

MỤC LỤC

Chương 1: Phương trình vô tỷ.....	2
1.1. Sử dụng phương trình hệ quả và phương trình tương đương.....	2
1.1.1. Phương pháp nâng lên lũy thừa	2
1.1.2. Phương pháp sử dụng lượng liên hợp	6
1.1.3. Phương pháp khác.....	10
1.2. Phương pháp đặt ẩn phụ	12
1.2.1. Đặt ẩn phụ không hoàn toàn	12
1.2.2. Đặt ẩn phụ đưa về hệ phương trình.....	13
1.2.3. Đặt ẩn phụ bằng biến số lượng giác.....	17
1.2.4. Một số dạng khác	19
1.3. Phương pháp đánh giá	21
1.4. Phương pháp hàm số	22
Chương 2: Bất phương trình vô tỷ.....	25
2.1. Sử dụng phép biến đổi tương đương.....	25
2.1.1. Áp dụng các định lí về biến đổi tương đương để giải BPT vô tỷ	25
2.1.2. Phương pháp sử dụng liên hợp	29
2.2. Phương pháp đặt ẩn phụ	31
2.3. Phương pháp hàm số	33
2.4. Phương pháp đánh giá	35
Phụ lục: Một bài báo hay	36
Tài liệu tham khảo	39

Chương 1: CÁC PHƯƠNG PHÁP GIẢI PHƯƠNG TRÌNH VÔ TỶ

1.1. Sử dụng phương trình hệ quả và phương trình tương đương

1.1.1 Phương pháp nâng lên lũy thừa

Đây là phương pháp **quan trọng**, trong nhiều bài toán ta phải thực hiện việc nâng lên lũy thừa sau đó mới có thể áp dụng các phương pháp khác, và sau khi thực hiện việc biến đổi để đưa về phương trình vô tỷ cơ bản thì ta lại phải thực hiện phương pháp này để hoàn tất được việc giải phương trình. Nhiều bạn cho rằng đây là điều "tầm thường" và không chú ý rèn luyện kỹ năng, dẫn đến việc khi thực nghiệm giải toán lại mắc phải sai lầm hết sức đáng tiếc và... ngớ ngẩn!

a) Áp dụng các định lý về biến đổi tương đương để giải phương trình cơ bản:

Định lý 1: $\sqrt[2k+1]{f(x)} = g(x) \Leftrightarrow f(x) = g^{2k+1}(x)$

Lưu ý: Trong điều kiện để phương trình có nghĩa không cần đặt điều kiện để biểu thức trong căn là $f(x) \geq 0$, vì đây là căn bậc lẻ.

Ví dụ: Giải phương trình: $\sqrt[3]{2x^3 + 6x^2 + 6x + 3} = x + 1$ (1)

Trên thực tế khi giải toán người mới làm quen với phương trình vô tỷ hay có thói quen rất máy móc là cứ nhìn ở đâu có căn là đặt điều kiện cho biểu thức dưới căn không âm không cần biết đó là căn bậc chẵn hay lẻ! Điều này là sai về bản chất, đã làm thu hẹp điều kiện (mất hẳn trường hợp biểu thức dưới căn nhỏ hơn 0) đây là chưa kể đến việc giải điều kiện này đôi khi rất khó khăn (như ở ví dụ trên).

LG:

Lập phương 2 vế của phương trình: $(1) \Leftrightarrow 2x^3 + 6x^2 + 6x + 3 = (x+1)^3$

Khai triển, chuyển vế rút gọn được pt tương đương: $x^3 + 3x^2 + 3x + 2 = 0$

Nhẩm được nghiệm $x = -2$ phân tích thành tích (sử dụng lược đồ Hoocne hoặc pp phân tích đa thức thành nhân tử):

$$\Leftrightarrow (x+2)(x^2+x+1)=0$$

Như vậy $x = -2$ là nghiệm duy nhất của phương trình (rõ ràng nếu đặt điều kiện biểu thức dưới căn không âm sẽ làm mất nghiệm này).

Định lí 2: $\sqrt[2k+1]{f(x)} = \sqrt[2k+1]{g(x)} \Leftrightarrow f(x) = g(x)$

Ví dụ: Giải phương trình: $\sqrt[3]{2x^2+1} = \sqrt[3]{3x^2-1}$ (*)

LG: (*) $\Leftrightarrow 2x^2+1 = 3x^2-1 \Leftrightarrow x^2-2=0 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{2}$

Định lí 3: $\sqrt[2k]{f(x)} = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g^{2k}(x) \\ g(x) \geq 0 \end{cases}$

Lưu ý: không cần đặt điều kiện $f(x) \geq 0$, vì $f(x) = g^{2k}(x)$ đã bao hàm cả điều kiện ấy.

Ví dụ: Giải phương trình: $\sqrt{8x^2-6x+1} - 4x+1 = 0$ (3)

LG: (3) $\Leftrightarrow \begin{cases} 8x^2-6x+1 = (4x-1)^2 \\ 4x-1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8x^2-2x=0 \\ x \geq \frac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{1}{4}$

Định lí 4: $\sqrt[2k]{f(x)} = \sqrt[2k]{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x) \\ f(x) \geq 0 \end{cases}$

Lưu ý: Do vai trò của $f(x)$ và $g(x)$ trong phương trình là như nhau (tức là thay đổi vị trí cho nhau thì phương trình không thay đổi (hay được phương trình tương đương)) do đó điều kiện $f(x) \geq 0$ ta có thể thay bằng điều kiện $g(x) \geq 0$. Chính vì vậy trong quá trình giải toán ta sẽ lựa chọn biểu thức dưới căn nào đơn giản hơn để đặt điều kiện.

Ví dụ: Giải phương trình: $\sqrt{x^2+2x+4} = \sqrt{2-x}$ (4)

LG: (4) $\begin{cases} x^2+2x+4 = 2-x \\ 2-x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = -2 \\ x \leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = -2 \end{cases}$

b) Các dạng phương trình khác:

- Với phương trình dạng: $\sqrt{A} + \sqrt{B} = \sqrt{C} + \sqrt{D}$, ta thường bình phương hai vế (tuy nhiên điều này đôi khi vẫn sẽ gặp khó khăn).

- Với phương trình dạng: $\sqrt[3]{A} + \sqrt[3]{B} = \sqrt[3]{C}$, ta thường thực hiện lập phương hai vế của phương trình đưa về dạng: $A + B + 3\sqrt[3]{A.B}(\sqrt[3]{A} + \sqrt[3]{B}) = C$ và ta sử dụng phép thế: $\sqrt[3]{A} + \sqrt[3]{B} = \sqrt[3]{C}$ được phương trình: $A + B + 3\sqrt[3]{A.B.C} = C$. Việc thế $\sqrt[3]{A} + \sqrt[3]{B} = \sqrt[3]{C}$ chỉ cho ta phương trình hệ quả, do đó việc thử lại nghiệm vào phương trình xuất phát là cần thiết để loại nghiệm ngoại lai.

Ví dụ 1: Giải phương trình: $\sqrt{x+1} + \sqrt{x+10} = \sqrt{x+2} + \sqrt{x+5}$ (1)

LG: Đk: $x \geq -1$

Bình phương 2 vế và rút gọn ta được pt tương đương

$$2 + \sqrt{(x+1)(x+10)} = \sqrt{(x+2)(x+5)}$$

$$\Leftrightarrow 2 + \sqrt{x^2 + 11x + 10} = \sqrt{x^2 + 7x + 10}$$

Bình phương 2 vế và rút gọn một lần nữa

$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2 + 11x + 10} = -1 - x$$

Đây là pt cơ bản dạng 3, giải pt này ta được nghiệm $x = -1$

Ví dụ 2: Giải phương trình: $\sqrt[3]{x+1} + \sqrt[3]{x+2} + \sqrt[3]{x+3} = 0$ (2)

$$\text{LG: (2)} \Leftrightarrow \sqrt[3]{x+1} + \sqrt[3]{x+2} = -\sqrt[3]{x+3}$$

Lập phương 2 vế ta được pt tương đương

$$x+2 + \sqrt[3]{(x+1)(x+2)} \left(\sqrt[3]{x+1} + \sqrt[3]{x+2} \right) = 0$$

Sử dụng phép thế $\sqrt[3]{x+1} + \sqrt[3]{x+2} = -\sqrt[3]{x+3}$ ta được phương trình hệ quả, tức là:

$$\Rightarrow x+2 = \sqrt[3]{(x+1)(x+2)(x+3)}$$

Lập phương 2 vế giải phương trình này ta được nghiệm $x = -2$

Thử lại, thay $x = -2$ vào phương trình (1) thấy thỏa mãn

Vậy $x = -2$ là nghiệm của phương trình.

