GIẢI HÌNH HỌC KHÔNG GIAN BẰNG PHƯƠNG PHÁP TỌA ĐỘ

0. MỞ ĐẦU

Các bài toán hình học không gian trong các kỳ thi Đại Học từ xưa tới giờ vốn không là phần khó. Tuy nhiên với việc giảng dạy kiểu dạng mẹo thiếu iot ở phổ thông mà đa phần các học sinh khi đối diện với các bài toán HHKG đều rơi vào trạng thái bối rối .. Chúng thường không biết bắt đầu từ đâu khi trước mặt là một cái hình vẽ rối tung rối mù như bụi cây tầm gai .. Vì lẽ đó tôi soạn bài giảng này, một bài giảng mà cá nhân tôi cũng không thích thú lắm vì nó làm mất tính thuần khiết của Hình Học. Tuy nhiên tôi lại tin vào sự thực dụng của những vấn đề mình đã trình bày dưới đây. Về một lời khuyên nào đó cho các bạn đọc thì đó là khi vận dụng phương pháp tọa độ bạn cần nắm vững các nguyên tắc căn bản, nhất là nguyên tắc xác lập hệ tọa độ bên cạnh đó những định tính mà tôi trình bày dưới ngôn ngữ vector cần được bạn thấu hiểu để vận dụng mềm dẻo. Ngoài ra các công thức định lượng là thứ mà bạn chớ bao giờ lầm lẫn và cuối cùng là kỹ năng .. Hãy nhớ bạn đang làm Hình Học (một thứ toán đòi hỏi sự mơ mộng và trí tưởng tượng) thế mà lại quy về những tính toán trâu bò vì vậy hãy bỏ ngay thói quen đỏng đảnh và ẻo lả khi hành động nếu không những gì bạn có chỉ là những sai lầm và bế tắc.

I. CÁC ĐỊNH TÍNH CẦN NHỚ

Định lý số I (kiểm soát sự cùng phương): Cho $\vec{u}$ cùng phương với $\vec{v}$ khi đó:

- Nếu $\vec{v} \neq \vec{0}$ thì $k \in \mathbb{R}$: $\vec{u} = k\vec{v}$

  Chú ý: Ta có $|k| = \dfrac{|\vec{u}|}{|\vec{v}|}$ và dấu của k phụ thuộc vào sự cùng hướng hay ngược hướng giữa hai vector $\vec{u}$ và $\vec{v}$.
- $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$.

Định lý số II (kiểm soát sự cùng phương): Cho $\vec{u}; \vec{v}; \vec{w}$ đồng phẳng khi đó:

- Nếu $\vec{u}; \vec{v}$ không cùng phương khi đó $\exists!\ (k;l) \in \mathbb{R}$: $\vec{w} = k\vec{v} + l\vec{v}$
- $\vec{w}(\vec{u}\quad \vec{v}) = 0$.

Định lý về quan hệ vuông góc: Cho $\vec{u}$ có phương vuông góc với phương của $\vec{v}$ khi đó:

$\vec{u}\vec{v} = 0$

.

II. CÁC ĐỊNH LƯỢNG CẦN NẮM VỮNG

1. Các công thức về góc

1.1 *Góc giữa hai vector:* $\cos(\vec{u};\vec{v})=\dfrac{\vec{u}\vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|}$

1.2 *.Góc giữa hai đường thẳng:* $\cos\left(\widehat{\Delta_1;\Delta_2}\right)=\dfrac{|\overrightarrow{u_1}\overrightarrow{u_2}|}{|\overrightarrow{u_1}||\overrightarrow{u_2}|}$

1.3 *Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng:* $\sin\left(\widehat{\Delta;\ \alpha}\right)=\dfrac{|\overrightarrow{u_\Delta}\overrightarrow{n_\alpha}|}{|\overrightarrow{u_\Delta}||\overrightarrow{n_\alpha}|}$

1.4 *Góc giữa hai mặt phẳng:* $\cos\left(\widehat{\alpha;\beta}\right)=\dfrac{|\overrightarrow{n_\alpha}\overrightarrow{n_\beta}|}{|\overrightarrow{n_\alpha}||\overrightarrow{n_\beta}|}$

2. Các công thức về khoảng cách

2.1 *Khoảng cách từ điểm đến đường thẳng :* $d(M;\Delta)=\dfrac{|\overrightarrow{M_\Delta M}\wedge\overrightarrow{u_\Delta}|}{|\overrightarrow{u_\Delta}|}$

2.2 *Khoảng cách từ điểm đến mặt phẳng:* $d(M;\alpha)=\dfrac{|\overrightarrow{M_\alpha M}.\overrightarrow{n_\alpha}|}{|\overrightarrow{n_\alpha}|}$

2.3 *Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau:* $d(\Delta_1;\ \Delta_2)=\dfrac{|\overrightarrow{M_1M_2}.\left(\overrightarrow{u_1}\wedge\overrightarrow{u_2}\right)|}{|\overrightarrow{u_1}\wedge\overrightarrow{u_2}|}$

