Chương 2

Một số phương pháp giải phương trình chứa căn

1 Một số phép biến đổi cần lưu ý khi giải phương trình chứa căn

Nhận xét 1. Trước khi bình phương 2 vế của một phương trình chúng ta nên sắp xếp lại các số hạng ở hai vế để sau khi bình phương ẩn x nằm ngoài căn thức triệt tiêu hay có bậc thấp nhất, đồng thời phải lưu ý tới điều kiện cùng dấu hai vế của phương trình.

Ví dụ 1. Giải phương trình

$$\sqrt{x+3}+\sqrt{3x+1}=2\sqrt{x}+\sqrt{2x+2}.$$

Giải

Điều kiện: $x \geqslant 0$.
Phương trình tương đương với

$$\sqrt{3x+1}-\sqrt{2x+2}=\sqrt{4x}-\sqrt{x+3}$$

Giả sử 2 vế phương trình cùng dấu, bình phương 2 vế nhận được

$$\sqrt{6x^2+8x+2}=\sqrt{4x^2+12x}$$

$$\Leftrightarrow 2x^2-4x+2=0 \Leftrightarrow x=1$$

Kiểm tra $x = 1$ thoả mãn phương trình.
Đáp số $x = 1$.

Ví dụ 2. Giải phương trình

$$\boxed{\sqrt{2x^2+x+6}+\sqrt{x^2+x+2} = x+\frac{4}{x}.}$$

Giải

Điều kiện: $x \neq 0$.
Điều kiện cần để x là nghiệm của phương trình là $x > 0$.
Phương trình tương đương với

$$\frac{x^2+4}{\sqrt{2x^2+x+6}-\sqrt{x^2+x+2}} = \frac{x^2+4}{x}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2x^2+x+6} = x+\sqrt{x^2+x+2}$$

Bình phương hai vế ta có

$$\begin{aligned}
&4 = 2x\sqrt{x^2+x+2}\\
&\Leftrightarrow 4 = x^2(x^2+x+2)\\
&\Leftrightarrow x^4+x^3+2x^2-4 = 0\\
&\Leftrightarrow (x-1)(x^3+2x^2+4x+4) = 0\\
&\Leftrightarrow x = 1 \quad (\text{vì } x^3+2x^2+4x+4 > 0\,,\ \forall x > 0).
\end{aligned}$$

Đáp số $x = 1$.

Nhận xét 2. Khi thu gọn một phương trình chứa căn chúng ta thường chia cả 2 vế của phương trình cho x hoặc $\sqrt{x}$ để kiểm tra dạng nghịch đảo.

Ví dụ 3. Giải phương trình

$$\boxed{x^2+2x\sqrt{x-\frac{1}{x}} = 3x+1.}$$

Giải

Điều kiện $x - \dfrac{1}{x} \geqslant 0 \Leftrightarrow x \geqslant 1$ hoặc $-1 \leqslant x < 0$.
Chia cả 2 vế cho $x \neq 0$ ta nhận được

$$x+2\sqrt{x-\frac{1}{x}} = 3+\frac{1}{x}$$

Đặt $t = \sqrt{x - \frac{1}{x}}$ ta có $t^2 + 2t - 3 = 0 \Leftrightarrow t = 1$ hoặc $t = -3$(loại).

Giải $t = \sqrt{x - \frac{1}{x}} = 1 \Leftrightarrow x^2 - x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ hoặc $x = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$.

Đáp số $x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$.

Ví dụ 4. Giải phương trình

$$\boxed{x^2 + \sqrt[3]{x^4 - x^2} = 2x + 1.}$$

Giải

Rõ ràng $x = 0$ không là nghiệm của phương trình.
Chia cả 2 vế cho $x \neq 0$ ta thu được

$$\left(x - \frac{1}{x}\right) + \sqrt[3]{x - \frac{1}{x}} = 2. \text{ Đặt } t = \sqrt[3]{x - \frac{1}{x}}$$

Ta có

$$t^3 + t - 2 = 0 \Leftrightarrow (t-1)(t^2 + t + 2) = 0 \Leftrightarrow t = 1$$

$$\Leftrightarrow \sqrt[3]{x - \frac{1}{x}} = 1 \Leftrightarrow x - \frac{1}{x} = 1 \Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Đáp số $x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$.