Ví dụ 3: Giải phương trình: $\sqrt{x+3} + \sqrt{3x+1} = 2\sqrt{x} + \sqrt{2x+2}$ (3)

Phân tích: Nếu ta bình phương 2 vế không âm của phương trình ta được:

$$1 + \sqrt{(x+3)(3x+1)} = x + 2\sqrt{x(2x+1)}$$

Việc giải phương trình này sẽ gây cho ta đôi chút khó khăn! Vấn đề nằm ở chỗ "khu vực" bên ngoài căn có chứa ẩn x, nếu đem bình phương lên thì chắc chắn sẽ rất phức tạp. Vậy làm thế nào để bình phương mà triệt tiêu hết x bên ngoài dấu căn?!

Tiếp tục quan sát phương trình ta nhận ra một điều rất "may mắn" ở các biểu thức dưới dấu căn đó là $(x+3) + (2^2 \cdot x) = (3x+1) + (2x+2)$ tức là nếu đưa $\sqrt{x+3}$ và $2\sqrt{x}$ về cùng một vế còn $\sqrt{3x+1}$ và $\sqrt{2x+2}$ về cùng một vế, sau đó bình phương lên thì chắc chắn ẩn x ở phần bên ngoài dấu căn sẽ bị triệt tiêu! Từ nhận xét đó ta có lời giải sau:

LG: Đk: $x \geq 0$.

$$(3) \Leftrightarrow \sqrt{3x+1} - \sqrt{2x+2} = \sqrt{4x} - \sqrt{x+3}$$

Bình phương hai vế và thực hiện rút gọn:

$$\Rightarrow \sqrt{6x^2 + 8x + 2} = \sqrt{4x^2 + 12x} (*) \Leftrightarrow x = 1$$

Chú ý rằng (*) chỉ là phương trình hệ quả, do đó cần phải thử lại nghiệm ở phương trình xuất phát.

Thử lại $x=1$ (t/m)

Ví dụ 4: Giải phương trình: $\sqrt{\frac{x^3+1}{x+3}} + \sqrt{x+1} = \sqrt{x^2-x+1} + \sqrt{x+3}$

LG: Đk : $x \geq -1$

Cũng như ví dụ trên, việc bình phương lên có vẻ không khả thi, nhưng ta lại nhận thấy một điều may mắn khác đó là:

$$\sqrt{\frac{x^3+1}{x+3}} \cdot \sqrt{x+3} = \sqrt{x^2-x+1} \cdot \sqrt{x+1}$$

Điều này có nghĩa là nếu chuyển $\sqrt{\frac{x^3+1}{x+3}}$ và $\sqrt{x+3}$ về một vế, còn $\sqrt{x+1}$ và $\sqrt{x^2-x+1}$ về một vế thì khi bình phương hai vế của phương trình ta sẽ khử được hoàn toàn dấu căn với chỉ một lần bình phương! Từ đó ta có lời giải như sau :

$$(2) \Leftrightarrow \sqrt{\frac{x^3+1}{x+3}} - \sqrt{x+3} = \sqrt{x^2-x+1} - \sqrt{x+1}$$

Bình phương hai vế:

$$\Rightarrow \frac{x^3+1}{x+3} = x^2 - x - 1 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 - \sqrt{3} \\ x = 1 + \sqrt{3} \end{cases}$$

Thử lại : $x = 1 - \sqrt{3}, x = 1 + \sqrt{3}$ là nghiệm

Qua VD3 và VD4 ta có nhận xét sau:

Nếu pt dạng: $\sqrt{f(x)} + \sqrt{g(x)} = \sqrt{h(x)} + \sqrt{k(x)}$ t/m: $f(x) + h(x) = g(x) + k(x)$ hoặc $f(x).h(x) = k(x).g(x)$, thì biến đổi pt về dạng: $\sqrt{f(x)} - \sqrt{h(x)} = \sqrt{k(x)} - \sqrt{g(x)}$

sau đó bình phương hai vế của phương trình được phương trình hệ quả, giải phương trình hệ quả này và thử lại nghiệm ở phương trình xuất phát.

Lưu ý: Một sai lầm mà người làm hay mắc phải đó là không để ý việc bình phương sau khi chuyển vế chỉ là biến đổi hệ quả, do đó không chú ý thử lại nghiệm, và trong nhiều trường hợp dẫn đến việc bị thừa nghiệm! Với phương trình loại này, bước thử lại là rất quan trọng!

Bài tập đề nghị:

Giải các phương trình sau:

$$1. \sqrt{x^2 + 2x} + \sqrt{2x - 1} = \sqrt{3x^2 + 4x + 1}$$

$$4. \sqrt{x + \sqrt{x + 11}} + \sqrt{x - \sqrt{x + 11}} = 4$$

$$2. \sqrt{3x + 1} - \sqrt{x + 4} = 1$$

$$5. \sqrt[3]{12 - x} + \sqrt[3]{14 + x} = 2$$

$$3. \sqrt{1 - x} = \sqrt{6 - x} - \sqrt{-5 - 2x}$$

$$6. \sqrt[3]{x - 1} + \sqrt[3]{x - 2} = \sqrt[3]{2x - 3}$$

1.1.2 Phương pháp sử dụng lượng liên hợp

Việc nhân một lượng liên hợp vào biểu thức tương ứng với mục đích có thể xử lý được mối liên hệ giữa các biểu thức dưới dấu căn dẫn đến việc giải phương trình trở lên dễ dàng hơn.

Một số công thức cần nhớ về biểu thức liên hợp:

Biểu thức	Biểu thức liên hợp	Tích
$\sqrt{A} \pm \sqrt{B}$	$\sqrt{A} \mp \sqrt{B}$	$A - B$
$\sqrt[3]{A} - \sqrt[3]{B}$	$\sqrt[3]{A^2} - \sqrt[3]{AB} + \sqrt[3]{B^2}$	$A + B$
$\sqrt[3]{A} + \sqrt[3]{B}$	$\sqrt[3]{A^2} + \sqrt[3]{AB} + \sqrt[3]{B^2}$	$A - B$

Lưu ý: 1) Khi nhân vào biểu thức liên hợp, tức là ta đã thực hiện việc nhân vào 2 vế của phương trình với cùng 1 biểu thức, do đó cần **kiểm tra tính khác 0 của biểu thức liên hợp**. Nếu tồn tại x (giá trị của ẩn) để biểu thức ấy bằng 0 thì cần thử lại giá trị ấy vào phương trình, để tránh việc mất nghiệm hoặc thừa nghiệm của phương trình xuất phát, sau đó ta sẽ xét trường hợp khác 0.

2) Thường dự đoán nghiệm sau đó sử dụng lượng liên hợp phù hợp để làm xuất hiện nhân tử chung.

3) Cần để ý khi nhân liên hợp, đưa về phương trình tích hai nhân tử thì rất có thể nhân tử "phức tạp" sẽ vô nghiệm. Do đó khi trước khi "lao vào" giải phần phức tạp này ta cần thử chứng minh xem nó có vô nghiệm không.

Ví dụ 1: Giải phương trình: $(\sqrt{x-1}+1)(\sqrt{x-1}+3x-10)=x-2$ (1)

Phân tích: Quan sát VP của phương trình, và nhân tử $\sqrt{x-1}+1$ ở VT có mối liên hệ gì với nhau?! $(x-1)-1=x-2$ (số 1 rất "lợi hại" bởi $1=1^2=\sqrt{1}$), do đó ta mới nghĩ đến chuyện nhân $\sqrt{x-1}+1$ với biểu thức liên hợp của nó để xuất hiện $(\sqrt{x-1})^2-1^2=x-2$.

Tuy nhiên cần chú ý, khi nhân với biểu thức liên hợp là $\sqrt{x-1}-1$ thì ta cần xét tính bằng 0 của biểu thức này! Từ đó ta có lời giải:

LG: Đk: $x \geq 1$

+) Nếu $\sqrt{x-1}-1=0 \Leftrightarrow x=2$ thế $x=2$ vào (1) ta được $2.(-3)=0$ (vô lý) $\Rightarrow x=2$ không phải là nghiệm của (1)

+) Xét $x \neq 2$ tức là $\sqrt{x-1}-1 \neq 0$ khi đó:

$$(1) \Leftrightarrow (\sqrt{x-1}-1)(\sqrt{x-1}+1)(\sqrt{x-1}+3x-10) = (\sqrt{x-1}-1)(x-2)$$

$$\Leftrightarrow (x-2)(\sqrt{x-1}+3x-10) = (\sqrt{x-1}-1)(x-2)$$

$$\Leftrightarrow (x-2)(3x-9)=0$$

$$\Leftrightarrow x=3 \text{ (do } x \neq 2 \text{)}$$

Lưu ý: Rất nhiều bạn mắc sai lầm khi không lường trước khả năng $\sqrt{x-1}-1=0$ dẫn đến việc bị thừa nghiệm $x=2$.