3. Các công thức về diện tích và thể tích

3.1 *Diện tích tam giác* $S_{\Delta ABC}=\dfrac{|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}|}{2}=\dfrac{|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{BC}|}{2}$

3.2 *Diện tích tứ giác* $S_{ABCD}=\dfrac{|\overrightarrow{BD}\wedge\overrightarrow{AC}|}{2}$ *(với $AC;BD$ là hai đường chéo).*

3.3 *Thể tích tứ diện* $V_{ABCD}=\dfrac{|\overrightarrow{AC}.\left(\overrightarrow{AC}\wedge\overrightarrow{AD}\right)|}{6}=\dfrac{|\overrightarrow{AC}.\left(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{CD}\right)|}{6}$

3.4 *Thể tích chóp tứ giác* $V_{S.ABCD}=\dfrac{|\overrightarrow{SA}.\left(\overrightarrow{AC}\wedge\overrightarrow{BD}\right)|}{6}$ *(với $AC;BD$ là hai đường chéo tứ giác đáy).*

III. CÁC CÔNG THỨC LIÊN CAN ĐẾN TỌA ĐỘ

1. Các công thức trên các phép toán vector

1.1 Ba phép toán tuyến tính: $k\vec{u}+l\vec{v}=\left(kx_u+lx_v;ky_u+ly_v;kz_u+lz_v\right)$

1.2 Tích vô hướng: $\vec{u}\vec{v}=x_ux_u+y_uy_v+z_uz_v$

1.3 Tích có hướng: $\vec{u}\wedge\vec{v}=\left(\begin{vmatrix}y_u & z_u\\ y_v & z_v\end{vmatrix};\begin{vmatrix}z_u & x_u\\ z_v & x_v\end{vmatrix};\begin{vmatrix}x_u & y_u\\ x_v & y_v\end{vmatrix}\right)$.

2. Các công thức liên can đến điểm

2.1 Tọa độ vector theo tọa độ điểm mút $\overrightarrow{AB}\left(x_B-x_A;y_B-y_A;z_B-z_A\right)$

2.2 Tọa độ các loại trọng tâm:

- *Trung điểm của đoạn thẳng AB là:*

$$I\left(\frac{x_A+x_B}{2};\frac{y_A+y_B}{2};\frac{z_A+z_B}{2}\right)$$

- *Trọng tâm tam giác ABC là:*

$$G\left(\frac{x_A+x_B+x_C}{3};\frac{y_A+y_B+y_B}{3};\frac{z_A+z_B+z_B}{3}\right)$$

- *Trọng tâm tứ diện ABCD là:*

$$G\left(\frac{x_A+x_B+x_C+x_D}{4};\frac{y_A+y_B+y_C+y_D}{4};\frac{z_A+z_B+y_C+y_D}{4}\right)$$

Cần nhớ thêm:

Hễ $\overrightarrow{AM}=k.\overrightarrow{AB}$ với $k\neq 1$ thì $M\left(\frac{x_B-kx_A}{1-k};\frac{y_B-ky_A}{1-k};\frac{z_B-kz_A}{1-k}\right)$.

IV. PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Để giải được các bài toán hình không gian bằng phương pháp tọa độ ta cần phải chọn hệ trục tọa độ thích hợp. Dưới đây là nguyên tắc căn bản để lập hệ tọa độ giải toán:

- Vẽ hình theo yêu cầu bài toán, sau đó tìm một quan hệ vuông góc ở mặt đáy điều này có nghĩa là xác định hai đường thẳng cố định ở mặt đáy vuông góc với nhau. Nơi giao nhau và vuông góc đó chính là gốc tọa độ cần chọn và đồng thời hai trục kia chính là hai trục hoành và trục tung.

- Từ gốc (đã xác định) ta dựng trục vuông góc với mặt đáy để hoàn thành việc thiết lập hệ trục, trục vuông góc với đáy chính là trục cao.

- Nhìn vào hình vẽ khai tọa độ các điểm lien can đến yêu cầu bài toán, để ý rằng với một số điểm không sẵn khai tọa độ ta cần kiểm soát các quan hệ cùng phương, đồng phẳng, vuông góc và sử dụng các công thức định lượng để khai bằng được tọa độ các điểm liên can tới yêu cầu bài toán.

- Xử lý các yêu cầu của bài toán .