Nhận xét 3. Khi giải phương trình chứa căn người ta thường tìm mối liên hệ giữa các biểu thức trong các dấu căn để đặt ẩn phụ đưa phương trình về hệ đơn giản.

Ví dụ 5. Giải phương trình

$$\boxed{\sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{x+1} = \sqrt[4]{2x+1}.}$$

Giải

Điều kiện $x \geqslant 0$.
Vì $x + (x+1) = 2x + 1$ nên ta chia cả 2 vế cho $\sqrt[4]{2x+1}$ và nhận được

$$\sqrt[4]{\frac{x}{2x+1}} + \sqrt[4]{\frac{x+1}{2x+1}} = 1$$

Đặt $u = \sqrt[4]{\dfrac{x}{2x+1}}$ và $v = \sqrt[4]{\dfrac{x+1}{2x+1}}$.

Ta nhận được hệ

$$\begin{cases} u+v=1 \\ u^4+v^4=1 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} uv & =2 \\ uv & =0 \end{array} \right.$$

Giải $\begin{cases} uv=0 \\ u+v=1 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} u=0 \\ v=1 \end{cases} \\ \begin{cases} u=1 \\ v=0 \end{cases} \end{array} \right. \Leftrightarrow x=0.$

Giải $\begin{cases} uv=2 \\ u+v=1 \end{cases}$ Vô nghiệm .

Đáp số $x=0$.

Ví dụ 6. Giải phương trình

$$\boxed{\sqrt{x^2+4x+3}+\sqrt{x^2+x}=\sqrt{3x^2+4x+1}.}$$

Giải

Điều kiện $x \leqslant -3,\ x=-1$ và $x \geqslant 0.$

Phương trình tương đương với

$$\sqrt{(x+1)(x+3)}+\sqrt{x(x+1)}=\sqrt{(x+1)(3x+1)}$$

Ta thấy $x=-1$ là nghiệm.

Xét $x \geqslant 0 \Rightarrow x+1>0$:

Chia 2 vế cho $\sqrt{x+1} \neq 0$ ta nhận được

$$\begin{aligned} & \sqrt{x+3}+\sqrt{x}=\sqrt{3x+1} \\ \Leftrightarrow\ & 2x+3+2\sqrt{x(x+3)}=3x+1 \\ \Leftrightarrow\ & 2\sqrt{x(x+3)}=x-2 \\ \Leftrightarrow\ & \begin{cases} x \geqslant 2 \\ 4x^2+12x=x^2-4x+4 \end{cases} \\ \Leftrightarrow\ & \begin{cases} x \geqslant 2 \\ 3x^2+16x-4=0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow\ & x=\frac{-8 \pm \sqrt{76}}{3} \quad \text{(loại).} \end{aligned}$$

Xét $\quad x \leqslant -3 \Rightarrow -(x+1) > 0$.
Chia hai vế cho $\sqrt{-(x+1)} > 0$ ta thu được

$$\begin{aligned}
&\sqrt{-(x+3)} + \sqrt{-x} = \sqrt{-(3x+1)}\\
\Leftrightarrow & -2x - 3 + 2\sqrt{x(x+3)} = -(3x+1)\\
\Leftrightarrow & \, 2\sqrt{x(x+3)} = -x + 2\\
\Leftrightarrow & \, 4x^2 + 12x = x^2 + 4 - 4x\\
\Leftrightarrow & \, 3x^2 + 16x - 4 = 0\\
\Leftrightarrow & \left[\begin{array}{ll} x = \dfrac{-8-\sqrt{76}}{6} & \text{loại ,}\\ x = \dfrac{-8+\sqrt{76}}{6} & \text{loại .}\end{array}\right.
\end{aligned}$$

Đáp số $\quad x = -1$.