Ví dụ 2: Giải phương trình: $\sqrt{3x+2}-\sqrt{4x+1}=\frac{x-1}{5}$ (2)

Phân tích: Quan sát hai biểu thức dưới dấu căn ta nhận thấy hiệu của chúng có thừa số $x-1$

Từ đó, ta nghĩ đến việc khử dấu căn bằng cách nhân $\sqrt{3x+2}-\sqrt{4x+1}$ với biểu thức liên hợp của nó để xuất hiện nhân tử

$$(\sqrt{3x+2})^2 - (\sqrt{4x+1})^2 = (3x+2) - (4x+1) = -(x-1)$$

Từ đó ta có lời giải:

LG: Đk: $x \geq -1/4$

Rõ ràng $\sqrt{3x+2} + \sqrt{4x+1} \neq 0$ (vì nếu bằng 0 sẽ nhận ra ngay điều vô lý) do đó

$$(2) \Leftrightarrow \frac{-(x-1)}{\sqrt{3x+2} + \sqrt{4x+1}} = \frac{x-1}{5} \Leftrightarrow (x-1) \left(\frac{1}{\sqrt{3x+2} + \sqrt{4x+1}} + \frac{1}{5} \right) = 0$$

Rõ ràng $\frac{1}{\sqrt{3x+2} + \sqrt{4x+1}} + \frac{1}{5} > 0$ (Nhiều bạn không để ý vẫn tiến hành quy đồng sau đó

"tìm cách giải" bình thường!)

Do đó nghiệm của phương trình là $x = 1$.

Ví dụ 3: Giải phương trình sau: $\sqrt{8x+1} + \sqrt{3x+5} = \sqrt{7x+4} + \sqrt{2x-2}$ (3)

Phân tích: Ta có thể chuyển về và bình phương tuy nhiên cách này khá phức tạp và dễ nhầm lẫn, nếu tìm tòi và chú ý một chút thì ta sẽ thấy một đặc điểm khá thú vị! Quan sát biểu thức dưới dấu căn và nhận thấy $(8x+1) - (7x+4)$ và $(3x+5) - (2x-2)$ có nhân tử chung là $x-3$, do đó ta mới nghĩ đến việc nhóm $\sqrt{8x+1}$ với $\sqrt{7x+4}$, và $\sqrt{3x+5}$ với

$\sqrt{2x-2}$ rồi nhân với biểu thức liên hợp tương ứng để có được $(\sqrt{8x+1})^2 - (\sqrt{7x+4})^2$ và $(\sqrt{3x+5})^2 - (\sqrt{2x-2})^2$. Từ đó ta có lời giải:

$$(3) \Leftrightarrow \sqrt{8x+1} - \sqrt{7x+4} + \sqrt{3x+5} - \sqrt{2x-2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x-3}{\sqrt{8x+1} + \sqrt{7x+4}} + \frac{x-3}{\sqrt{3x+5} + \sqrt{2x-2}} = 0 \Leftrightarrow x = 3$$

Ví dụ 4: Giải phương trình sau: $x^2 + 9x + 20 = 2\sqrt{3x+10}$ (4)

Khi mới nhìn bài toán này ta sẽ chẳng có chút liên tưởng nào đến chuyện nhân với biểu thức liên hợp bởi nó chỉ có một dấu căn...

Nhưng liên tưởng ấy sẽ xuất hiện khi ta nhắm được một nghiệm của phương trình, công việc nhiều khi chỉ là việc vô ích!

Việc đầu tiên là nhắm nghiệm, nhắm như thế nào cho hợp lý? Người viết xin được gợi ý một cách mà người viết hay sử dụng. Ta sẽ dựa vào biểu thức căn, thử những giá trị sao cho giá trị của biểu thức căn "đẹp" tức là giá trị của biểu thức dưới dấu căn là các số chính phương 1, 4, 9... sau đó rút ra giá trị x thế vào phương trình thử lại! (tất nhiên, khi đã quen thì các thao tác trên sẽ được thực hiện một cách nhanh chóng!)

Đối với bài toán trên biểu thức dưới dấu căn là $f(x) = 3x + 10$ với $f(x) = 1 \Rightarrow x = -3$ thử lại thấy $x = -3$ là một nghiệm của phương trình!

Sau khi nhằm được một nghiệm, điều chúng ta nghĩ đến là chắc chắn có thể đưa pt trình về dạng tích trong đó có một nhân tử là $x + 3$, như vậy phải "xào nấu" biểu thức căn kiểu gì đây để nó thành tích mà có một nhân tử là $x + 3$, ta mới nghĩ đến chuyện ghép biểu thức căn với phần tử nào đó rồi nhân với biểu thức liên hợp để tiện xử lý phần dưới dấu căn! Ta thực hiện qua trình phân tích như sau: Biểu thức căn là $2\sqrt{3x+10}$ như

vậy cần ghép nó với phần tử $2b$ nào đó được $2(\sqrt{3x+10}-b) = 2\frac{3x+10-b^2}{\sqrt{3x+10}+b}$ ta sẽ chọn b

sao cho $3x + 10 - b^2$ có dạng $k(x+3)$ (vì mục tiêu của ta là đang tìm kiếm nhân tử $x+3$) cụ thể hơn là $3(x+3)$ từ đó ta sẽ chọn được $b = 1$ tức là sẽ ghép biểu thức căn với 2 .

LG: Đk: $x \geq -\frac{10}{3}$

$$(4) \Leftrightarrow x^2 + 9x + 18 = 2\sqrt{3x+10} - 2$$

(Nhận xét: rõ ràng $\sqrt{3x+10} + 1 > 0$)

$$\Leftrightarrow (x+3)(x+6) = \frac{2(3x+10-1)}{\sqrt{3x+10}+1} \Leftrightarrow (x+3)\left(x+6 - \frac{6}{\sqrt{3x+10}+1}\right) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \\ x+6 = \frac{6}{\sqrt{3x+10}+1} (*) \end{cases}$$

Vấn đề là ở phương trình (*). Đến đây, có lẽ đòi hỏi người làm cần có kĩ năng tốt mới có thể nhìn nhận ra vấn đề.

Đây cũng là một điểm thú vị khi giải toán, nếu lúc nào cũng dùng đến thuật toán máy móc mà không có sự sáng tạo thì thật nhàm chán!

Giải phương trình (*):

+) Với $x > -3$ thì $\frac{6}{\sqrt{3x+10}+1} < 3$ và $x+6 > 3$ nên (*) vô nghiệm.

+) Với $-10/3 < x < -3$ thì $\frac{6}{\sqrt{3x+10}+1} > 3$ và $x+6 < 3$ nên (*) vô nghiệm.

Vậy nghiệm của phương trình là $x = -3$

Bài tập đề nghị:

Giải các phương trình sau:

$$1. \sqrt{2x-3} - \sqrt{x} = 2x-6$$

$$4. \sqrt{2x+4} - 2\sqrt{2-x} = \frac{6x-4}{\sqrt{x^2+4}}$$

$$2. \sqrt{x^2+12} + 5 = 3x + \sqrt{x^2+5}$$

$$5. \text{(T2/243)} \sqrt{4x^2+5x+1} - 2\sqrt{x^2-x+1} = 9x-3$$

$$3. 2x^2 - 11x + 21 = \sqrt[3]{4x-4}$$

1.1.3. Phương pháp khác.

a) Biến đổi thành phương trình tích.

Ta đã quen thuộc với phương trình dạng tích, chẳng hạn $(u-1)(v-1)=0$. Nhưng vấn đề sẽ trở lên khó khăn hơn nếu, biểu thức vế trái của phương trình được khai triển thành $uv-(u+v)+1$ và sẽ càng khó khăn hơn nữa nếu u, v được thay bởi các biểu thức chứa căn! Chẳng hạn $u = \sqrt[3]{x+1}$ và $v = \sqrt[3]{x+2}$, khi đó phương trình sẽ trở thành:

$$\sqrt[3]{x+1} + \sqrt[3]{x+2} = 1 + \sqrt[3]{x^2+3x+2}$$

Trên cơ sở đó, ta mới tìm cách nhận dạng một phương trình vô tỷ để đưa về phương trình tích.

Dạng 1: $u+v=1+uv \Leftrightarrow (u-1)(v-1)=0$

Ví dụ: Giải phương trình: $\sqrt[3]{x+1} + \sqrt[3]{x+2} = 1 + \sqrt[3]{x^2+3x+2}$ (*)

LG: Vấn đề sẽ được "lật tẩy" khi ta biến đổi phương trình như sau:

$$(*) \Leftrightarrow \sqrt[3]{x+1} + \sqrt[3]{x+2} = 1 + \sqrt[3]{(x+1)(x+2)} \Leftrightarrow \sqrt[3]{x+1} + \sqrt[3]{x+2} = 1 + \sqrt[3]{x+1} \cdot \sqrt[3]{x+2}$$

Khi viết được như trên ta sẽ nhận ra ngay được đâu là u và đâu là v trong dạng tổng quát và phân tích thành tích ta được phương trình tương đương

$$\Leftrightarrow (\sqrt[3]{x+1} - 1)(\sqrt[3]{x+2} - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -1 \end{cases}$$

Dạng 2: $au+bv=ab+uv \Leftrightarrow (u-b)(v-a)=0$

Ví dụ: Giải phương trình: $\sqrt{x+3} + 2x\sqrt{x+1} = 2x + \sqrt{x^2+4x+3}$ (2)

LG: Đk: $x \geq -1$

$$(2) \Leftrightarrow \sqrt{x+3} + 2x\sqrt{x+1} = 2x + \sqrt{(x+1)(x+3)} \Leftrightarrow (\sqrt{x+3} - 2x) + [2x\sqrt{x+1} - \sqrt{(x+1)(x+3)}] = 0$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{x+3} - 2x) + \sqrt{x+1}(2x - \sqrt{x+3}) = 0 \Leftrightarrow (\sqrt{x+1} - 1)(\sqrt{x+3} - 2x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases}$$

Dạng 3: $a^3 - b^3 \Leftrightarrow (a-b)(a^2+ab+b^2)=0 \Leftrightarrow a=b$

Lưu ý rằng $a^2+ab+b^2 > 0$ với mọi $a \neq 0$ hoặc $b \neq 0$.