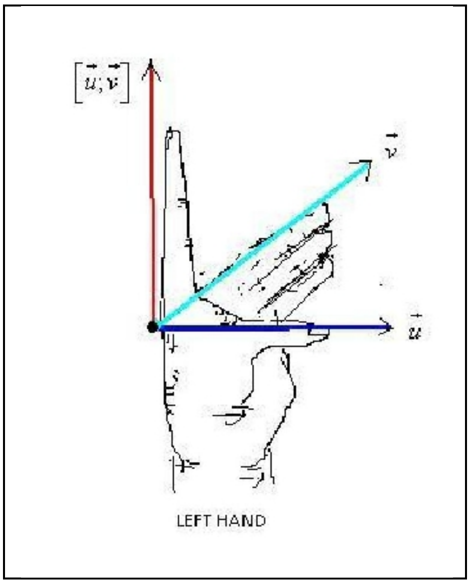
Chú ý:

Khi lựa chọn các trục hoành tung cao bạn hãy ghi nhớ luật tam diện thuận minh họa bằng quy tắc bàn tay trái bên cạnh đây. Kẻo không các phép tính về tích có hướng của bạn sẽ bị đảo dấu loạn xì ngầu. Khi chọn trục hãy xòe bàn tay trái ra và nhớ cho:

-Ngón cái là trục Ox

-Ngón thối là trục Oy

-Ngón trỏ là Oz



Ta thường gặp các tình huống cơ bản dưới đây:

Stay hungry … Stay foolish!!!!!

V. CÁC VÍ DỤ

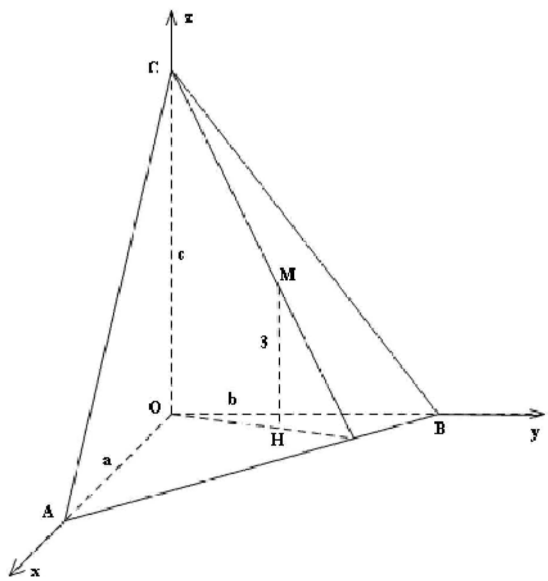
1. Hình chóp tam giác

a. Đáy là tam giác vuông

Trường hợp này rất đơn giản vì đáy đã sẵn có một hệ hai chiều .. Lúc này gốc tọa độ chính là ở đỉnh vuông của tam giác, từ đó hãy dựng trục vuông góc với đáy lên.

Ví dụ 1: Cho hình chóp O.ABC có OA = a, OB = b, OC = c đôi một vuông góc. Điểm M cố định thuộc tam giác ABC có khoảng cách lần lượt đến các mp(OBC), mp(OCA), mp(OAB) là 1, 2, 3. Tính a, b, c để thể tích O.ABC nhỏ nhất.

<u>**Hướng dẫn giải**</u>



Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ, ta có:

O(0; 0; 0), A(a; 0; 0), B(0; b; 0), C(0; 0; c).

d(M, (OAB)) = 3 $\Rightarrow$ $z_M = 3$.

Tương tự $\Rightarrow$ M(1; 2; 3).

pt(ABC): $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$

$M\in(ABC)\Rightarrow\frac{1}{a}+\frac{2}{b}+\frac{3}{c}=1$ (1).

$V_{O.ABC}=\frac{1}{6}abc$ (2).

$(1)\Rightarrow\ =\frac{1}{a}+\frac{2}{b}+\frac{3}{c}\geq 3\sqrt[3]{\frac{1}{a}.\frac{2}{b}.\frac{3}{c}}$

$\Rightarrow\frac{1}{6}abc\geq 27$.

$(2)\Rightarrow V_{\min}=27\Leftrightarrow\frac{1}{a}=\frac{2}{b}=\frac{3}{c}=\frac{1}{3}$.

b. Có một cạnh bên vuông góc với đáy

Trong tình huống này về cơ bản như nguyên tắc đã đề ra ở trên ta hãy dũng cảm từ chối sự quyến rũ của việc lấy trục vuông góc với đáy làm trục cao để kiên nhẫn săn lùng quan hệ vuông góc ở đáy.

Ví dụ 2: Cho hình chóp S.ABC có $SA \perp (ABC)$; $\triangle ABC$ vuông tại B, $\widehat{BCA} = 60^o$, BC = SA = a

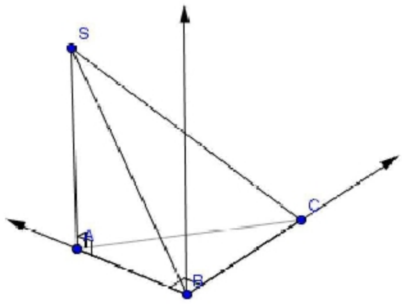
Tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp.

__Hướng dẫn giải:__

Chọn hệ trục tọa độ như hình có:

$B(0;\ 0;\ 0)$, $A(0;\ a\sqrt{3};\ 0)$, $C(a;\ 0;\ 0)$, $S(0;\ a\sqrt{3};\ a)$

Gọi tâm I(x; y; z) giải hệ phương trình là xong



Đôi khi ta cũng có thể liều lĩnh lấy cạnh bên vuông góc với đáy đó làm trục cao lợi dụng luôn một cạnh đáy cố định làm trục hoành hoặc (tung). Tuy nhiên tôi khuyến cáo bạn là ko nên lười nhác như thế.

