 5\sigma_1^2\sigma_2 + 4\sigma_2^2 + 6\sigma_1\sigma_3) + 3\sigma_2(\sigma_1^2 - 3\sigma_2) + 6(\sigma_2^2 - 3\sigma_1\sigma_3) \geq 0.$$

Theo các công thức (2.29) và (2.33) trong các mệnh đề 2.3 và 2.7, từng số hạng ở vế trái của bất đẳng thức trên đều không âm nên suy ra điều phải chứng minh. Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$\sigma_1^4 - 5\sigma_1^2\sigma_2 + 4\sigma_2^2 + 6\sigma_1\sigma_3 = 0, \quad \sigma_1^2 - 3\sigma_2 = 0, \quad \sigma_2^2 - 3\sigma_1\sigma_3 = 0,$$

tức là $x = y = z$. *Suy ra* $a = b = c$, *hay* ΔABC *là tam giác đều.*

Ví dụ 2.46. Cho các số dương x, y, z. Chứng minh rằng

$$\frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{z+x} + \frac{z^2}{x+y} \geq \frac{x+y+z}{2}.$$

Lời giải. *Đặt* $x + y = \sigma_1$, $xy + yz + zx = \sigma_2$, $xyz = \sigma_3$. *Khi đó bất đẳng thức đã cho tương đương đương với*

$$2x^2(\sigma_1 - y)(\sigma_1 - z) + 2y^2(\sigma_1 - x)(\sigma_1 - z) + 2z^2(\sigma_1 - x)(\sigma_1 - y) \geq$$

$$\geq \sigma_1(\sigma_1 - x)(\sigma_1 - y)(\sigma_1 - z)$$

$$\Leftrightarrow 2\sigma_1^2 s_2 - 2\sigma_1 O(x^2y) + 2\sigma_1\sigma_3 \geq \sigma_1(\sigma_1 - \sigma_1\sigma_3),$$

trong đó

$$s_2 = x^2 + y^2 + z^2, \quad O(x^2y) = x^2y + x^2z + y^2x + y^2z + z^2x + z^2y$$

tương ứng là tổng luỹ thừa và quỹ đạo. Sử dụng các công thức của tổng luỹ thừa và quỹ đạo ta có bất đẳng thức

$$2\sigma_1^2(\sigma_1^2 - 2\sigma_2) - 2\sigma_1(\sigma_1\sigma_2 - 3\sigma_3) + 2\sigma_1\sigma_3 \geq \sigma_1(\sigma_1\sigma_2 - \sigma_3)$$

$$\Leftrightarrow \sigma_1(2\sigma_1^3 - 7\sigma_1\sigma_2 + 9\sigma_3) \geq 0.$$

Bất đẳng thức cuối cùng đúng theo Mệnh đề 2.8. Vậy bất đẳng thức đã cho được chứng minh. Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z$.

Ví dụ 2.47 (*IMO,1995/2*). Cho các số dương a, b, c thoả mãn điều kiện $abc = 1$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(c+a)} + \frac{1}{c^3(a+b)} \geq \frac{3}{2}.$$

Lời giải. *Đặt* $a = 1/x$, $b = 1/y$, $c = 1/z$. *Ta có* $xyz = 1/(abc) = 1$. *Khi đó bất đẳng thức đã cho tương đương với*

$$\frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{z+x} + \frac{z^2}{x+y} \geq \frac{3}{2}.$$

Sử dụng bất đẳng thức trong Ví dụ 2.47 và bất đẳng thức giữa trung bình cộng và trung bình nhân, ta có

$$\frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{z+x} + \frac{z^2}{x+y} \geq \frac{x+y+z}{2} \geq \frac{3\sqrt[3]{xyz}}{2} = \frac{3}{2},$$

nghĩa là bất đẳng thức được chứng minh.