Nhận xét 4. Khi giải các bất phương trình chứa căn chúng ta thường tìm nghiệm của phương trình sau đó xét dấu để tìm ra miền nghiệm của bất phương trình.

Ví dụ 7. Giải phương trình

$$\boxed{\sqrt[3]{x} + \sqrt{5-x} \leq 3.}$$

Giải

Điều kiện $x \leqslant 5$.
Giải phương trình

$$\sqrt[3]{x} + \sqrt{5-x} = 3$$

Đặt $\quad u = \sqrt[3]{x}$; $v = \sqrt{5-x}$ ta thu được $\begin{cases} u + v \leq 3 & (1)\\ u^3 + v^2 = 5 & (2)\end{cases}$

(1) $\Leftrightarrow u \leq 3 - v \Leftrightarrow u^3 \leq 27 - 27v + 9v^2 - v^3$
(2) $\Leftrightarrow u^3 = 5 - v^2$, do đó ta có $5 - v^2 \leq 27 - 27v + 9v^2 - v^3$
$\Leftrightarrow v^3 - 10v^2 + 27v - 22 \leq 0 \Leftrightarrow (v-2)(v^2 - 8v + 11) \leq 0$
Thu được $v \leq 4 - \sqrt{5}, 2 \leq v \leq 4 + \sqrt{5}$
*) Với $v \leq 4 - \sqrt{5}$ ta có $\sqrt{5-x} \leq 4 - \sqrt{5}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \leq \sqrt{5}\\ 5 - x \leq (4-\sqrt{5})^2\end{cases} \Leftrightarrow (\sqrt{5}-1)^3 \leq x \leq 5.$$

*) Với $2 \leq v \leq 4+\sqrt{5}$ ta có $2 \leq \sqrt{5-x} \leq 4+\sqrt{5} \Leftrightarrow -(1+\sqrt{5})^3 \leq x \leq 1.$

Từ đó thu được đáp số

$$\left[\begin{array}{l} -(1+\sqrt{5})^3 \leqslant x \leqslant 1 \\ (\sqrt{5}-1)^3 \leqslant x \leqslant 5. \end{array}\right.$$

<u>**Nhận xét 5.**</u> Khi lập phương hai vế của phương trình dạng $\sqrt[3]{f}+\sqrt[3]{g}=\phi$ chúng ta lưu ý hằng đẳng thức:

$$\begin{aligned} &\phi^3 = f+g+3\sqrt[3]{f.g}(\sqrt[3]{f}+\sqrt[3]{g}) \\ \Leftrightarrow\ &\phi^3 = f+g+3\sqrt[3]{f\cdot g}\cdot\phi. \end{aligned}$$

Ví dụ 8. Giải phương trình

$$\boxed{\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x-16}=\sqrt[3]{x-8}.}$$

Giải

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow 2x-16+3\sqrt[3]{x(x-16)}(\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x-16}) = x-8 \\ &\Leftrightarrow 3\sqrt[3]{x(x-16)(x-8)} = -(x-8) \\ &\Leftrightarrow 27x(x-16)(x-8) = -(x-8)^3 \\ &\Leftrightarrow (x-8)[27x(x-16)+(x-8)^2] = 0 \\ &\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-8=0, \\ 7x^2-122x+18=0. \end{array}\right. \end{aligned}$$

Giải $\quad x-8=0 \Leftrightarrow x=8$

Giải $\quad 7x^2-122x+18=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{56\pm\sqrt{3010}}{7}.$

Đáp số $\quad x=8; x=\dfrac{56\pm\sqrt{3010}}{7}.$

Ví dụ 9. Giải phương trình

$$\boxed{\sqrt[3]{x-1}+\sqrt[3]{x+1}=x\sqrt[3]{2}.}$$

Giải

Phương trình tương đương với

$$2x+3\sqrt[3]{x^2-1}\cdot(\sqrt[3]{x-1}+\sqrt[3]{x+1}) = 2x^3$$

$$\Leftrightarrow 2x+3\sqrt[3]{x^2-1}\cdot x\sqrt[3]{2} = 2x^3.$$

Ta có $x = 0$ là nghiệm.