Ví dụ 3: Tứ diện S.ABC có cạnh SA vuông góc với đáy và ΔABC vuông tại C. Độ dài của các cạnh là SA = 4, AC = 3, BC = 1. Gọi M là trung điểm của cạnh AB, H là điểm đối xứng của C qua M. Tính cosin góc giữa (HSB) và (SBC).

__Hướng dẫn giải__

Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ, ta có:

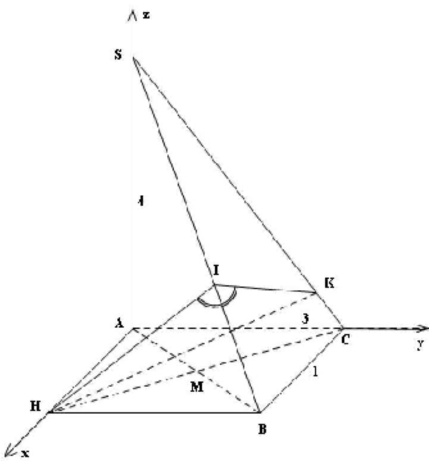
A(0; 0; 0), B(1; 3; 0), C(0; 3; 0), S(0; 0; 4) và H(1; 0; 0).

mp(P) qua H vuông góc với SB tại I cắt đường thẳng SC tại K, dễ thấy

$$[H, SB, C] = \left(\overrightarrow{IH}, \overrightarrow{IK}\right)\ (1).$$

$\overrightarrow{SB} = (-1; -3;\ 4)$, $\overrightarrow{SC} = (0; -3;\ 4)$ suy ra:

ptts SB: $\begin{cases} x = 1 - t \\ y = 3 - 3t \\ z = 4t \end{cases}$



, SC: $\begin{cases} x=0 \\ y=3-3t \\ z=4t \end{cases}$ và (P): x + 3y − 4z − 1 = 0

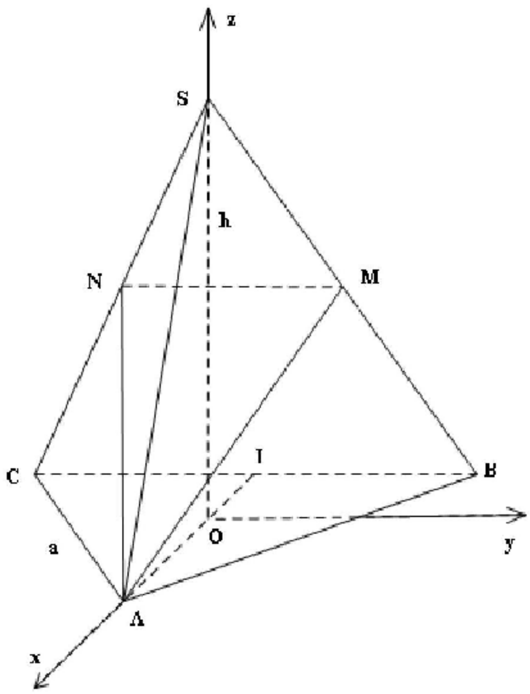
$\Rightarrow I\left(\frac{5}{8};\ \frac{15}{8};\ \frac{3}{2}\right),\ K\left(0;\ \frac{51}{25};\ \frac{32}{25}\right)$

$\Rightarrow \cos\varphi = \frac{\overrightarrow{IH}.\overrightarrow{IK}}{IH.IK} = \ldots$

Chú ý: Nếu C và H đối xứng qua AB thì C thuộc (P), khi đó ta không cần phải tìm K.

Ví dụ 4: (trích đề thi Đại học khối A – 2002). Cho hình chóp tam giác đều S.ABC có độ dài cạnh đáy là a. Gọi M, N là trung điểm SB, SC. Tính theo a diện tích ΔAMN, biết (AMN) vuông góc với (SBC).

Hướng dẫn giải



Gọi O là hình chiếu của S trên (ABC), ta suy ra O là trọng tâm ΔABC. Gọi I là trung điểm của BC, ta có:

$AI = \frac{\sqrt{3}}{2}BC = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

$\Rightarrow OA = \frac{a\sqrt{3}}{3},\ OI = \frac{a\sqrt{3}}{6}$

Trong mp(ABC), ta vẽ tia Oy vuông góc với OA. Đặt SO = h, chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ ta được:

O(0; 0; 0), S(0; 0; h), $A\left(\frac{a\sqrt{3}}{3}; 0; 0\right)$

$\Rightarrow I\left(-\frac{a\sqrt{3}}{6}; 0; 0\right),\ B\left(-\frac{a\sqrt{3}}{6};\ \frac{a}{2}; 0\right)$,

$C\left(-\frac{a\sqrt{3}}{6}; -\frac{a}{2}; 0\right)$, $M\left(-\frac{a\sqrt{3}}{12};\ \frac{a}{4};\ \frac{h}{2}\right)$

và $N\left(-\frac{a\sqrt{3}}{12}; -\frac{a}{4};\ \frac{h}{2}\right)$.