Ví dụ 2.48. Cho x, y, z là các số dương thoả mãn điều kiện $x + y + z = 3a$. Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên n thì

$$\left(x+\frac{1}{y}\right)^n+\left(y+\frac{1}{z}\right)^n+\left(z+\frac{1}{x}\right)^n \geq 3\left(a+\frac{1}{a}\right)^n.$$

Lời giải. *Đặt*

$$x_1 = x+\frac{1}{y},\quad x_2 = y+\frac{1}{y},\quad x_3 = z+\frac{1}{x},$$

$$s_n = x_1^n + x_2^n + x_3^n,\quad \sigma_1 = x_1 + x_2 + x_3.$$

Ta có

$$\sigma_1 = (x+y+z)+\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right) \geq (x+y+z)+\frac{9}{x+y+z} = 3a+\frac{9}{3a} = 3\left(a+\frac{1}{a}\right).$$

Theo công thức (2.36) trong Mệnh đề 2.9, ta có

$$s_n \geq \frac{\sigma_1^n}{3^{n-1}} \geq \frac{1}{3^{n-1}}\left[3\left(a+\frac{1}{a}\right)\right]^n = 3\left(a+\frac{1}{a}\right)^n.$$

Từ đó suy ra điều phải chứng minh(dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z$).

Ví dụ 2.49. Cho ΔABC là tam giác không tù. Chứng minh rằng

$$(\sqrt[3]{\cos A}+\sqrt[3]{\cos B}+\sqrt[3]{\cos C})(\sqrt[3]{\cos^2 A}+\sqrt[3]{\cos^2 B}+\sqrt[3]{\cos^2 C}) \leqslant \frac{9}{2}.$$

Lời giải. *Trước hết ta chứng minh bất đẳng thức khá quen biết*

$$\cos A + \cos B + \cos C \leqslant \frac{3}{2}.$$

Thật vậy,

$$\cos A+\cos B+\cos C \leqslant \frac{3}{2} \Leftrightarrow 2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}+1-2\sin^2\frac{C}{2} \leqslant \frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow 4\sin^2\frac{C}{2}-4\sin\frac{C}{2}\cos\frac{A-B}{2}+1 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \left(2\sin\frac{C}{2}-\cos\frac{A-B}{2}\right)^2+\sin^2\frac{A-B}{2} \geq 0.$$

Đặt

$$x = \cos A, \quad y = \cos B, \quad z = \cos C, \quad s_m = x^m + y^m + z^m,$$

trong đó m là một số thực dương. Theo bất đẳng thức (2.37) và bất đẳng thức vừa chứng minh ở trên, ta có

$$s_{\frac{1}{3}} s_{\frac{2}{3}} \leqslant 3 s_{\frac{1}{3}+\frac{2}{3}} = 3s_1 = 3(\cos A + \cos B + \cos C) \leqslant 3.\frac{3}{2} = \frac{9}{2}.$$

Từ đó suy ra bất đẳng thức đã cho được chứng minh.

Ví dụ 2.50. Chứng minh rằng trong ΔABC ta có

$$\sin^5 \frac{A}{2} + \sin^5 \frac{B}{2} + \sin^5 \frac{C}{2} > \frac{1}{81}.$$

Lời giải. *Trước hết ta chứng minh bất đẳng thức :*

$$\sin \frac{A}{2} + \sin \frac{B}{2} + \sin \frac{C}{2} > 1.$$

Do $0 < \cos \frac{A}{2},\ \cos \frac{B}{2} < 1$, *nên*

$$\sin \frac{A}{2} + \sin \frac{B}{2} > \sin \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} + \sin \frac{B}{2} \cos \frac{A}{2} = \sin \frac{A+B}{2}.$$

Từ đó suy ra

$$\sin \frac{A}{2} + \sin \frac{B}{2} + \sin \frac{C}{2} > \sin \frac{A+B}{2} + \cos \frac{A+B}{2} =$$

$$= \sqrt{2} \sin \left(\frac{A+B}{2} + \frac{\pi}{4} \right) > \sqrt{2} \sin \frac{\pi}{4} = 1.$$

$$\left(\textit{vì } \frac{A+B}{2} < \frac{\pi}{2}, \textit{ nên } \frac{\pi}{4} < \frac{A+B}{2} + \frac{\pi}{4} < \frac{3\pi}{4} \right).$$

