

ỨNG DỤNG LƯỢNG GIÁC GIẢI BÀI TOÁN BẤT ĐẲNG THỨC HÌNH HỌC

Hoàng Minh Quân - THPT Ngọc Tảo - Hà Nội

Viết tặng Diễn Đàn Diendantoanhoc.net nhân dịp kỉ niệm sinh nhật lần thứ 8 (2004-2012)

Bất đẳng thức là một chủ đề đa dạng và hấp dẫn với nhiều bạn trẻ. Nói đến bất đẳng thức nhiều bạn trong chúng ta thường quan tâm tới bất đẳng thức đại số mà ở đó có nhiều kĩ thuật để khai thác và chứng minh nhưng ngoài bất đẳng thức đại số thì chúng ta còn có cả bất đẳng thức hình học với những nét đẹp riêng của hình học trong đó. Bài viết sau đây sẽ trình bày phương pháp sử dụng lượng giác chứng minh bất đẳng thức hình học. Ở đó có sự kết hợp bao gồm cả các yếu tố lượng giác, bất đẳng thức cổ điển và các định lí cơ bản trong hình học phẳng.

Nhân dịp sinh nhật lần thứ 8 của diendantoanhoc.net. Mình chúc diễn đàn diendantoanhoc.net nói riêng và các diễn đàn toán học nói chung sẽ ngày càng phát triển hơn nữa, giúp ích nhiều cho các em học sinh và giáo viên trong quá trình giảng dạy và học tập ngày càng tốt hơn.

Do thời gian và trình độ có hạn nên bài viết chắc không tránh khỏi thiếu sót. Mọi ý kiến đóng góp xin gửi về địa chỉ: hoangquan9@gmail.com

Hà Nội, ngày 15 tháng 1 năm 2012

Trước hết chúng ta cùng nhắc lại một số đẳng thức và các bất đẳng thức lượng giác thường gặp trong tam giác. Việc chứng minh các đẳng thức và bất đẳng thức cơ bản này bạn đọc có thể tự chứng minh hoặc tham khảo thêm trong nhiều tài liệu về lượng giác.

I. Các đẳng thức lượng giác cơ bản trong tam giác:

Giả sử A, B, C là 3 góc của tam giác ABC . Khi đó với các điều kiện thỏa mãn, ta có:

- 1) $\cos A + \cos B + \cos C = 1 + 4 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}$
- 2) $\sin A + \sin B + \sin C = 4 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}$
- 3) $\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C = 4 \sin A \sin B \sin C$
- 4) $\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C = 2 + 2 \cos A \cos B \cos C$
- 5) $\tan \frac{A}{2} \tan \frac{B}{2} + \tan \frac{B}{2} \tan \frac{C}{2} + \tan \frac{C}{2} \tan \frac{A}{2} = 1$
- 6) $\cot A \cot B + \cot B \cot C + \cot C \cot A = 1$
- 7) $\tan A + \tan B + \tan C = \tan A \tan B \tan C$

II. Các bất đẳng thức lượng giác cơ bản trong tam giác:

Giả sử A, B, C là 3 góc của tam giác ABC . Khi đó với các điều kiện thỏa mãn, ta có:

- 1) $\cos A + \cos B + \cos C \leq \frac{3}{2}$
- 2) $\sin \frac{A}{2} + \sin \frac{B}{2} + \sin \frac{C}{2} \leq \frac{3}{2}$
- 3) $\sin A + \sin B + \sin C \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}$
- 4) $\cos \frac{A}{2} + \cos \frac{B}{2} + \cos \frac{C}{2} \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}$
- 5) $\cos A \cos B \cos C \leq \frac{1}{8}$
- 6) $\sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} \leq \frac{1}{8}$
- 7) $\sin A \sin B \sin C \leq \frac{3\sqrt{3}}{8}$

$$8) \quad \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2} \leq \frac{3\sqrt{3}}{8}$$

$$9) \quad \cot \frac{A}{2} + \cot \frac{B}{2} + \cot \frac{C}{2} \geq 3\sqrt{3}$$

$$10) \quad \tan A + \tan B + \tan C \geq 3\sqrt{3}$$

$$11) \quad \cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C \geq \sin^2 \frac{A}{2} + \sin^2 \frac{B}{2} + \sin^2 \frac{C}{2} \geq \frac{3}{4}$$

$$12) \quad \sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C \leq \cos^2 \frac{A}{2} + \cos^2 \frac{B}{2} + \cos^2 \frac{C}{2} \leq \frac{9}{4}$$

Bây giờ chúng ta sẽ xét một số bài toán bất đẳng thức hình học đưa được về dạng bất đẳng thức cơ bản quen thuộc như trên.