$\Rightarrow \vec{n}_{(AMN)} = \left[\overrightarrow{AM},\ \overrightarrow{AN}\right] = \left(\frac{ah}{4};\ 0;\ \frac{5a^2\sqrt{3}}{24}\right),\ \vec{n}_{(SBC)} = \left[\overrightarrow{SB},\ \overrightarrow{SC}\right] = \left(-ah;\ 0;\ \frac{a^2\sqrt{3}}{6}\right)$

$(AMN)\perp(SBC) \Rightarrow \vec{n}_{(AMN)}.\vec{n}_{(SBC)} = 0 \Rightarrow h^2 = \frac{5a^2}{12} \Rightarrow S_{\Delta AMN} = \frac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{AM},\ \overrightarrow{AN}\right]\right| = \frac{a^2\sqrt{10}}{16}.$

b. Đáy là tam giác cân

Gốc tọa độ cần chọn lúc này nên là trung điểm cạnh đối diện với đỉnh cân của tam giác.

2. Hình chóp tứ giác

a) Hình chóp S.ABCD có SA vuông góc với đáy và đáy là hình vuông (hoặc hình chữ nhật). Ta chọn hệ trục tọa độ như dạng tam diện vuông.

b) Hình chóp S.ABCD có đáy là hình vuông (hoặc hình thoi) tâm O đường cao SO vuông góc với đáy. Ta chọn hệ trục tọa độ tia OA, OB, OS lần lượt là Ox, Oy, Oz. Giả sử SO = h, OA = a, OB = b ta có

O(0; 0; 0), A(a; 0; 0), B(0; b; 0), C(–a; 0; 0), D(0;–b; 0), S(0; 0; h).

c) Hình chóp S.ABCD có đáy hình chữ nhật ABCD và AB = b. ΔSAD đều cạnh a và vuông góc với đáy. Gọi H là trung điểm AD, trong (ABCD) ta vẽ tia Hy vuông góc với AD. Chọn hệ trục tọa độ Hxyz ta có:

$$H(0;\ 0;\ 0),\ A\left(\frac{a}{2};\ 0;\ 0\right),\ B\left(\frac{a}{2};\ b;\ 0\right),\ C\left(-\frac{a}{2};\ b;\ 0\right),\ D\left(-\frac{a}{2};\ 0;\ 0\right),\ S\left(0;\ 0;\ \frac{a\sqrt{3}}{2}\right).$$

Ví dụ 5: (trích đề thi Đại học khối A – 2009). Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình thang vuông tại A, D và AB = AD =2CD = 2a. góc giữa hai mặt phẳng và (SBC) và (ABCD) bằng 60° Gọi I là trung điểm của AD. Biết hai mặt phẳng (SBI) và (SCI) cùng vuông góc với mặt phẳng (ABCD) , tính thể tích khối chóp theo a.

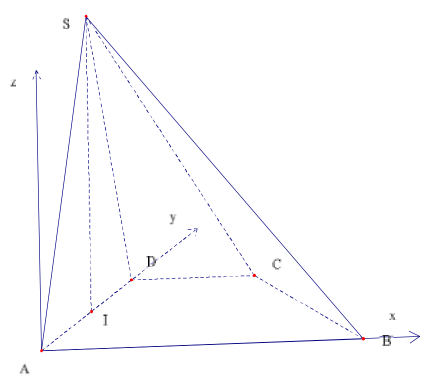
<u>Hướng dẫn giải:</u>

Từ A dựng Az vuông góc với đáy để có hệ Axyz như hình vẽ. Vì (SBI) và (SCI) cùng vuông góc với mặt phẳng (ABCD) nên SI vuông góc với đáy giả sử SI = h. Ta có:

$A(0;0;0), B(2a;0;0), D(0;2a;0), C(a;a;0)$

$\Rightarrow I(0;a;0),\ S(0;a;h)$

$\overrightarrow{SB}(2a;-a,-h),\ \overrightarrow{BC}(-a,a,\hat{})\Rightarrow \vec{n}_{SBC}=\overrightarrow{SB}\wedge\overrightarrow{BC}=(ah;ah;a^2)$



nên ta có:

$$\cos 60^o = \frac{1}{2} = \frac{|\overrightarrow{n_{SBC}}.\overrightarrow{k}|}{|\overrightarrow{n_{SBC}}|.1} = \frac{a}{\sqrt{2h^2+a^2}} \Rightarrow h = a\sqrt{\frac{3}{2}}$$

và vì thế $V = \frac{1}{3}SI.S_{ABCD} = \frac{1}{6}h.(a+2a).2a = a^3\sqrt{\frac{3}{2}}$.