Đặt

$$x_1 = \sin \frac{A}{2},\ y = \sin \frac{B}{2},\ z = \sin \frac{C}{2},\ s_k = x^k + y^k + z^k.$$

Áp dụng bất đẳng thức (2.37) trong Mệnh đề 2.10 và bất đẳng thức vừa chứng minh ở trên ta có

$$1 < s_1.s_1 \leqslant 3s_2 \Rightarrow s_2 > \frac{1}{3},$$
$$\frac{1}{3} < s_1s_2 \leqslant 3s_3 \Rightarrow s_3 > \frac{1}{9},$$
$$\frac{1}{27} < s_2s_3 \leqslant 3s_5 \Rightarrow s_5 > \frac{1}{81}.$$

Như vậy bất đẳng thức đã cho được chứng minh.

Nhận xét. *Bằng cách quy nạp dễ dàng chứng minh được rằng, với mọi số nguyên dương n ta có bất đẳng thức:*

$$\sin^n \frac{A}{2} + \sin^n \frac{B}{2} + \sin^n \frac{C}{2} > \frac{1}{3^{n-1}}.$$

Bài tập

Chứng minh rằng với mọi số thực a, b, c có các bất đẳng thức sau

1. $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca.$
2. $(a + b + c)^2 \leqslant 3(a^2 + b^2 + c^2).$
3. $3(ab + bc + ca) \leqslant (a + b + c)^2.$
4. $a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 \geq abc(a + b + c).$
5. $(ab + bc + ca)^2 \geq abc(a + b + c).$

Chứng minh rằng với mọi số thực dương a, b, c, x, y, z có các bất đẳng thức sau

6. $(a + b + c)(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}) \geq 9,$
7. $(a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2) \geq 9abc.$
8. $ab(a + b - 2c) + bc(b + c - 2a) + ac(a + c - 2b) \geq 0.$
9. $ab(a + b) + bc(b + c) + ca(c + a) \geq 6abc.$
10. $(a + b)(b + c)(c + a) \geq 8abc.$
11. $(x + y + z)^3 \leqslant 9(x^3 + y^3 + z^3).$
12. $2(x^3 + y^3 + z^3) \geq x^2(y + z) + y^2(z + x) + z^2(x + y).$

13. $\dfrac{x}{y+z}+\dfrac{y}{z+x}+\dfrac{z}{x+y}\geq\dfrac{3}{2}$.

14. $\dfrac{x^3+y^3+z^3}{x^2+y^2+z^2}\geq\dfrac{x+y+z}{3}$.

15. $x^4+y^4+z^4\geq xyz(x+y+z)$.

Chứng minh rằng, nếu a,b,c là độ dài các cạnh, p là nửa chu vi và s diện tích của một tam giác thì các bất đẳng thức sau đúng

16. $2(ab+bc+ca)>a^2+b^2+c^2$.

17. $(a^2+b^2+c^2)(a+b+c)>2(a^3+b^3+c^3)$.

18. $3(ab+bc+ca)\leqslant(a+b+c)^2<4(ab+bc+ca)$.

19. $8(p-a)(p-b)(p-c)\leqslant abc$.

20. $(a+b+c)^3\leqslant 5[ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+b)]-3abc$.

21. $a^2(b+c-a)+b^2(c+a-b)+c^2(a+b-c)\leqslant 3abc$.

22. $a^2b(a-b)+b^2c(b-c)+c^2a(c-a)\geq 0$.

23. $3(a+b)(b+c)(c+a)\leqslant 8(a^3+b^3+c^3)$.

24. $bc(b+c)+ca(c+a)+ab(a+b)\geq 48(s-a)(s-b)(s-c)$.