Bài toán 1. Cho $\triangle ABC$ có a, b, c là độ dài tương ứng các cạnh BC, CA, AB . Chứng minh rằng:

$$(b^2 + c^2 - a^2)(c^2 + a^2 - b^2)(a^2 + b^2 - c^2) \leq a^2 b^2 c^2$$

Lời giải: Áp dụng định lí Cosin, ta có:

$$b^2 + c^2 - a^2 = 2bc \cdot \cos A$$

$$c^2 + a^2 - b^2 = 2ca \cdot \cos B$$

$$a^2 + b^2 - c^2 = 2ab \cdot \cos C$$

Do đó

$$(b^2 + c^2 - a^2)(c^2 + a^2 - b^2)(a^2 + b^2 - c^2) \leq a^2 b^2 c^2$$

tương đương

$$8a^2 b^2 c^2 \cos A \cos B \cos C \leq a^2 b^2 c^2$$

tương đương

$$\Leftrightarrow \cos A \cos B \cos C \leq \frac{1}{8}$$

Đây là bất đẳng thức lượng giác cơ bản ta dễ dàng chứng minh.

Bài toán 2. Cho $\triangle ABC$ có a, b, c là độ dài tương ứng các cạnh BC, CA, AB và R là bán kính đường tròn ngoại tiếp của tam giác $\triangle ABC$. Chứng minh rằng: $a + b + c \leq 3R\sqrt{3}$

Lời giải: Áp dụng định lí Sin, ta có:

$$a + b + c \leq 3R\sqrt{3} \Leftrightarrow 2R(\sin A + \sin B + \sin C) \leq 3R\sqrt{3}$$

tương đương

$$\sin A + \sin B + \sin C \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

(Đây là bất đẳng thức cơ bản trong tam giác nên dễ dàng chứng minh).

Bài toán 3. Cho $\triangle ABC$ có a, b, c là độ dài tương ứng các cạnh BC, CA, AB và R là bán kính đường tròn ngoại tiếp của tam giác $\triangle ABC$. Chứng minh rằng: $abc \leq (R\sqrt{3})^3$

Lời giải: Áp dụng định lí Sin, ta có:

$$abc \leq (R\sqrt{3})^3 \Leftrightarrow 8R^3 \cdot \sin A \sin B \sin C \leq 3\sqrt{3} \cdot R^3$$

tương đương

$$\sin A \sin B \sin C \leq \frac{3\sqrt{3}}{8}$$

(Bất đẳng thức cơ bản trong tam giác).

Bài toán 4. Cho ΔABC có a, b, c là độ dài tương ứng các cạnh BC, CA, AB và R là bán kính đường tròn ngoại tiếp của tam giác ΔABC . Chứng minh rằng: $\sqrt[3]{a^2b} + \sqrt[3]{b^2c} + \sqrt[3]{c^2a} \leq 3\sqrt{3}R$

Lời giải: Áp dụng bất đẳng thức Holder, ta có:

$$\left(\sqrt[3]{a^2b} + \sqrt[3]{b^2c} + \sqrt[3]{c^2a}\right)^3 \leq (a+b+c)^3$$

tương đương

$$\sqrt[3]{a^2b} + \sqrt[3]{b^2c} + \sqrt[3]{c^2a} \leq a+b+c$$

Ta chỉ cần chứng minh

$$a+b+c \leq 3\sqrt{3}R$$

Thật vậy:

$$a+b+c \leq 3\sqrt{3}R \Leftrightarrow 2R(\sin A + \sin B + \sin C) \leq 3\sqrt{3}R$$

tương đương

$$\sin A + \sin B + \sin C \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

(đây là bất đẳng thức cơ bản trong tam giác).