Giải $3\sqrt[3]{2x^2 - 2} = 2(x^2 - 1) \Leftrightarrow 54(x^2 - 1) = 8(x^2 - 1) \Leftrightarrow x = \pm 1$
Đáp số $x = 0;\ x = \pm 1.$

Ví dụ 10. Giải phương trình

$$\boxed{\sqrt[3]{2x^3 - 1} + \sqrt[3]{1 - x^3} = x.}$$

Giải

Phương trình tương đương với

$$x^3 + 3\sqrt[3]{(2x^3 - 1)(1 - x^3)}\left(\sqrt[3]{2x^3 - 1} + \sqrt[3]{1 - x^3}\right) = x^3$$

$$\Leftrightarrow 3x\sqrt[3]{(2x^3 - 1)(1 - x^3)} = 0.$$

Đáp số $x = 0,\ x = 1,\ x = \dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}.$

Nhận xét 6. Sử dụng đẳng thức liên hợp vào việc giải phương trình có chứa căn bậc hai.

Ví dụ 11. Giải phương trình

$$\boxed{\sqrt{x^2 - x + 1} + \sqrt{x^2 + x + 1} = 2.}$$

Giải

Nhân liên hợp phương trình đã cho ta nhận được

$$\frac{2x}{\sqrt{x^2 + x + 1} - \sqrt{x^2 - x + 1}} = 2 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + x + 1} - \sqrt{x^2 - x + 1} = x$$

Ta thu được

$$\begin{cases} \sqrt{x^2 + x + 1} + \sqrt{x^2 - x + 1} = 2, \\ \sqrt{x^2 + x + 1} - \sqrt{x^2 - x + 1} = x. \end{cases}$$

Suy ra

$$2\sqrt{x^2 + x + 1} = x + 2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geqslant -2 \\ 4x^2 + 4x + 4 = x^2 + 4x + 4 \end{cases} \Leftrightarrow x = 0.$$

Đáp số $x = 0.$

Ví dụ 12. Giải phương trình

$$\boxed{\sqrt{2x^2 + x + 9} + \sqrt{2x^2 - x + 1} = x + 4.}$$

Giải

Nhân liên hợp ta thu được

$$\frac{2x + 8}{\sqrt{2x^2 + x + 9} - \sqrt{2x^2 - x + 1}} = x + 4$$

Ta có

$$\begin{cases} \sqrt{2x^2 + x + 9} - \sqrt{2x^2 - x + 1} = 2, \\ \sqrt{2x^2 + x + 9} + \sqrt{2x^2 - x + 1} = x + 4. \end{cases}$$

Suy ra

$$2\sqrt{2x^2 + 9 + x} = x + 6$$

$$\Leftrightarrow \quad 4(2x^2 + x + 9) = x^2 + 12x + 36$$

$$\Leftrightarrow \quad 7x^2 - 8x = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ hoặc } x = \frac{8}{7}.$$

Đáp số $\begin{cases} x = 0, \\ x = \dfrac{8}{7}. \end{cases}$

BÀI TẬP VÀ HƯỚNG DẪN

1. Giải phương trình

$$\boxed{\sqrt{2x^2 + x + 1} + \sqrt{x^2 - x + 1} = 3x.}$$

Hướng dẫn

Từ phương trình suy ra $x > 0$ .Chia hai vế cho $x > 0$ ta có

$$\sqrt{\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} + 2} + \sqrt{\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} + 1} = 3.$$

Đặt $t = \dfrac{1}{x}$ thu được

$$\sqrt{t^2+t+2} + \sqrt{t^2-t+1} = 3$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{t^2+t+2} - \sqrt{t^2-t+1} = \frac{2t+1}{3}.$$