25.. *Các số không âm x,y,z thoả mãn điều kiện $xy+yz+zx=1$. Chứng minh rằng*

$$\frac{1}{x+y}+\frac{1}{y+z}+\frac{1}{x+z}\geq\frac{5}{2}.$$

26.. *Cho các số dương a,b,c thoả mãn điều kiện $abc=1$. Chứng minh rằng*

$$\Big(a+\frac{1}{b}-1\Big)+\Big(b+\frac{1}{c}-1\Big)+\Big(c+\frac{1}{a}-1\Big)\leqslant 1.$$

27.. *Cho ba số dương a,b,c thoả mãn hệ thức $a^{2/3}+b^{2/3}+c^{2/3}=2$. Chứng minh bất đẳng thức*

$$3(a+b+c)\geq 2(a^{1/3}+b^{1/3}+c^{1/3}).$$

28.. *Chứng minh rằng với các số dương a,b,c ta có bất đẳng thức*

$$(a+b+c)\Big(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\Big)+\frac{4abc}{(a+b)(b+c)(c+a)}\leqslant 5.$$

29.. *Cho các số dương x, y, z. Chứng minh bất đẳng thức*

$$\frac{1}{x^3+y^3+xyz}+\frac{1}{y^3+z^3+xyz}+\frac{1}{z^3+x^3+xyz}\leqslant\frac{1}{xyz}.$$

30. *Cho các số dương x, y, z. Chứng minh bất đẳng thức*

$$\frac{x^2+y^2+z^2}{xy+yz+zx}+\frac{8xyz}{(x+y)(y+z)(z+x)}\geq 2.$$

31. *Cho các số dương x, y, z, thoả mãn hệ thức $x+y+z=3a$. Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên n ta có bất đẳng thức*

$$\Big(x+\frac{1}{x}\Big)^n+\Big(y+\frac{1}{y}\Big)^n+\Big(z+\frac{1}{z}\Big)^n\geq 3\Big(a+\frac{1}{a}\Big)^n.$$

32. *Cho tam giác nhọn ABC. Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên n ta có bất đẳng thức*

$$\tan^n A+\tan^n B+\tan^n C\geq 3^{\frac{n+2}{2}}.$$

33.(*Nhật Bản, 1997). Cho các số dương a, b, c. Chứng minh rằng*

$$\frac{(b+c-a)^2}{(b+c)^2+a^2}+\frac{(c+a-b)^2}{(c+a)^2+b^2}+\frac{(a+b-c)^2}{(a+b)^2+c^2}\geq\frac{3}{5}.$$

34. *Cho các số dương x, y, z. Chứng minh bất đẳng thức*

$$\frac{x}{(x+y)(x+z)}+\frac{y}{(y+z)(y+x)}+\frac{z}{(z+x)(z+y)}\leqslant\frac{9}{4(x+y+z)}.$$

35.(*IOM, 1984/1). Chứng minh rằng*

$$0\leqslant xy+yz+zx-2xyz\leqslant\frac{7}{27},$$

trong đó x, y, x là các số không âm thoả mãn điều kiện $x+y+z=1$.

2.12 Giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất

Ví dụ 2.51. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$F(x,y,z)=\frac{x}{y+z}+\frac{y}{z+x}+\frac{z}{x+y}+\frac{y+z}{x}+\frac{z+x}{y}+\frac{x+y}{z}$$

trên miền

$$D = \{(x, y, z) : x > 0, y > 0, z > 0\}.$$

Lời giải. *Trước hết, ta có*

$$P(x,y,z) = \frac{y+z}{x} + \frac{z+x}{y} + \frac{x+y}{z} =$$

$$= \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right) + \left(\frac{y}{z} + \frac{z}{y}\right) + \left(\frac{z}{x} + \frac{x}{z}\right) \geq 2 + 2 + 2 = 6.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z$.