Bài toán 5. Chứng minh rằng trong ΔABC ta luôn có:

$$\frac{h_a^2}{b^2+c^2} \cdot \frac{h_b^2}{c^2+a^2} \cdot \frac{h_c^2}{a^2+b^2} \leq \left(\frac{3}{8}\right)^3$$

Lời giải: Áp dụng công thức $h_a = b \sin C$, định lí Sin, ta có:

$$\frac{h_a^2}{b^2+c^2} = \frac{b^2 \sin^2 C}{b^2+c^2} = \frac{\sin^2 B \sin^2 C}{\sin^2 B + \sin^2 C} \leq \frac{\sin^2 B \sin^2 C}{2 \sin B \sin C} = \frac{1}{2} \sin B \sin C$$

Tương tự, ta có:

$$\frac{h_b^2}{c^2+a^2} \leq \frac{1}{2} \sin C \sin A, \quad \frac{h_c^2}{a^2+b^2} \leq \frac{1}{2} \sin A \sin B$$

Nhân các bất đẳng thức trên ta có:

$$\frac{h_a^2}{b^2+c^2} \cdot \frac{h_b^2}{c^2+a^2} \cdot \frac{h_c^2}{a^2+b^2} \leq \frac{1}{8} (\sin A \cdot \sin B \cdot \sin C)^2$$

Ta chỉ cần chứng minh

$$(\sin A \cdot \sin B \cdot \sin C)^2 \leq \left(\frac{3\sqrt{3}}{8}\right)^2 \Leftrightarrow \sin A \cdot \sin B \cdot \sin C \leq \frac{3\sqrt{3}}{8}$$

(Đây là bất đẳng thức cơ bản trong tam giác dễ dàng chứng minh)

Bài toán 6. Chứng minh rằng trong mọi ΔABC nhọn, ta luôn có:

$$\frac{1}{-a^2+b^2+c^2} + \frac{1}{a^2-b^2+c^2} + \frac{1}{a^2+b^2-c^2} \geq \frac{1}{2Rr}$$

Lời giải: Ta có:

$$S = \frac{abc}{4R} = pr \Leftrightarrow R = \frac{abc}{4rp}$$

Áp dụng định lí Cosin và công thức $R = \frac{abc}{4rp}$. Bất đẳng thức đã cho trở thành:

$$\frac{a}{\cos A} + \frac{b}{\cos B} + \frac{c}{\cos C} \geq 2(a+b+c)$$

tương đương

$$\frac{2R \sin A}{\cos A} + \frac{2R \sin B}{\cos B} + \frac{2R \sin C}{\cos C} \geq 4R(\sin A + \sin B + \sin C)$$

tương đương

$$\tan A + \tan B + \tan C \geq 2(\sin A + \sin B + \sin C) \quad (*)$$

Mặt khác ta đã biết hai bất đẳng thức cơ bản:

$$\tan A + \tan B + \tan C \geq 3\sqrt{3}$$

và

$$\sin A + \sin B + \sin C \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

Nên bất đẳng thức (*) đúng. Vậy ta có điều phải chứng minh.

Bài toán 7. Cho $\triangle ABC$ có a, b, c là độ dài tương ứng các cạnh BC, CA, AB và R là bán kính đường tròn ngoại tiếp của tam giác $\triangle ABC$. Chứng minh rằng: $18R^3 \geq (a^2 + b^2 + c^2)R + \sqrt{3}abc$

Lời giải: Trước hết ta chứng minh

$$a^2 + b^2 + c^2 \leq 9R^2$$

Thật vậy, Áp dụng định lí Sin, ta có:

$$a^2 + b^2 + c^2 \leq 9R^2 \Leftrightarrow \sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C \leq \frac{9}{4} \quad (1)$$

Mặt khác, ta chứng minh

$$abc \leq (R\sqrt{3})^3 \Leftrightarrow \sin A \sin B \sin C \leq \frac{3\sqrt{3}}{8} \quad (2)$$

Bất đẳng thức (1) và (2) là các bất đẳng thức cơ bản trong tam giác dễ dàng chứng minh. Từ (1) và (2) ta được điều phải chứng minh.

Bài toán 8. Cho $\triangle ABC$ có a, b, c là độ dài các cạnh và S là diện tích của tam giác $\triangle ABC$. Chứng minh rằng: $\frac{9abc}{a+b+c} \geq 4\sqrt{3}.S$

Lời giải: Ta có:

$$\frac{9abc}{a+b+c} \geq 4\sqrt{3}.S$$

tương đương

$$\frac{9abc}{a+b+c} \geq 4\sqrt{3} \cdot \frac{abc}{4R} \Leftrightarrow 9R \geq \sqrt{3}(a+b+c)$$