Ví dụ: Giải phương trình: $1 + 3\sqrt[3]{x^2(x+2)} = 3\sqrt[3]{x(x+2)^2}$ (3)

LG: Quan sát hai biểu thức $3\sqrt[3]{x^2(x+2)}$ và $3\sqrt[3]{x(x+2)^2}$ có dạng $3u^2v$ và $3uv^2$ khiến ta liên tưởng đến khai triển hằng đẳng thức $(u+v)^3$ hoặc $(u-v)^3$ do đó ta mới nghĩ đến việc thêm bớt kiểu gì đấy để có thể sử dụng được hằng đẳng thức trên.

$$(3) \Leftrightarrow \left[(x+2) - 3\sqrt[3]{x(x+2)^2} + 3\sqrt[3]{x^2(x+2)} - x \right] - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt[3]{x+2} - \sqrt[3]{x} \right)^3 - 1 = 0 \Leftrightarrow \sqrt[3]{x+2} - \sqrt[3]{x} - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-27 \pm 6\sqrt{21}}{27}$$

Việc phân dạng như trên quả thật như việc đem muối bỏ bể, vì với tư duy như trên ta còn có thể tạo ra nhiều phương trình kiểu khác, khó hơn để luyện tập (cứ xuất phát từ một phương trình tích và thế bởi các biểu thức căn) Tuy nhiên, để có được một đề toán hay và đẹp cần phải có sự đầu tư về thời gian cũng như kiến thức! Mặc dù vậy một số dạng như trên (cũng là những dạng hay xuất hiện) cũng như là một số ví dụ để ta có thể hình dung được cách thức nhìn nhận phương trình vô tỷ kiểu này (biến đổi thành phương trình tích)!

b) Trị tuyệt đối hoá.

Trong nhiều trường hợp ta có thể biến đổi biểu thức dưới dấu căn thành lũy thừa bậc bằng bậc của dấu căn ấy! Khi đó nếu là căn bậc chẵn (thường là căn bậc 2 thì ta sẽ đưa về phương trình chứa dấu giá trị tuyệt đối.

Ta xét ví dụ sau:

Ví dụ: Giải phương trình: $\sqrt{x+2+2\sqrt{x+1}} + \sqrt{x+2-2\sqrt{x+1}} = \frac{x+5}{2}$ (*)

LG:

$$(*) \Leftrightarrow \sqrt{(x+1)+2\sqrt{x+1}+1} + \sqrt{(x+1)-2\sqrt{x+1}+1} = \frac{x+5}{2}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(\sqrt{x+1}+1)^2} + \sqrt{(\sqrt{x+1}-1)^2} = \frac{x+5}{2} \Leftrightarrow \sqrt{x+1}+1 + |\sqrt{x+1}-1| = \frac{x+5}{2}$$

TH1: $x \geq 0$ phương trình có nghiệm $x=3$

TH2: $-1 \leq x \leq 0$ phương trình có nghiệm $x = -1$

Một sai lầm thường gặp khi giải phương trình dạng này là thường bỏ luôn dấu giá trị tuyệt đối khi khai căn bậc chẵn! Cần lưu ý là $\sqrt{a^2} = |a|$ và chỉ được phép bỏ dấu giá trị tuyệt đối khi đã biết rõ dấu của biểu thức trong dấu giá trị tuyệt đối.

Bài tập đề nghị:

Giải phương trình:

$$1. \sqrt{x+2\sqrt{x+1}} - \sqrt{x-2\sqrt{x-1}} = 2$$

$$2. 2\sqrt{x+2+2\sqrt{x+1}} - \sqrt{x+1} = 4$$

1.2 Phương pháp đặt ẩn phụ.

Ở đây người viết sẽ không đề cập đến những bài toán đặt ẩn phụ quá đơn giản mà chỉ đề cập đến một số kĩ thuật đặt ẩn phụ thực sự mạnh và hiệu quả!

1.2.1 Đặt ẩn phụ không hoàn toàn.

Lần đầu tiếp cận, đối với người viết thì phương pháp này thực sự rất bất ngờ!

Ta xét ví dụ:

Ví dụ: Giải phương trình: $(4x-1)\sqrt{x^2+1} = 2x^2 + 2x + 1$

LG: Đặt $\sqrt{x^2+1} = t > 0 \Rightarrow x^2 = t^2 - 1$

Ta được: $(4x-1)t = 2t^2 + 2x - 1$

$$\Leftrightarrow 2t^2 - (4x-1)t + 2x - 1 = 0 \quad (*)$$

$$\Delta_t = (4x-1)^2 - 8(2x-1) = (4x-3)^2 \geq 0 \quad \forall x \text{ do đó } (*) \text{ có 2 nghiệm } t = \frac{1}{2} \text{ và } t = 2x-1.$$

$$\text{Với } t = 1/2 \Rightarrow x^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 1 = -\frac{3}{4} < 0 \text{ (vô nghiệm)}$$

$$\text{Với } t = 2x - 1 > 0 \Rightarrow \begin{cases} x > \frac{1}{2} \\ x^2 = (2x-1)^2 - 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{1}{4}$$

Vậy nghiệm của phương trình là $x = 1/4$

Khi còn là học sinh phổ thông, học về phương trình vô tỷ thầy giáo cho bài tập này, tôi đã suy nghĩ rất nhiều nhưng đành bó tay và xin sự gợi ý của thầy giáo, thầy cười và nói rất đơn giản thôi, cái gì phức tạp thì đặt nó bằng t xem sao, tôi khẳng định với thầy của

mình rằng, điều ấy là không thể vì khi đặt biểu thức căn bằng t thì không thể chuyển hết các đại lượng chứa x còn lại theo t được (nếu chuyển thì phương trình vẫn hết sức phức tạp) Thầy nói "nếu thầy làm được thì sao?" tôi khẳng định với thầy lại lần nữa rằng không thể làm theo cách đó và tin tưởng rằng chắc chắn thầy đã có sự nhầm lẫn nào đó. Khi thầy giải đến bước chuyển phương trình ban đầu về dạng (*) tôi đã cười thầm rằng thầy sẽ xử lý phần x còn lại trong phương trình như thế nào đây và tưởng tượng ra cảnh thầy sẽ "gãi đầu và cười trừ: hình như thầy nhầm..." Nhưng thầy nhìn tôi và mỉm cười "Bây giờ ta sẽ coi x là tham số và giải phương trình bậc 2 theo ẩn t " Lúc này tôi mới giật mình vì ý tưởng quá táo bạo ấy, và thực sự bị bất ngờ vì cách giải phương trình này!

Qua lần ấy tôi mới hiểu được rằng người làm Toán cần phải có những ý tưởng táo bạo, đặc biệt không được bảo thủ với suy nghĩ rằng "không thể được..." " chắc chắn không đâu..." như thế ta đã tự giết chết sự sáng tạo của mình rồi đấy, hãy nghĩ rằng "cứ thử xem nào, biết đâu...." luôn quyết tâm và hi vọng thì mọi vấn đề sẽ được giải quyết!

Ta có nhận xét sau:

Đối với phương trình dạng: $af(x) + g(x)\sqrt{f(x)} + h(x) = 0$.

Đặt $t = \sqrt{f(x)}$ và đưa pt về dạng $at^2 + g(x)t + h(x) = 0$ sau đó ta sẽ giải pt với ẩn t coi x là tham số. Điều quan trọng ở phương trình này là biệt số Δ phải có dạng $(p(x))^2$

Việc đưa ra dạng tổng quát như trên là khá chung chung, vì vậy để hiểu rõ hơn được phương pháp này đòi hỏi ta phải qua thực nghiệm và tự rút ra kinh nghiệm!

Bài tập đề nghị:

Giải các phương trình sau:

$$1. x^2 + 3x + 1 = (x + 3)\sqrt{x^2 + 1}$$

$$3. (x + 3)\sqrt{10 - x^2} = x^2 - x - 12$$

$$2. 2(1 - x)\sqrt{x^2 + x + 1} = x^2 - 3x - 1$$

$$4. (4x - 1)\sqrt{x^2 + 1} = 2x^2 + 2x + 1$$

1.2.2 Đặt ẩn phụ đưa về hệ phương trình.