Tiếp theo, xét biểu thức

$$Q(x,y,z) = \frac{x}{y+z} + \frac{y}{z+x} + \frac{z}{x+y}.$$

Ta biến đổi biểu thức này như sau

$$Q + 3 = \left(\frac{x}{y+z} + 1\right) + \left(\frac{y}{z+x} + 1\right) + \left(\frac{z}{x+y} + 1\right) =$$

$$= (x+y+z)\left(\frac{1}{y+z} + \frac{1}{x+z} + \frac{1}{x+y}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}[(y+z) + (z+x) + (x+y)]\left(\frac{1}{y+z} + \frac{1}{z+x} + \frac{1}{x+y}\right)$$

Theo bất đẳng thức giữa trung bình cộng và trung bình nhân, ta có

$$[(y+z) + (z+x) + (x+y)]\left(\frac{1}{y+z} + \frac{1}{z+x} + \frac{1}{x+y}\right) \geq 9.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $y + z = z + x = x + y \Leftrightarrow x = y = z$. Suy ra $Q \geq \frac{3}{2}$ và do đó

$$F(z,y,z) = P(x,y,z) + Q(x,y,z) \geq 6 + \frac{3}{2} = \frac{15}{2.}$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z$, thí dụ, $x = y = z = 1$.

Vậy, ta có

$$\min_D F(x,y,z) = \frac{15}{2}.$$

Ví dụ 2.52. Cho các số dương thay đổi x, y, z. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$F(x,y,z) = (1+\frac{1}{x})(1+\frac{1}{y})(1+\frac{1}{z})$$

trong mỗi trường hợp sau

a) $x+y+z=1$.

b) $xy+xz+zx=1$.

c) $xyz=1$.

Lời giải. *Chúng ta viết lại biểu thức đã cho ở dạng*

$$F(x,y,z) = \frac{(x+1)(y+1)(z+1)}{xyz} =$$

$$= \frac{1+(x+y+z)+(xy+yz+zx)+xyz}{xyz}.$$

Đặt $\sigma_1 = x+y+z,\ \sigma_2 = xy+yz+zx,\ \sigma_3 = xyz$, *ta có*

$$F = 1 + \frac{1+\sigma_1+\sigma_2}{\sigma_3}.$$

a) Trường hợp $\sigma_1 = x+y+z = 1$. *Áp dụng Mệnh đề 2.3, ta có*

$$F = 1 + \frac{2}{\sigma_3} + \frac{\sigma_2}{\sigma_3} \geq 1 + \frac{2}{\sigma_3} + \frac{3}{\sqrt[3]{\sigma_3}} \geq 1 + \frac{54}{\sigma_1^3} + \frac{9}{\sigma_1} = 64.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases} x+y+z=1, \\ x=y=z \end{cases} \Leftrightarrow x=y=z=\frac{1}{3}.$$

Vậy, trong trường hợp này ta có

$$\min F(x,y,z) = F(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}) = 64.$$

b) Trường hợp $\sigma_2 = xy+yz+zx = 1$. *Vận dụng Mệnh đề 2.3, ta có*

$$F = 1 + \frac{2}{\sigma_3} + \frac{\sigma_1}{\sigma_3} \geq 1 + \frac{6\sqrt{3}}{\sqrt{\sigma_2^3}} + \frac{9}{\sigma_2} = 10 + 6\sqrt{3}.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases} xy + yz + zx = 1, \\ x = y = z > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = z = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Vậy, trong trường hợp này ta có

$$\min F = F\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 10 + 6\sqrt{3}.$$

c) Trường hợp $\sigma_3 = xyz = 1$. Vận dụng các bất đẳng thức trong Mệnh đề 2.3, ta có

$$F = 1 + \frac{1 + \sigma_1 + \sigma_2}{\sigma_3} = 2 + \sigma_1 + \sigma_2 \geq 2 + 3\sqrt[3]{\sigma_3} + 3\sqrt[3]{\sigma_3^2} = 6.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases} xyz = 1, \\ x = y = z > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = z = 1.$$

Vậy, trong trường hợp này ta có

$$\min F = F(1, 1, 1) = 6.$$

Ví dụ 2.53. Cho các số dương thay đổi x, y, z. Hãy tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$F(x, y, z) = \frac{x^2}{y + z} + \frac{y^2}{z + x} + \frac{z^2}{x + y}$$

trong mỗi trường hợp sau :

a) $x + y + z = 1$.

b) $xy + yz + zx = 1$.

c) $xyz = 1$.