Ta có $\begin{cases} \sqrt{t^2+t+2} + \sqrt{t^2-t+1} = 3, \\ \sqrt{t^2+t+2} - \sqrt{t^2-t+1} = \dfrac{2t+1}{3}. \end{cases}$

Cộng vế với vế hai phương trình của hệ trên ta có

$$2\sqrt{t^2+t+2} = \frac{2t+10}{3}$$

$$\Leftrightarrow 36(t^2+t+2) = 4t^2 + 40t + 100$$

$$\Leftrightarrow 32t^2 - 4t - 28 = 0 \Leftrightarrow t = 1 \text{ hoặc } t = -\frac{7}{8}.$$

2. Giải phương trình

$$\boxed{\sqrt{x^2+x+1} = 2x + \sqrt{x^2-x+1}.}$$

Hướng dẫn

Phương trình đã cho tương đương với

$$\sqrt{x^2+x+1} - \sqrt{x^2-x+1} = 2x \quad (x = 0 \text{ là nghiệm })$$

Ta có

$$\sqrt{x^2+x+1} + \sqrt{x^2-x+1} = 1 \quad (\text{ Nhân liên hợp})$$

Suy ra $2\sqrt{x^2+x+1} = 2x+1.$

3. Giải phương trình

$$\boxed{\sqrt[3]{x+1} + \sqrt[3]{x+3} = \sqrt[3]{x+2}.}$$

Hướng dẫn

Phương trình đã cho tương đương với

$$\Leftrightarrow 2x + 4 + 3\sqrt[3]{(x+1)(x+3)}\left[\sqrt[3]{x+1} + \sqrt[3]{x+3}\right] = x+2$$

$$\Leftrightarrow 3\sqrt[3]{(x+1)(x+3)(x+2)} = -(x+2).$$

4. Giải phương trình

$$\boxed{\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x+1} = 2x + 1.}$$

Hướng dẫn
Phương trình đã cho tương đương với

$$2x + 1 + 3\sqrt[3]{x(x+1)}\left[\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x+1}\right] = (2x+1)^3$$
$$\Leftrightarrow (2x+1) + 3\sqrt[3]{x(x+1)} \cdot (2x+1) = (2x+1)^3$$

$x = -\dfrac{1}{2}$ là nghiệm.
Thu được

$$1 + 3\sqrt[3]{x(x+1)} = (2x+1)^2$$
$$\Leftrightarrow 3\sqrt[3]{x(x+1)} = 4x(x+1).$$

5. Giải phương trình

$$\boxed{\sqrt[3]{x^3+1} + \sqrt[3]{x^3-1} = x\sqrt[3]{2}.}$$

Hướng dẫn
Phương trình đã cho tương đương với

$$2x^3 + 3\sqrt[3]{x^6-1} \cdot x\sqrt[3]{2} = 2x^3 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0, \\ x = \pm 1. \end{cases}$$

6. Giải phương trình

$$\boxed{4x^2 - x + 4 = 3x\sqrt{x + \frac{1}{x}}.}$$

Hướng dẫn
Chia hai vế cho $x \neq 0$ ta thu được

$$4\left(x + \frac{1}{x}\right) - 1 = 3\sqrt{x + \frac{1}{x}}, \quad \text{đặt } t = \sqrt{x + \frac{1}{x}}.$$

7. Giải phương trình

$$\boxed{\sqrt[4]{x^2+x+1} + \sqrt[4]{x^2-x+1} = 2\sqrt[4]{x}.}$$

Hướng dẫn
Chia cả hai vế cho $\sqrt[4]{x}$ ta được

$$\sqrt[4]{1+x+\frac{1}{x}}+\sqrt[4]{x+\frac{1}{x}-1}=2.$$

Đặt $t=x+\dfrac{1}{x}$.