Áp dụng định lí Sin, ta có : $a = 2R \cdot \sin A, b = 2R \cdot \sin B, c = 2R \cdot \sin C$ Ta có:

$$9R \geq \sqrt{3}(a+b+c)$$

tương đương

$$9R \geq 2\sqrt{3}R(\sin A + \sin B + \sin C)$$

tương đương

$$\sin A + \sin B + \sin C \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

(Bất đẳng thức này dễ dàng được chứng minh)

Bài toán 9. Cho $\triangle ABC$ có a, b, c là độ dài các cạnh và S là diện tích của tam giác $\triangle ABC$.
Chứng minh rằng: $3abc \geq 4\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \cdot S$

Lời giải: Áp dụng công thức

$$S = \frac{abc}{4R}$$

, ta có:

$$3abc \geq 4\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \cdot S$$

tương đương

$$3abc \geq 4\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \cdot \frac{abc}{4R}$$

tương đương

$$3R \geq \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

tương đương

$$9R^2 \geq a^2 + b^2 + c^2$$

Áp dụng định lý sin, ta có:

$$9R^2 \geq a^2 + b^2 + c^2 \Leftrightarrow 9R^2 \geq 4R^2(\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C)$$

tương đương

$$\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C \leq \frac{9}{4}$$

(Bất đẳng thức cơ bản trong tam giác).

Bài toán 10. Cho $\triangle ABC$ có a, b, c là độ dài các cạnh và S là diện tích của tam giác $\triangle ABC$.
Chứng minh rằng: $a^2 + 2bc \geq 4S\sqrt{3}$

Lời giải: Áp dụng định lý Cosin, ta có:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A \geq 2bc(1 - \cos A) \quad (1)$$

Lại có:

$$S = \frac{1}{2}bc \sin A \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có:

$$\begin{aligned} a^2 + 2bc &\geq 4S\sqrt{3} \\ \Leftrightarrow 2bc(2 - \cos A) &\geq 2\sqrt{3}bc \sin A \\ \Leftrightarrow 2 - \cos A &\geq \sqrt{3} \sin A \\ \Leftrightarrow \sqrt{3} \sin A + \cos A &\leq 2 \\ \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} \sin A + \frac{1}{2} \cos A &\leq 1 \end{aligned}$$

hay

$$\sin\left(A + \frac{\pi}{6}\right) \leq 1$$

(luôn đúng).

Như vậy thông qua 10 ví dụ điển hình trên, chúng ta đã nắm rõ được phần nào ý tưởng sử dụng lượng giác chứng minh bất đẳng thức hình học, để kết thúc bài viết xin mời bạn đọc thực hành một số ví dụ sau:

Bài toán 11. Cho $\triangle ABC$ có a, b, c là độ dài các cạnh và p là nửa chu vi của tam giác $\triangle ABC$. Chứng minh rằng: $\sqrt{a(p-b)(p-c)} + \sqrt{b(p-c)(p-a)} + \sqrt{c(p-a)(p-b)} \leq \frac{3}{2}\sqrt{abc}$

Bài toán 12. Cho $\triangle ABC$ có a, b, c là độ dài các cạnh và S là diện tích của tam giác $\triangle ABC$. Chứng minh rằng: $a^2 + b^2 + c^2 \geq 4\sqrt{3}S + (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2$

Bài toán 13. Cho $\triangle ABC$ có a, b, c là độ dài các cạnh và S là diện tích, R là bán kính đường tròn ngoại tiếp của tam giác $\triangle ABC$. Chứng minh rằng:

$$3\sqrt{3}R \geq 2S$$

Bài toán 14. Cho $\triangle ABC$ có a, b, c là độ dài các cạnh và R, r lần lượt là bán kính đường tròn ngoại tiếp, nội tiếp của tam giác $\triangle ABC$. Chứng minh rằng: $a(p-a) + b(p-b) + c(p-c) \leq 9Rr$

Bài toán 15. Cho $\triangle ABC$ có a, b, c là độ dài các cạnh và R là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác $\triangle ABC$. Chứng minh rằng: $a^2 + b^2 + R^2 \geq c^2$

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Sáng tạo bất đẳng thức, Phạm Kim Hùng.
2. Bất đẳng thức suy luận và khám phá, Phạm Văn Thuận, Lê Vỹ.
3. Tạp chí CRux, tạp chí AMM.
4. Tạp chí toán học và tuổi trẻ.
5. Các trang web : diendantoanhoc.net mathscope.org onluyentoan.vn