3. Hình lăng trụ

Tùy theo hình dạng của đáy ta chọn hệ trục như các dạng trên.

Ví dụ 6: (trích đề thi Đại học khối B – 2009). Cho hình lăng trụ tam giác ABC.A'B'C', có BB' = a góc giữa đường thẳng BB' và mặt phẳng (ABC) bằng 60^o tam giác ABC vuông tại C và $\widehat{BAC} = 60^o$. Hình chiếu vuông góc của điểm B' lên mặt phẳng (ABC) trùng với trọng tâm của tam giác ABC. Tính thể tích khối tứ diện A'.ABC theo a .

Hướng dẫn giải:

Từ C dựng Cz vuông góc với đáy để có hệ Axyz như hình vẽ giả sử CA = c ta có:

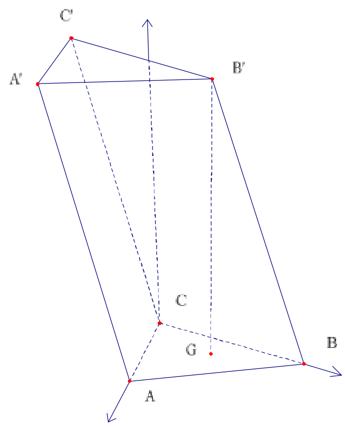
$$C(0;0;0), A(c;0;0), B\left(0;c\sqrt{3};0\right)$$

Theo công thức tọa độ trọng tâm và các hệ thức lượng trong tam giác vuông BB'G thì:

$$G\left(\frac{c}{3};\frac{c\sqrt{3}}{3};0\right); B'G = a\frac{\sqrt{3}}{2}; BG = \frac{a}{2}$$

Từ đó:

$$B'\left(\frac{c}{3};\frac{c\sqrt{3}}{3};a\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$



Sự kiện BB' = a cho ta biết:

$$\sqrt{\left(\frac{c}{3}-0\right)^2+\left(\frac{c\sqrt{3}}{3}-c\sqrt{3}\right)^2+\left(a\frac{\sqrt{3}}{2}-0\right)^2} = a \Rightarrow c = a\frac{3}{2\sqrt{13}}$$

Từ đó do $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'}$ ta sẽ có tọa độ A' và công thức thay vào công thức tính thể tích $V_{A'.ABC} = \frac{|\overrightarrow{A'C}.\left(\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}\right)|}{6}$ là xong!!

Chú ý: Ta cần phân biệt rõ

- Hình chóp tam giác đều có đáy là tam giác đều và các cạnh bên bằng nhau, nhưng không nhất thiết phải bằng cạnh đáy. Chân đường cao là trọng tâm của đáy.
- Tứ diện đều là hình chóp tam giác đều có cạnh bên bằng đáy.
- Hình hộp có đáy là hình bình hành nhưng không nhất thiết phải là hình chữ nhật.

VI. CÁC BÀI LUYỆN TẬP

1. CÁC BÀI TOÁN VỀ HÌNH CHÓP TAM GIÁC

Bài 1 (trích đề thi Đại học khối D – 2002). Cho tứ diện ABCD có cạnh AD vuông góc (ABC), AC = AD = 4cm, AB = 3cm, BC = 5cm. Tính khoảng cách từ đỉnh A đến (BCD).

Bài 2. Cho ΔABC vuông tại A có đường cao AD và AB = 2, AC = 4. Trên đường thẳng vuông góc với (ABC) tại A lấy điểm S sao cho SA = 6. Gọi E, F là trung điểm của SB, SC và H là hình chiếu của A trên EF.

1. Chứng minh H là trung điểm của SD.
2. Tính cosin của góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và (ACE).
3. Tính thể tích hình chóp A.BCFE.

Bài 3. Cho hình chóp O.ABC có các cạnh OA = OB = OC = 3cm và vuông góc với nhau từng đôi một. Gọi H là hình chiếu của điểm O lên (ABC) và các điểm A', B', C' lần lượt là hình chiếu của H lên (OBC), (OCA), (OAB).

1. Tính thể tích tứ diện HA'B'C'.
2. Gọi S là điểm đối xứng của H qua O. Chứng tỏ S.ABC là tứ diện đều.

Bài 4. Cho hình chóp O.ABC có OA, OB, OC đôi một vuông góc. Gọi α, β, γ lần lượt là góc nhị diện cạnh AB, BC, CA. Gọi H là hình chiếu của đỉnh O trên (ABC).

1. Chứng minh H là trực tâm của ΔABC.
2. Chứng minh $\frac{1}{OH^2}=\frac{1}{OA^2}+\frac{1}{OB^2}+\frac{1}{OC^2}$.
3. Chứng minh $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$.
4. Chứng minh $\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma\le\sqrt{3}$.

Bài 5. Cho hình chóp O.ABC có OA = a, OB = b, OC = c vuông góc với nhau từng đôi một. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm BC, CA, AB.