8. Giải phương trình

$$\boxed{4x^2-3x-4=\sqrt[3]{x^4-x^2}.}$$

Hướng dẫn
Chia hai vế cho $x\neq 0$ ta được

$$4(x-\frac{1}{x})-\sqrt[3]{x-\frac{1}{x}}=3,\quad \text{đặt } t=\sqrt[3]{x-\frac{1}{x}}.$$

9. Giải phương trình

$$\boxed{\sqrt{4x+5}+\sqrt{3x+1}=\sqrt{2x+7}+\sqrt{x+3}.}$$

Hướng dẫn
Phương trình đã cho tương đương với

$$\sqrt{4x+5}-\sqrt{x+3}=\sqrt{2x+7}-\sqrt{3x+1}$$

Bình phương hai vế ta được

$$\sqrt{(4x+5)(x+3)}=\sqrt{(2x+7)(3x+1)}.$$

10. Giải phương trình

$$\boxed{\sqrt{2x^2+x+1}=x+\sqrt{x^2+x-1}.}$$

Hướng dẫn
Bình phương hai vế ta được $2=2x\sqrt{x^2+x-1}$ suy ra $\Leftrightarrow x>0$
và $\Leftrightarrow\ 1=x^2(x^2+x-1)$
$\Leftrightarrow (x-1)[(x^2+1)(x+1)+x^2]=0.$
Đáp số $x=1.$

11. Giải phương trình

$$\boxed{\sqrt{x+3}-\sqrt{1-x}=x+1.}$$

Hướng dẫn
Nhân liên hợp ta được

$$\frac{2x+2}{\sqrt{x+3}+\sqrt{1-x}}=x+1$$

Ta có $\begin{cases}\sqrt{x+3}+\sqrt{1-x}=2\\ \sqrt{x+3}-\sqrt{1-x}=x+1.\end{cases}$
Suy ra

$$2\sqrt{x+3}=x+3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=-3,\\ x=1.\end{array}\right.$$

12. Giải phương trình

$$\boxed{\sqrt{x^2-1}+\sqrt{x^2+x-2}=\sqrt{2x^2+x-3}.}$$

Hướng dẫn
Phương trình đã cho tương đương với

$$\sqrt{(x-1)(x+1)}+\sqrt{(x-1)(x+2)}=\sqrt{(x-1)(2x+3)}$$

Điều kiện $x\geqslant 1\,, x\leq -2$
Xét trường hợp $x\geqslant 1$, ta có $x=1$ là nghiệm và thu được

$$\sqrt{x+1}+\sqrt{x+2}=\sqrt{2x+3}$$

$$\Leftrightarrow\ 2\sqrt{(x+1)(x+2)}=0\Leftrightarrow x=-2\quad \text{(loại)}.$$

Xét trường hợp $x\leqslant -2$ ta có

$$\sqrt{-(x+1)}+\sqrt{-(x+2)}=\sqrt{-(2x+3)}$$

$$\Leftrightarrow\ 2\sqrt{(x+1)(x+2)}=0\Leftrightarrow x=-2$$

Đáp số $x=1;\ \ x=-2.$

13. Giải phương trình

$$\boxed{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}+\sqrt{x^2+x}=1.}$$

Hướng dẫn
Điều kiện $x \geqslant 0$.
$f(x) = \sqrt{x} + \sqrt{x+1} + \sqrt{x^2+x}$ là hàm đồng biến khi $x \geqslant 0$. Suy ra $x = 0$ là nghiệm duy nhất.

14. Giải phương trình

$$\boxed{\sqrt[3]{1+7x} + \sqrt[3]{2x-1} = 2\sqrt[3]{x}.}$$

Hướng dẫn
Chia hai vế cho $\sqrt{3}x \neq 0$ ta có

$$\sqrt[3]{7+\frac{1}{x}} + \sqrt[3]{2-\frac{1}{x}} = 2$$

Đặt $u = \sqrt[3]{7+\frac{1}{x}}$, $v = \sqrt[3]{2-\frac{1}{x}}$ ta thu được $\begin{cases} u+v=2, \\ u^3+v^3=9. \end{cases}$