Đây cũng là một phương pháp rất hay, suy nghĩ thông thường ta chỉ chuyển từ việc giải hệ phương trình về giải phương trình, vì việc giải phương trình được xem là đơn giản

hơn việc giải hệ phương trình gồm hai ba phương trình, nhưng việc dễ hay khó ở đây chỉ mang tính tương đối, những phương trình cơ bản hiển nhiên là dễ, và khi giải hệ phương trình ta cũng phải chuyển về những phương trình dạng này, nhưng những hệ phương trình cơ bản như phương trình đối xứng loại một loại hai, hệ phương trình đẳng cấp, những phương trình có thể sử dụng ngay phép thế để đưa về phương trình bậc 2, bậc 3, đã có cách làm rất rõ ràng thì cũng được coi là đơn giản và khi giải một phương trình phức tạp mà việc đưa về phương trình cơ bản đã đi vào bế tắc thì người ta mới tìm cách chuyển nó về một hệ phương trình cơ bản đơn giản. Thực chất quá trình này nhằm bóc tách để làm rõ ràng hơn những đặc tính của phương trình, chia nhỏ những đặc tính này ra để tiện cho việc nhìn nhận và xử lí. (Chẳng hạn, việc đặt 2 ẩn phụ đưa về hệ 2 phương trình, thì mỗi phương trình trong hệ lại mang ít nhất một đặc trưng của phương trình gốc)

Hai phương pháp dưới đây cụ thể hoá hơn ý tưởng ấy!

a) Đặt 1 ẩn phụ đưa về hệ phương trình.

Phương trình dạng: $x^n + a = b\sqrt[n]{bx - a}$

Cách giải: Đặt $y = \sqrt[n]{bx - a}$ ta được hệ phương trình:
$$\begin{cases} x^n - by + a = 0 \\ y^n - bx + a = 0 \end{cases}$$

Đây là hệ đối xứng loại hai, ta thường trừ tương ứng từng vế 2 phương trình của hệ đưa về phương trình tích rồi giải tìm x, y.

Ví dụ: Giải phương trình: $x^3 + 2 = 3\sqrt[3]{3x - 2}$

LG: Đặt $\sqrt[3]{3x - 2} = y \Rightarrow 3x - 2 = y^3 \Rightarrow y^3 + 2 = 3x$. Ta được hệ pt:
$$\begin{cases} x^3 + 2 = 3y & (1) \\ y^3 + 2 = 3x & (2) \end{cases}$$

Trừ vế (1) và (2) biến đổi ta được phương trình: $(x - y)(x^2 + y^2 + xy + 3) = 0$

Chú ý rằng: $x^2 + y^2 + xy > 0 \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$ do đó suy ra $x = y$ thế vào (1) giải phương trình ta được nghiệm của phương trình là $x = 1$ và $x = -2$

Phương trình dạng: $\sqrt{ax + b} = c(dx + e)^2 + \alpha x + \beta$ trong đó $a, d, e \neq 0$ và $d = ac + \alpha$, $e = bc + \beta$ Cách giải: Đặt $dy + e = \sqrt{ax + b}$ khi đó ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} (dy+e)^2 = ax+b \\ c(dx+e)^2 = -\alpha x + dy + e - \beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c(dy+e)^2 = cax + cb \\ c(dx+e)^2 = -\alpha x + dy + e - \beta \end{cases}$$

Ví dụ: Giải phương trình: $\sqrt{2x-1} + x^2 - 3x + 1 = 0$

LG: Đk: $x \geq \frac{1}{2}$ Ta đưa phương trình về dạng $\sqrt{2x-1} = -(-x+1)^2 + x$

Ở đây $a = 2, b = -1, c = -1, d = -1, e = 1, \alpha = 1, \beta = 0 \Rightarrow d = ac + \alpha$ và $e = bc + \beta$

Khi đó, ta đặt $-y+1 = \sqrt{2x-1}$ ($y \leq 1$) ta có hệ phương trình:
$$\begin{cases} (-y+1)^2 = 2x-1 \\ (-x+1)^2 = y-1+x \end{cases}$$

Trừ theo vế 2 phương trình của hệ ta được

$$(x-y)(2-x-y) = x-y \Leftrightarrow (x-y)(1-x-y) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = x \\ y = 1-x \end{cases}$$

Bài tập đề nghị:

Giải các phương trình:

1. $x^2 - 1 = \sqrt{x+1}$

4. $x^3 + 1 = 2\sqrt[3]{2x-1}$

2. $x^2 + \sqrt{x+5} = 5$

5. $\sqrt{2x+15} = 32x^2 + 32x - 20$

3. $x^2 - 2002\sqrt{2002x-2001} + 2001 = 0$

6. $\sqrt{3x+1} = -4x^2 + 13x - 5$

b) Đặt 2 ẩn phụ và giải hệ phương trình

Phương trình dạng: $\alpha \sqrt[n]{a \pm f(x)} \pm \beta \sqrt[m]{b \pm k.f(x)} = c$

Cách giải: Đặt $\sqrt[n]{a \pm f(x)} = u \Rightarrow u^n = a \pm f(x)$ và $\sqrt[m]{b \pm k.f(x)} = v \Rightarrow v^m = b \pm k.f(x)$

Khi đó ta xây dựng một hệ gồm 2 phương trình ẩn là u, v

Phương trình thứ nhất trực tiếp suy ra từ phương trình gốc bằng cách thế u, v vào phương trình ta được: $\alpha u \pm \beta v = c$

Còn phương trình thứ hai được xây dựng dựa vào sự liên hệ giữa bản thân u và v, tùy

trường hợp mà phương trình này có dạng $u^n - \frac{1}{k}v^m = a \pm \frac{b}{k}$ hay $u^n + \frac{1}{k}v^m = a \pm \frac{b}{k}$ tức là

làm thế nào đây (thêm, bớt một số lần) trong phương trình thứ hai này không còn x.

Như vậy ta có hệ phương trình:
$$\begin{cases} \alpha u \pm \beta v = c \\ u^n \pm \frac{1}{k} v^m = a \pm \frac{b}{k} \end{cases}$$

Tuỳ trường hợp mà hệ phương trình trên có thể là phương trình đối xứng hoặc không, từ đó mà ta có cách giải phù hợp. Trình bày tổng quát như vậy sẽ có cảm giác khó hiểu, vì vậy để hiểu rõ hơn ta thực hiện những ví dụ sau dựa trên bài toán tổng quát!

Ví dụ 1: Giải phương trình: $\sqrt[3]{x-2} + \sqrt{x+1} = 3$

LG: Đk: $x \geq -1$

Đặt $\sqrt[3]{x-2} = u \Rightarrow x-2 = u^3$; $\sqrt{x+1} = v \Rightarrow x+1 = v^2$

Ta được hệ pt:
$$\begin{cases} u + v = 3 \\ u^3 - v^2 = -3 \end{cases}$$

Bằng phép thế ta được phương trình: $u^3 - (3 - u)^2 = -3$

Khai triển giải phương trình ta được nghiệm $u = 1 \Rightarrow v = 2$

Khi đó:
$$\begin{cases} x-2=1 \\ x+1=4 \end{cases} \Leftrightarrow x=3 \text{ (t/m)}$$

Lưu ý: Khi tìm được ẩn u ta cần tìm cả ẩn v và giải phương trình tìm x thoả mãn cả giá trị của u và v tìm được. Trong nhiều bài toán tìm đc x thoả mãn giá trị của u nhưng lại không thoả mãn giá trị v , khi đó nếu không tìm v và kết luận luôn thì rất có thể ta sẽ lấy cả những giá trị x không t/m làm nghiệm.

Ví dụ 2: Giải phương trình:

a, $\sqrt{3+x} + \sqrt{6-x} + \sqrt{(3+x)(6-x)} = 3$

b, $2\sqrt[3]{3x-2} + 3\sqrt{6-5x} - 8 = 0$ (KA-2009)

LG: a, Đk: $-3 \leq x \leq 6$

Đặt $\sqrt{3+x} = u \geq 0$ và $\sqrt{6-x} = v \geq 0$ Khi đó ta có hệ:
$$\begin{cases} u^2 + v^2 = 9 \\ u + v - uv = 3 \end{cases}$$

Đây là hệ đối xứng loại 1. Giải hệ rồi thế vào tìm đc nghiệm của pt ban đầu là $x = -3$ hoặc $x = 6$.

b. Đk: $x \leq \frac{6}{5}$ Đặt $u = \sqrt[3]{3x-2}$; $v = \sqrt{6-5x}$

Ta có hệ pt:
$$\begin{cases} 2u + 3v = 8 \\ 5u^3 + 3v^2 = 8 \end{cases}$$
 Bằng phép thế ta được phương trình: $5u^3 + 3\left(\frac{8-2u}{3}\right)^2 = 8$

Khai triển giải phương trình ta được nghiệm $u = -2 \Rightarrow v = 4$

Từ đó ta có nghiệm của phương trình là $x = -2$

Bài tập đề nghị:

Giải phương trình:

$$1, \sqrt[3]{2-x} = 1 - \sqrt{x-1}$$

$$3, \sqrt[4]{97-x} + \sqrt[4]{x} = 5$$

$$2, \sqrt[3]{x+34} - \sqrt[3]{x-3} = 1$$

$$4, \sqrt[4]{18-x} + \sqrt[4]{x-1} = 3$$

1.2.3 Đặt ẩn phụ bằng biến số lượng giác

Đây cũng là một phương pháp khá độc đáo bởi cách đặt ẩn phụ "ngược" của phương pháp này (ta thường đặt một biểu thức là một ẩn mới, nhưng trong phương pháp này ta lại đặt một ẩn bằng một biểu thức, mà cụ thể là các biểu thức lượng giác: $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$, $\cot x$...)