1. Tính góc φ giữa (OMN) và (OAB).

2. Tìm điều kiện a, b, c để hình chiếu của O trên (ABC) là trọng tâm ΔANP.

3. Chứng minh rằng góc phẳng nhị diện [N, OM, P] vuông khi và chỉ khi $\frac{1}{a^2}=\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}$.

Bài 6. Cho hình chóp S.ABC có ΔABC vuông cân tại A, SA vuông góc với đáy. Biết AB = 2, $\widehat{(ABC),(SBC)}=60^0$.

1. Tính độ dài SA.
2. Tính khoảng cách từ đỉnh A đến (SBC).
3. Tính góc phẳng nhị diện [A, SB, C].

Bài 7. Cho hình chóp O.ABC có OA = a, OB = b, OC = c vuông góc với nhau từng đôi một.

1. Tính bán kính r của mặt cầu nội tiếp hình chóp.
2. Tính bán kính R của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp.

Bài 8 (trích đề thi Đại học khối D – 2003). Cho hai mặt phẳng (P) và (Q) vuông góc với nhau, giao tuyến là đường thẳng (d). Trên (d) lấy hai điểm A và B với AB = a. Trong (P) lấy điểm C, trong (Q) lấy điểm D sao cho AC, BD cùng vuông góc với (d) và AC = BD = AB. Tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện ABCD và khoảng cách từ đỉnh A đến (BCD) theo a.

Bài 9. Cho hình chóp S.ABC có đáy là tam giác vuông tại B, AB = a, BC = 2a. Cạnh SA vuông góc với đáy và SA = 2a. Gọi M là trung điểm của SC.

1. Tính diện tích ΔMAB theo a.
2. Tính khoảng cách giữa MB và AC theo a.
3. Tính góc phẳng nhị diện [A, SC, B].

Bài 10. Cho tứ diện S.ABC có ΔABC vuông cân tại B, AB = SA = 6. Cạnh SA vuông góc với đáy. Vẽ AH vuông góc với SB tại H, AK vuông góc với SC tại K.

1. Chứng minh HK vuông góc với CS.
2. Gọi I là giao điểm của HK và BC. Chứng minh B là trung điểm của CI.
3. Tính sin của góc giữa SB và (AHK).
4. Xác định tâm J và bán kính R của mặt cầu ngoại tiếp S.ABC.

Bài 11. Cho hình chóp S.ABC có ΔABC vuông tại C, AC = 2, BC = 4. Cạnh bên SA = 5 và vuông góc với đáy. Gọi D là trung điểm cạnh AB.

1. Tính cosin góc giữa hai đường thẳng AC và SD.
2. Tính khoảng cách giữa BC và SD.
3. Tính cosin góc phẳng nhị diện [B, SD, C].

Bài 12. Cho hình chóp S.ABC có đáy là tam giác đều cạnh a. SA vuông góc với đáy và $SA=a\sqrt{3}$.

1. Tính khoảng cách từ đỉnh A đến (SBC).

2. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và SC.

Bài 13. Cho hình chóp tam giác đều S.ABC có độ dài cạnh đáy là a, đường cao SH = h. Mặt phẳng (α) đi qua AB và vuông góc với SC.

1. Tìm điều kiện của h theo a để (α) cắt cạnh SC tại K.
2. Tính diện tích ΔABK.
3. Tính h theo a để (α) chia hình chóp thành hai phần có thể tích bằng nhau. Chứng tỏ rằng khi đó tâm mặt cầu nội tiếp và ngoại tiếp trùng nhau.

2. CÁC BÀI TOÁN VỀ HÌNH CHÓP TỨ GIÁC

Bài 14. Cho hình chóp S.ABCD có đáy hình vuông cạnh a, SA = a và vuông góc với đáy. Gọi E là trung điểm CD.

1. Tính diện tích ΔSBE.
2. Tính khoảng cách từ đỉnh C đến (SBE).
3. (SBE) chia hình chóp thành hai phần, tính tỉ số thể tích hai phần đó.

Bài 15. Cho hình chóp S.ABCD có đáy hình vuông cạnh a. Cạnh bên SA vuông góc với đáy và $SA = a\sqrt{3}$.

1. Tính khoảng cách từ đỉnh C đến (SBD).
2. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng SD và AC.
3. Tính góc phẳng nhị diện [B, SC, D].

Bài 16. Cho hình chóp S.ABCD có đáy hình vuông cạnh 3cm. Cạnh bên SA vuông góc với đáy và $SA = 3\sqrt{2}$ cm. Mp(α) đi qua A và vuông góc với SC cắt các cạnh SB, SC, SD lần lượt tại H, M, K.

1. Chứng minh AH vuông góc với SB, AK vuông góc với SD.
2. Chứng minh BD song song với (α).
3. Chứng minh HK đi qua trọng tâm G của ΔSAC.
4. Tính thể tích hình khối ABCDKMH.

Bài 17. Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình chữ nhật, AB = a, AD = b. Cạnh bên SA vuông góc với đáy và SA = 2a. Gọi M, N là trung điểm cạnh SA, SD.