Lời giải. *Với các số dương x, y, z, áp dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz, ta có*

$$(x + y + z)^2 = \left(\frac{x}{\sqrt{y + z}}\sqrt{y + z} + \frac{y}{\sqrt{z + x}}\sqrt{z + x} + \frac{z}{\sqrt{x + y}}\sqrt{x + y}\right)^2 \leqslant$$

$$\leqslant \left(\frac{x^2}{y + z} + \frac{y^2}{z + x} + \frac{z^2}{x + y}\right)\left(y + z + z + x + x + y\right).$$

Như vậy, ta có

$$F(x,y,z) \geq \frac{x+y+z}{2}.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z$.

a) Trường hợp $x + y + z = 1$. Khi đó, ta có

$$\min F = F(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}) = \frac{1}{2}.$$

b) Trường hợp $xy + yz + zx = 1$. Theo bất đẳng thức thứ nhất trong Mệnh đề 2.3, ta có

$$(x+y+z)^2 \geq 3(xy+yz+zx) = 3.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z$. Do đó

$$\min F(x,y,z) = F(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}) = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

c) Trường hợp $xyz = 1$. Theo bất đẳng thức thứ hai trong Mệnh đề 2.3, ta có

$$x + y + z \geq 3\sqrt{xyz} = 3.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z$. Vậy, ta có

$$\min F(x,y,z) = F(1,1,1) = \frac{3}{2}.$$

Ví dụ 2.54. Các số dương x, y, z thay đổi, nhưng luôn luôn thoả mãn điều kiện $xy + yz + zx = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$F(x,y,z) = \frac{x^3}{y^2+z^2} + \frac{y^3}{z^2+x^2} + \frac{z^3}{x^2+y^2}.$$

Lời giải. *Theo bất đẳng thức Cauchy-Schwarz, ta có*

$$(x^2+y^2+z^2)^2 = \Big(\frac{x^{3/2}}{\sqrt{y^2+z^2}}\sqrt{x(y^2+z^2)} + \frac{y^{3/2}}{\sqrt{z^2+x^2}}\sqrt{y(z^2+x^2)} +$$

$$+ \frac{z^{3/2}}{\sqrt{x^2+y^2}}\sqrt{z(x^2+y^2)}\Big)^2 \leqslant$$

$$\leqslant \Big(\frac{x^3}{y^2+z^2}+\frac{y^3}{z^2+x^2}+\frac{z^3}{x^2+y^2}\Big)\Big(x(y^2+z^2)+y(z^2+x^2)+z(x^2+y^2)\Big).$$

Suy ra

$$\frac{x^3}{y^2+z^2}+\frac{y^3}{z^2+x^2}+\frac{z^3}{x^2+y^2}\geq\frac{(x^2+y^2+z^2)^2}{x(y^2+z^2)+y(z^2+x^2)+z(x^2+y^2)}.$$