Nx1: Nếu bài toán có chứa $\sqrt{a^2 - x^2}$ tức là ẩn $x \in [-a; a]$ thì ta có thể đặt: $x = a \cos t$ ($0 \leq t \leq \pi$) hay $x = a \sin t$ ($-\pi/2 \leq x \leq \pi/2$)

Nhiều bạn sẽ thắc mắc là liệu đặt như thế có ổn không? Có dễ lọt nghiệm không, liệu với mỗi x thì có tìm được t tương ứng không??? Ta chú ý rằng: Thứ nhất, $x \in [-a; a]$, mà $\sin t \in [-1; 1] \Rightarrow a \sin t \in [-a; a]$ do đó với cách đặt $x = a \sin t$ (tương tự với $x = a \cos t$) thì với mỗi x chắc chắn ta sẽ tìm được một t thoả mãn, do đó ta yên tâm rằng sẽ không bị mất nghiệm do cách đặt. Thứ hai, tại sao phải thêm điều kiện $0 \leq t \leq \pi$ với $x = a \cos t$ và $-\pi/2 \leq t \leq \pi/2$ với $x = a \sin t$? Bởi vì giới hạn t trên những đoạn ấy đảm bảo tương ứng với mỗi x cho một và chỉ một t , hơn nữa khi thế $\sin t$ hoặc $\cos t$ vào phương trình sẽ xuất hiện biểu thức $\sqrt{\sin^2 t}$ (nếu đặt $x = \cos t$) và $\sqrt{\cos^2 t}$ (nếu đặt $x = \sin t$), nếu không giới hạn t thì ta sẽ phải xét các trường hợp của t để bỏ dấu căn (lưu ý rằng $\sqrt{a^2} = |a|$), như thế là dài dòng mà không cần thiết (chưa kể đến việc dễ dẫn đến sai lầm).

Nx2: Nếu bài toán có chứa $\sqrt{x^2 - a^2}$ thì có thể đặt $x = \frac{|a|}{\sin t}$ với $t \in [-\pi/2; \pi/2] \setminus \{0\}$

hoặc $x = \frac{|a|}{\cos t}$ với $t \in [0; \pi] \setminus \{\pi/2\}$

Nx3: Nếu bài toán có chứa $\sqrt{x^2 + a^2}$ (ẩn x bất kì) ta có thể đặt $x = \tan t$ ($-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$)

Khi đó, nhờ sử dụng các công thức lượng giác mà việc khử các dấu căn trở nên đơn giản hơn nhiều.

Ví dụ: Giải phương trình: $\sqrt{1 + \sqrt{1 - x^2}} = x(1 + 2\sqrt{1 - x^2})$

LG: Đk: $-1 \leq x \leq 1$

Ta thấy trong phương trình có biểu thức $\sqrt{1 - x^2}$ do đó đặt $x = \sin t$ ($-\pi/2 \leq t \leq \pi/2$). Khi đó phương trình trở thành:

$$\sqrt{1 + \sqrt{1 - \sin^2 x}} = \sin x (1 + 2\sqrt{1 - \sin^2 x}) \Leftrightarrow \sqrt{1 + \sqrt{\cos^2 x}} = \sin x (1 + 2\sqrt{\cos^2 x})$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{1 + |\cos x|} = \sin x (1 + 2|\cos x|) \text{ do } -\pi/2 \leq t \leq \pi/2 \text{ nên } 0 \leq \cos x \text{ khi đó phương trình}$$

$$\text{tương đương với } \sqrt{1 + \cos x} = \sin x (1 + 2\cos x) \Leftrightarrow \sqrt{2}\cos \frac{t}{2} = \sin t + \sin 2t \quad (*)$$

Giải (*) với điều kiện $-\pi/2 \leq t \leq \pi/2$ ta tìm được nghiệm $t = \pi/6$; $t = \pi/2$ từ đó tìm được nghiệm của phương trình ban đầu là $x = 1/2$ và $x = 1$

Ví dụ 2: Giải phương trình: $\sqrt{x^2 + 1} + \frac{x^2 + 1}{2x} = \frac{(x^2 + 1)^2}{2x(1 - x^2)}$

LG: đk: $x \neq 0, \pm 1$. Ta thấy trong phương trình có biểu thức $\sqrt{x^2 + 1}$ nên ta đặt $x = \tan t$

với $t \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right) \setminus \left\{\pm \frac{\pi}{4}; 0\right\}$. Khi đó:

$$\sqrt{x^2 + 1} = \sqrt{\tan^2 t + 1} = \sqrt{\frac{1}{\cos^2 t}} = \frac{1}{\cos t}; \sin 2t = \frac{2 \tan t}{1 + \tan^2 t} = \frac{2x}{1 + x^2}; \cos 2t = \frac{1 - x^2}{1 + x^2}$$

$$\Rightarrow \sin 4t = 2 \sin 2t \cdot \cos 2t = \frac{4x(1 - x^2)}{(x^2 + 1)^2} \Rightarrow \frac{2}{\sin 4t} = \frac{(x^2 + 1)^2}{2x(1 - x^2)}$$

Do đó phương trình trở thành: $\frac{1}{\cos t} + \frac{1}{\sin 2t} = \frac{2}{\sin 4t}$ Giải phương trình ta được

$$\sin t = \frac{1}{2} \Leftrightarrow t = \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow x = \frac{1}{\sqrt{3}}. \text{ Vậy nghiệm của phương trình là: } x = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Bài tập đề nghị:

Giải các phương trình sau:

$$1. \sqrt{x^5} + \sqrt{(1-x^2)^5} \leq 1$$

$$3. x^3 + \sqrt{(1-x^2)^3} = x\sqrt{2(1-x^2)}$$

$$2. x + \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} = 2\sqrt{2}$$

$$4. \sqrt{1-x} - 2x\sqrt{1-x^2} - 2x^2 + 1 = 0$$

1.2.4. Một số dạng khác

Phần này người viết trích từ bài "Giải một số phương trình vô tỷ có dạng đặc biệt" trên tạp chí Toán Học & Tuổi Trẻ số 360 (6 - 2007) của tác giả Nguyễn Phước (GV THCS Lê Hồng Phong, Thừa Thiên Huế)

Phương trình dạng: $\alpha P(x) + \beta Q(x) + \gamma \sqrt{P(x) \cdot Q(x)} = 0$ ($\alpha\beta\gamma \neq 0$)

Cách giải:

+) Nếu $P(x) = 0$ thì $Q(x) = 0$. Ta có hệ pt:
$$\begin{cases} P(x) = 0 \\ Q(x) = 0 \end{cases}$$

+) Nếu $P(x) \neq 0$ thì chia cả hai vế của phương trình cho $P(x)$ được

$$\alpha + \beta \cdot \frac{Q(x)}{P(x)} + \gamma \sqrt{\frac{P(x)}{Q(x)}} = 0$$

Đặt $\sqrt{\frac{P(x)}{Q(x)}} = t \geq 0$ Phương trình trở thành $\beta t^2 + \gamma t + \alpha = 0$ từ đó tìm t , rồi tìm x .

Ví dụ: Giải phương trình: $2(x^2 - 3x + 2) = 3\sqrt{x^3 + 8}$

LG: Biến đổi phương trình về dạng: $2(2x^2 - 2x + 4) - 2(x+2) = 3\sqrt{(x+2)(x^2 - 2x + 4)}$

ĐK: $x \geq -2$ (vì $x^2 - 2x + 4 = (x-1)^2 + 3 > 0$)

Do $x = -2$ không phải là nghiệm của phương trình nên chia cả hai vế cho $x+2$ ta được

$$\frac{2(x^2 - 2x + 4)}{x+2} - 3\sqrt{\frac{x^2 - 2x + 4}{x+2}} - 2 = 0$$

Đặt $\sqrt{\frac{x^2 - 2x + 4}{x+2}} = t \geq 0$ ta có $2t^2 - 3t - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -\frac{1}{2} (l) \\ t = 2 (t/m) \end{cases}$

Với $t = 2$ giải phương trình được nghiệm là $\{3 \pm \sqrt{13}\}$

Phương trình dạng:

$$\alpha(P(x)+Q(x))+\beta(\sqrt{P(x)}\pm\sqrt{Q(x)})\pm 2\alpha\sqrt{P(x).Q(x)}+\gamma=0 \text{ (với } \alpha^2+\beta^2\neq 0)$$

Cách giải: Đặt $t = \sqrt{P(x)} \pm \sqrt{Q(x)}$ thì $t^2 = P(x) + Q(x) \pm 2\sqrt{P(x).Q(x)}$

Phương trình trở thành $\alpha t^2 + \beta t + \gamma = 0$ Giải phương trình tìm t , rồi tìm x .