1. Tính khoảng cách từ A đến (BCN).
2. Tính khoảng cách giữa SB và CN.
3. Tính góc giữa hai mặt phẳng (SCD) và (SBC).

4. Tìm điều kiện của a và b để $\cos\widehat{CMN}=\frac{\sqrt{3}}{3}$. Trong trường hợp đó tính thể tích hình chóp S.BCNM.

Bài 18. Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình vuông cạnh a. ΔSAD đều và vuông góc với (ABCD). Gọi H là trung điểm của AD.

1. Tính d(D, (SBC)), d(HC, SD).
2. Mặt phẳng (α) qua H và vuông góc với SC tại I. Chứng tỏ (α) cắt các cạnh SB, SD.
3. Tính góc phẳng nhị diện [B, SC, D].

Bài 19. Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình thoi tâm O. SO vuông góc với đáy và $SO=2a\sqrt{3}$, AC = 4a, BD = 2a. Mặt phẳng (α) qua A vuông góc với SC cắt các cạnh SB, SC, SD tại B', C , D .

1. Chứng minh $\Delta B'C'D'$ đều.
2. Tính theo a bán kính mặt cầu nội tiếp S.ABCD.

Bài 20. Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình chữ nhật với AB = a, AD = 2a. Đường cao SA = 2a. Trên cạnh CD lấy điểm M, đặt MD = m $(0\leq m$ ´ $a)$.

1. Tìm vị trí điểm M để diện tích ΔSBM lớn nhất, nhỏ nhất.
2. Cho $m=\frac{a}{3}$, gọi K là giao điểm của BM và AD. Tính góc phẳng nhị diện [A, SK, B].

3. CÁC BÀI TOÁN VỀ HÌNH HỘP – LĂNG TRỤ

Bài 21. Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D' cạnh a. Gọi I, K, M, N lần lượt là trung điểm của A'D', BB', CD, BC.

1. Chứng minh I, K, M, N đồng phẳng.
2. Tính khoảng cách giữa IK và AD.
3. Tính diện tích tứ giác IKNM.

Bài 22 (trích đề thi Đại học khối A – 2003). Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D'. Tính góc phẳng nhị diện [B, A'C, D].

Bài 23. Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D' cạnh a. Tìm điểm M trên cạnh AA' sao cho (BD'M) cắt hình lập phương theo thiết diện có diện tích nhỏ nhất.

Bài 24. Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D' cạnh a.

1. Chứng minh A'C vuông góc với (AB'D').
2. Tính góc giữa (DA'C) và (ABB'A').
3. Trên cạnh AD', DB lấy lần lượt các điểm M, N thỏa AM = DN = k $(0<k$ $a\sqrt{2})$.
   a. Chứng minh MN song song (A'D'BC).

b. Tìm k để MN nhỏ nhất. Chứng tỏ khi đó MN là đoạn vuông góc chung của AD’ và DB.

Bài 25. Cho hình hộp chữ nhật ABCD.A’B’C’D’ có AB = 2, AD = 4, AA’ = 6. Các điểm M, N thỏa $\overrightarrow{AM} = m\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BN}$ $m\overrightarrow{BB'}$ $(0 < m \le 1)$. Gọi I, K là trung điểm của AB, C’D’.

1. Tính khoảng cách từ điểm A đến (A’BD).
2. Chứng minh I, K, M, N đồng phẳng.
3. Tính bán kính đường tròn ngoại tiếp $\Delta A'BD$.
4. Tính m để diện tích tứ giác MINK lớn nhất, nhỏ nhất.

Bài 26. Cho hình lập phương ABCD.A’B’C’D’ có độ dài cạnh là 2cm. Gọi M là trung điểm AB, N là tâm hình vuông ADD’A’.

1. Tính bán kính R của mặt cầu (S) qua C, D’, M, N.
2. Tính bán kính r của đường tròn (C) là giao của (S) và mặt cầu (S’) qua A’, B, C’, D.
3. Tính diện tích thiết diện tạo bởi (CMN) và hình lập phương.

Bài 27 (trích đề thi Đại học khối B – 2003) Cho hình lăng trụ đứng ABCD.A’B’C’D’ có đáy hình thoi cạnh a, $\widehat{BAD} = 60^0$. Gọi M, N là trung điểm cạnh AA’, CC’.

1. Chứng minh B’, M, D, N cùng thuộc một mặt phẳng.
2. Tính AA’ theo a để B’MDN là hình vuông.

Bài 28. Cho hình lăng trụ đứng tam giác ABC.A’B’C’ có đáy là tam giác vuông tại A. Cho AB = a, AC = b, AA’ = c. Mặt phẳng (α) qua B và vuông góc với B’C.

1. Tìm điều kiện của a, b, c để (α) cắt cạnh CC’ tại I (I không trùng với C và C’).
2. Cho (α) cắt CC’ tại I.

   a. Xác định và tính diện tích của thiết diện.

   b. Tính góc phẳng nhị diện giữa thiết diện và đáy.