Chúng ta sẽ chứng tỏ

$$\frac{(x^2+y^2+z^2)^2}{x(y^2+z^2)+y(z^2+x^2)+z(x^2+y^2)}\geq\frac{x+y+z}{2}.$$

Nếu kí hiệu $\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3$ là các đa thức đối xứng cơ sở của các biến x,y,z, thì bất đẳng thức trên tương đương với

$$\frac{(\sigma_1^2-2\sigma_2)^2}{\sigma_1\sigma_2-3\sigma_3}\geq\frac{\sigma_1}{2}\Leftrightarrow 2\sigma_1^4-8\sigma_1^2\sigma_2+8\sigma_2^2\geq\sigma_1^2\sigma_2-3\sigma_1\sigma_3$$

$$\Leftrightarrow 2(\sigma_1^4+4\sigma_2^2+6\sigma_1\sigma_3-5\sigma_1^2\sigma_2)+\sigma_1(\sigma_1\sigma_2-9\sigma_3)\geq 0.$$

Bất đẳng thức trên đây đúng trên cơ sở các bất đẳng thức trong các mệnh đề 2.3 và 2.7. Như vậy, ta có

$$F(x,y,z)=\frac{x^3}{y^2+z^2}+\frac{y^3}{z^2+x^2}+\frac{z^3}{x^2+y^2}\geq\frac{x+y+z}{2}.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z$. Theo Mệnh đề 2.3, ta có

$$(x+y+x)^2\geq 3(xy+yz+zx)=3.$$

Do đó ta có kết quả

$$\min F=F(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}})=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Ví dụ 2.55. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$F(a,b,a)=(a-b)^4+(b-c)^4+(c-a)^4,$$

trong đó a,b,c là các số thực không bé hơn 1 và không lớn hơn 2.

Lời giải. *Đặt* $x = a - b,\ y = b - c,\ z = c - a$. *Khi đó*

$$-1 \leqslant x, y, z \leqslant 1, \quad x + y + z = 0.$$

kí hiệu $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ *là các đa thức đối xứng cơ sở của các biến* x, y, z, *nghĩa là*

$$\sigma_1 = x + y + z,\ \sigma_2 = xy + yz + zx,\ \sigma_3 = xyz.$$

Theo công thức Waring, ta có

$$F = x^4 + y^4 + z^4 = \sigma_1^4 - 4\sigma_1^2\sigma_2 + 2\sigma_2^2 + 4\sigma_1\sigma_3 = 2\sigma_2^2 = 2(xy + yz + zx)^2.$$

Ta có

$$(1 - x)(1 - y)(1 - z) \geq 0 \Leftrightarrow 1 - (x + y + z) + xy + yz + zx - xyz \geq 0$$

$$\Leftrightarrow 1 + xy + yz + zx - xyz \geq 0. \tag{2.39}$$

Dấu đẳng thức xảy ra, ví dụ, với $x = 1, y = -1, z = 0$. *Ta cũng có*

$$(1 + x)(1 + y)(1 + z) \geq 0 \Leftrightarrow 1 + x + y + z + xy + yz + zx + xyz \geq 0.$$

$$\Leftrightarrow 1 + xy + yz + zx + xyz \geq 0. \tag{2.40}$$

Dấu đẳng thức xảy ra, ví dụ, với $x = 1, y = -1, z = 0$.

Cộng theo từng vế các bất đẳng thức (2.39) *và* (2.40), *ta được*

$$2 + 2(xy + yz + zx) \geq 0 \Leftrightarrow xy + yz + zx \geq -1.$$

Mặt khác, lại có

$$3(xy + yz + zx) \leqslant (x + y + z)^2 = 0.$$

Suy ra

$$0 \geq xy + yz + zx \geq -1 \Rightarrow (xy + yz + zx)^2 \leqslant 1.$$

Vậy ta có

$$F = 2(xy + yz + xz)^2 \leqslant 2 \Rightarrow \max F = 2,$$

khi, thí dụ, $x = 1, y = -1, z = 0$.

Ta có kết quả

$$\max F = 2$$

đạt tại, ví dụ, $a = 1, b = 0, c = 0$.