Ví dụ: Giải phương trình: $\sqrt{2x+3} + \sqrt{x+1} = 3x + 2\sqrt{2x^2+5x+3} - 16$

LG: Biến đổi phương trình về dạng:

$$\sqrt{2x+3} + \sqrt{x+1} = 2x+3 + x+1 + 2\sqrt{(2x+3)(x+1)} - 20$$

Đặt $t = \sqrt{2x+3} + \sqrt{x+1}$ ($t \geq 0$). Khi đó $t^2 = 2x+3 + x+1 + 2\sqrt{(2x+3)(x+1)}$

Ta được phương trình $t^2 - t - 20 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -4 < 0(l) \\ t = 5(t/m) \end{cases}$ với $t = 5$ thế vào giải phương trình

tìm được nghiệm $x = 73 - \sqrt{4755}$

Người viết xin được trình bày thêm một ví dụ mà theo người viết đánh giá là hay và khó!

Ví dụ: Giải phương trình: $\sqrt{5x^2-14x+9} - \sqrt{x^2-x-20} = 5\sqrt{x+1}$

LG: Đk $x \geq 5$.

Chuyển về bình phương và rút gọn ta được: $2x^2 - 5x + 2 = 5\sqrt{(x^2 - x - 20)(x+1)}$

Nhận xét: không tồn tại số α, β để: $2x^2 - 5x + 2 = \alpha(x^2 - x - 20) + \beta(x+1)$

Như vậy ta không thể đặt $\begin{cases} u = x^2 - x - 20 \\ v = x + 1 \end{cases}$.

Nhưng "may mắn" ta có:

$$(x^2 - x - 20)(x+1) = (x+4)(x-5)(x+1) = (x+4)(x^2 - 4x - 5)$$

Ta viết lại phương trình: $2(x^2 - 4x - 5) + 3(x+4) = 5\sqrt{(x^2 - 4x - 5)(x+4)}$. Đến đây bài toán được giải quyết.

Bài tập đề nghị:

Giải các phương trình sau:

$$1. 2(x^2 - 3x + 2) = 3\sqrt{x^3 + 8}$$

$$3. 1 + \frac{2}{3}\sqrt{x-x^2} = \sqrt{x} + \sqrt{1-x}$$

$$2. 2(x^2 + 2) = 5\sqrt{x^3 + 1}$$

$$4. \sqrt{3x-2} + \sqrt{x-1} = 4x-9 + 2\sqrt{3x^2-5x+2}$$

1.3 Phương pháp đánh giá.

Đối với bài toán áp dụng phương pháp đánh giá, đa số đều là những bài toán khó. Thường xuất hiện trong các kì thi học sinh giỏi. Phương pháp này đưa ra những lời giải rất độc đáo, ngắn gọn dựa trên những đánh giá tinh tế, dựa vào những tính chất của bất đẳng thức.

Nhận xét:

1) Nếu $f(x) \geq a$ và đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x \in S$ thì phương trình $f(x)=a$ có nghiệm khi và chỉ khi $x \in S$, và $x \in S$ là nghiệm của phương trình ấy.

Đặc biệt: $f^2(x) + g^2(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0$ và $g(x) = 0$

2) Nếu $f(x) \geq a$ đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x \in S_1$ và $g(x) \leq a$ đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x \in S_2$, thì phương trình $f(x)=g(x)$ có nghiệm khi và chỉ khi $x \in S_1 \cap S_2$, và $x \in S_1 \cap S_2$ là nghiệm của phương trình ấy.

Ví dụ 1: Giải phương trình:

$$1. \sqrt{x^2 - 2x + 5} + \sqrt{x-1} = 2 \quad (1)$$

$$3. 2x^2 - 11x + 21 = 3\sqrt{4x-4} \quad (3)$$

$$2. 4\sqrt{x+1} = x^2 - 5x + 14 \quad (2)$$

LG: 1. Ta thấy: $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x + 5} + \sqrt{x-1} = \sqrt{(x-1)^2 + 4} + \sqrt{x-1} \geq 2$ đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=1$. Vậy nghiệm (1) là $x=1$.

2. Đk: $x \geq -1$

$$(2) \Leftrightarrow (x+1) - 4\sqrt{x+1} + 4 + x^2 - 6x + 9 = 0 \Leftrightarrow (\sqrt{x+1} - 2)^2 + (x-3)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x+1} - 2 = 0 \\ x - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 3$$

Vậy nghiệm của (2) là $x=3$.

3. Ta có: $2x^2 - 11x + 21 > 0$ do đó để phương trình có nghiệm thì $3\sqrt[3]{4x-4} > 0 \Rightarrow x-1 > 0$

Áp dụng BĐT AM-GM ta được $3\sqrt[3]{4x-4} = 3\sqrt[3]{2.2.(x-1)} \leq 2+2+x-1 = x+3$ Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=3$

Mặt khác: $2x^2 - 11x + 21 = 2(x-3)^2 + x + 3 \geq x+3$ đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=3$.

$$\text{Nhu vậy: } (3) \Leftrightarrow \begin{cases} 3\sqrt[3]{4x-4} = x+3 \\ 2x^2 - 11x + 21 = x+3 \end{cases} \Leftrightarrow x=3$$

Bài tập đề nghị:

Giải phương trình:

$$1. \sqrt{x-2} + \sqrt{4-x} = x^2 - 6x + 11$$

$$3. \sqrt{4x-1} + \sqrt{4x^2-1} = 1$$

$$2. \sqrt{x^2+x-1} + \sqrt{x-x^2+1} = x^2 - x + 2$$

$$4. \sqrt{x} + \sqrt[4]{x} + 4\sqrt{17-x} + 8\sqrt[4]{17-x} = 34 \text{ (T6/403)}$$

1.4. Phương pháp hàm số

Đây là phương pháp sử dụng công cụ giải tích mà ở đây người viết trình bày về sử dụng tính đơn điệu của hàm số để chứng minh phương trình có nghiệm duy nhất, điều đặc biệt là phương pháp này không chỉ dùng cho phương trình vô tỷ mà nó còn được sử dụng cho nhiều loại phương trình khác.

Một số tính chất:

1) Nếu hàm số $f(x)$ **liên tục** và đơn điệu (tăng hoặc giảm) trên khoảng $(a;b)$ thì phương trình $f(x) = k$ ($k \in R$) có không quá một nghiệm trong khoảng $(a;b)$.

2) Nếu hàm số $f(x)$ **liên tục** và đơn điệu trên khoảng $(a;b)$ thì $\forall u, v \in (a;b)$ ta có $f(u) = f(v) \Leftrightarrow u = v$.

3) Nếu hàm số $f(x)$ và $g(x)$ **liên tục**, $f(x)$ tăng và $g(x)$ là hàm hằng hoặc giảm trong khoảng $(a;b)$ thì phương trình $f(x)=g(x)$ có nhiều nhất một nghiệm thuộc khoảng $(a;b)$.

Cần đặc biệt lưu ý tính chất liên tục của các hàm số được xét!

Các hướng áp dụng:

Sau đây người viết trình bày các hướng áp dụng theo Trần Phương - Lê Hồng Đức (Tuyển tập các chuyên đề luyện thi đại học môn toán: Đại số sơ cấp).

Hướng 1: Thực hiện theo các bước:

Bước 1: Chuyển phương trình về dạng: $f(x) = k$

Bước 2: Chứng minh $f(x)$ là hàm số liên tục và đơn điệu.

Bước 3: Nhận xét: (Chẳng hạn với trường hợp $f(x)$ là hàm số đồng biến)

- Với $x = x_0 \Leftrightarrow f(x) = f(x_0) = k$, do $x = x_0$ là nghiệm.
- Với $x > x_0 \Leftrightarrow f(x) > f(x_0) = k$, do đó phương trình vô nghiệm.
- Với $x < x_0 \Leftrightarrow f(x) < f(x_0) = k$, do đó phương trình vô nghiệm.

Hướng 2: Thực hiện theo các bước:

Bước 1: Chuyển phương trình về dạng: $f(x) = g(x)$.

Bước 2: Chứng minh hàm số $f(x)$ liên tục và đồng biến, còn hàm số $g(x)$ là hàm hằng hoặc hoặc liên tục và nghịch biến trên tập cần xét.

Bước 3: Nhằm tìm x sao cho $f(x_0) = g(x_0)$. Kết luận $x = x_0$ là nghiệm duy nhất của phương trình.

Hướng 3: Thực hiện theo các bước:

Bước 1: Chuyển phương trình về dạng: $f(u) = f(v)$. (*)

Bước 2: Xét hàm số $y = f(x)$, chứng minh hàm số $f(x)$ đơn điệu.

Bước 3: Khi đó (*) $\Leftrightarrow u = v$ giải phương trình này tìm x .

Lưu ý: Ta thường hay quên điều kiện liên tục của hàm số được xét.