Ví dụ 2.56 (*Việt Nam, 2004*). Xét các số thực dương x, y, z thoả mãn điều kiện

$$(x+y+z)^3 = 32xyz.$$

Hãy tìm giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P(x,y,z) = \frac{x^4+y^4+z^4}{(x+y+z)^4}.$$

Lời giải. *Nhận xét rằng, với* α *là một số thực khác không tuỳ ý, ta luôn có*

$$P(\alpha x, \alpha y, \alpha z) = P(x,y,z),$$

và nếu x, y, z *thoả mãn điều kiện của đề bài, thì* $\alpha x, \alpha y, \alpha z$ *cũng thoả mãn điều kiện đó. Vì thế không mất tính tổng quát, có thể giả thiết rằng* $x + y + z = 4$. *Khi đó, kết hợp với điều kiện của đề bài, ta có* $xyz = 2$. *Bài toán trở thành*

"Tìm giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = \frac{1}{256}(x^4+y^4+z^4)$$

khi các biến số dương x, y, z *thay đổi, sao cho* $x+y+z = 4, xyz = 2$.

Đặt $Q = x^4 + y^4 + z^4$ *và* $\sigma_1 = x+y+z, \sigma_2 = xy+yz+zx, \sigma_3 = xyz$. *Theo công thức Waring, ta có*

$$Q = \sigma_1^4 - 4\sigma_1^2\sigma_2 + 2\sigma_2^2 + 4\sigma_1\sigma_3 = 256 - 64\sigma_2 + 2\sigma_2^2 + 32 = 2(\sigma_2^2 - 32\sigma_2 + 144).$$

Từ các điều kiện của x, y, z,*ta có*

$$\sigma_2 = x(y+z) + yz = x(4-x) + \frac{2}{x}.$$

Áp dụng bất đẳng thức $(y+z)^2 \geq 4yz$, *ta có*

$$(4-x)^2 \geq \frac{8}{x} \Leftrightarrow x^3 - 8x^2 + 16x - 8 \geq 0 \Leftrightarrow (x-2)(x^2 - 6x + 4) \geq 0.$$

Vì $x \in (0,4)$, *nên từ đây suy ra* $3 - \sqrt{5} \leqslant x \leqslant 2$.

Bài tập

1. *Cho các số dương thay đổi* x, y, z. *Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức*

$$F(x,y,z) = \frac{x^4}{x^2+y^2} + \frac{y^4}{y^4+z^4} + \frac{z^4}{z^4+x^4}$$

trong mỗi điều kiện sau đây

a) $x+y+z+1$. *b)* $xy+yz+zx=1$. *c)* $xyz=1$.

2. *Các số dương* a, b, c *thoả mãn điều kiện* $ab+bc+ca=1$. *Tìm giá trị bé nhất của biểu thức*

$$\frac{bc}{a} + \frac{ca}{b} + \frac{ab}{c}.$$

3. *Các số thực* x, y, z *thoả mãn điều kiện*

$$x(x-1) + y(y-1) + z(z-1) \leqslant \frac{4}{3}.$$

Tìm giá trị bé nhất của các hàm số

a) $f(x,y,z) = x+y+z$.

b) $g(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$.

4. *Các số không âm* x, y, z *thoã mãn điều kiện* $x^2+y^2+z^2 \leqslant 3$. *Tìm giá trị lớn nhất của hàm số*

$$f(x,y,z) = x+y+z+xy+yz+zx+xyz.$$

5. *Các số dương* x, y, z *thoả mãn điều kiện* $x+y+z \leqslant 1$. *Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức*

$$F(x,y,z) = \frac{18}{x^2+y^2+z^2} + \frac{11}{xy+yz+zx} + 18(xy+yz+zx).$$

6. *Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức* $P = (x-y)(y-z)(z-x)(x+y+z)$, *trong đó,* x, y, z *là các số thực thuộc đoạn* $[0; 1]$.

7. *Tìm giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của biểu thức*

$$P = \frac{x+y}{1+z} + \frac{y+z}{1+x} + \frac{z+x}{1+y},$$

trong đó x, y, z *là các số thực thuộc đoạn* $\left[\frac{1}{2}; 1\right]$.