Ví dụ: Giải phương trình:

$$1. \sqrt{x} + \sqrt{x-5} + \sqrt{x+7} + \sqrt{x+16} = 14 \quad 2. \sqrt{2x^2 + \sqrt{4x^4 - 2x^2 + 1}} - \sqrt{x+1 + \sqrt{x^2 + x + 1}} = -2x^2 + x + 1$$

LG:

1. Đk: $x \geq 5$ Xét hàm số: $f(x) = \sqrt{x} + \sqrt{x-5} + \sqrt{x+7} + \sqrt{x+16}$ với $x \in [5; +\infty)$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{2\sqrt{x-5}} + \frac{1}{2\sqrt{x+7}} + \frac{1}{2\sqrt{x+16}} > 0 \text{ với } x \in (5; +\infty)$$

Suy ra hàm số $f(x)$ đồng biến trên $(5; +\infty)$, mà $f(9)=14$. mà $f(x)$ liên tục trên $[5; +\infty)$

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x = 9$.

2. Viết lại phương trình về dạng:

$$\sqrt{2x^2 + \sqrt{4x^4 - 2x^2 + 1}} + 2x^2 = \sqrt{x+1 + \sqrt{(x+1)^2 - (x+1) + 1}} + x + 1$$

Xét hàm số: $f(t) = \sqrt{t + \sqrt{t^2 - t + 1}} + t$; $f'(t) = \frac{2\sqrt{t^2 - t + 1} + 2t - 1}{4\sqrt{t + \sqrt{t^2 - t + 1}} \cdot \sqrt{t^2 - t + 1}}$

Ta thấy: $2\sqrt{t^2 - t + 1} + 2t - 1 = \sqrt{(2t^2 - 1)} + 3 + 2t - 1 > |2t - 1| + 2t - 1 \geq 0$

Do đó hàm số luôn đồng biến.

Khi đó ta có phương trình tương đương $f(2x^2) = f(x+1) \Leftrightarrow 2x^2 = x+1$

Giải phương trình tìm được nghiệm $x = 1$, $x = -1/2$.

Bài tập đề nghị:

Giải phương trình:

1. $\sqrt{4x-1} + \sqrt{4x^2-1} = 1$

3. $x^5 + x^3 - \sqrt{1-3x} + 4 = 0$

2. $\sqrt{x^2+15} = 3x-2 + \sqrt{x^2+8}$

4. $\sqrt{2x-1} + \sqrt{x^2+3} = 4-x$

Chương 2: BẤT PHƯƠNG TRÌNH VÔ TỶ

Nói chung cách nhìn nhận để tìm cách giải một bất phương trình vô tỷ có khá tương đồng với phương trình vô tỷ, khi đứng trước một bài toán bất phương trình (BPT) ta thường đặt câu hỏi *nếu là phương trình thì ta sẽ làm như thế nào?* Chẳng hạn, với BPT $\sqrt{3x+2} - \sqrt{4x+1} \leq \frac{x-1}{5}$ (*), thì ở chương 1 ta cũng đã có ví dụ giải phương trình:

$\sqrt{3x+2} - \sqrt{4x+1} = \frac{x-1}{5}$, và việc định hướng giải BPT (*) cũng hoàn toàn tương tự!

Tuy nhiên, BPT thường khó hơn bởi BPT mang một đặc trưng nhạy cảm mà phương trình không có đó là chiều của BPT (lớn hơn hay nhỏ hơn). Đặc trưng này nhiều khi khiến lối tư duy trong phương trình sẽ dẫn đến sai lầm hoặc trở lên vô hiệu khi giải BPT!

Do có nhiều điểm tương đồng với Chương 1 nên các phương pháp giải được trình bày chủ yếu thông qua các ví dụ để bạn đọc có thể tự rút ra những nhận xét cho mình!

2.1. Sử dụng phép biến đổi tương đương.

Hầu hết các phép biến đổi trong giải BPT là phép biến đổi tương đương, vì tập nghiệm của BPT thường là vô hạn nên việc thử lại là sẽ rất khó khăn!

Cũng như phương trình, đây là phương pháp cơ bản nhưng **đặc biệt quan trọng** nhất là cách giải những BPT cơ bản!

2.1.1. Áp dụng các định lý về biến đổi tương đương để giải BPT cơ bản:

Định lý 1: $\sqrt[2k+1]{f(x)} \geq g(x) \Leftrightarrow f(x) \geq g^{2k+1}(x)$. Đặc biệt: $\sqrt[3]{f(x)} \geq g(x) \Leftrightarrow f(x) \geq g^3(x)$

Định lý 2: $\sqrt[2k]{f(x)} \leq g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) \geq 0 \\ f(x) \leq g^{2k}(x) \end{cases}$. Đặc biệt: $\sqrt{f(x)} \leq g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) \geq 0 \\ f(x) \leq g^2(x) \end{cases}$

Qua BPT trong định lý 2, ta thấy cùng 1 dạng với phương trình nhưng việc giải BPT phức tạp hơn nhiều!

Định lý 3: $\sqrt[2k+1]{f(x)} \leq g(x) \Leftrightarrow f(x) \leq g^{2k+1}(x)$. Đặc biệt: $\sqrt[3]{f(x)} \leq g(x) \Leftrightarrow f(x) \leq g^3(x)$

Định lí 4: $\sqrt[2k]{f(x)} \geq g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \leq 0 \\ f(x) \geq 0 \\ g(x) \geq 0 \\ f(x) \geq g^{2k}(x) \end{cases}$. Đặc biệt: $\sqrt{f(x)} \geq g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \leq 0 \\ f(x) \geq 0 \end{cases} \quad (1)$
 $\begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) \geq g^2(x) \end{cases} \quad (2)$ (I)

Trong thực hành giải toán để tránh những nhầm lẫn đáng tiếc trong quá trình biến đổi, đối với BPT dạng $\sqrt[2k]{f(x)} \geq g(x)$ (*), nếu hệ thống (I) trông quá phức tạp ta không nên tiếp tục biến đổi tương đương mà giải riêng hệ (1) và (2) hoặc ngay từ đầu ta chia thành hai trường hợp:

TH1: $g(x) \leq 0$ (Giải đk này tìm x)

(*) $\Leftrightarrow f(x) \geq 0$ (vì với $g(x) \leq 0$ thì (*) thỏa mãn với mọi x làm cho BPT xác định (lưu ý rằng $\sqrt[2k]{f(x)} \geq 0$, và xác định với $f(x) \geq 0$))

Giải và kết hợp với điều kiện ta được nghiệm trong TH1

TH2: $g(x) \geq 0$ (giải đk này tìm x)

(*) $\Leftrightarrow f(x) \geq g^{2k}(x)$

Giải và kết hợp với điều kiện ta được nghiệm trong TH2

Kết hợp nghiệm trong 2 TH ta được nghiệm của BPT.

Mới nhìn ta sẽ thấy BPT trong định lí 4 khá giống BPT trong định lí 2, chỉ có chiều của BPT thay đổi, nhưng như ta đã thấy điểm khác nhau này đã làm cho cách giải BPT của ta phải thay đổi!

Qua đó ta thấy được rằng vấn đề về dấu trong BPT mang tính quyết định khá lớn, bởi nó ảnh hưởng đến chiều của BPT do đó ảnh hưởng đến cách giải và tập nghiệm của BPT, vì vậy ta nên chú ý đến dấu của các biểu thức trong BPT (âm hay dương).

Ví dụ 1 (Dự bị KB-2005): Giải BPT: $\sqrt{8x^2 - 6x + 1} - 4x + 1 \leq 0$ (1)

LG:

$$(1) \Leftrightarrow \sqrt{8x^2 - 6x + 1} \leq 4x - 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{1}{4} \\ 8x^2 - 6x + 1 \geq 0 \\ 8x^2 - 6x + 1 \leq (4x - 1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \left[\frac{1}{4}; +\infty\right) \\ x \in \left(-\infty; \frac{1}{4}\right] \cup \left[\frac{1}{2}; +\infty\right) \\ 4x^2 - x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left\{\frac{1}{4}\right\} \cup \left[\frac{1}{2}; +\infty\right)$$

Điểm khó nhất trong BPT này có lẽ là vấn đề kết hợp nghiệm, khi mới làm quen có lẽ ta sẽ lúng túng khi phải kết hợp một hệ các khoảng đoạn như ở BPT trên, đặc biệt là nghiệm $x = 1/4$ rất hay bị lãng quên! Để khắc phục tình trạng ấy, tốt nhất ta nên kẻ một trục số, điền các giá trị đầu mút mở mỗi khoảng đoạn, sau đó biểu diễn các khoảng đoạn ấy trên trục số (gạch bỏ từng phần bị loại). Đặc biệt lưu ý đến những điểm đầu mút!

Ví dụ 2: Giải BPT: a, $\frac{\sqrt{2(x^2-16)}}{\sqrt{x-3}} + \sqrt{x-3} > \frac{7-x}{\sqrt{x-3}}$ (2) (KA-2004)

b, $\frac{1-\sqrt{1-4x^2}}{x}$ (3') (ĐH Ngoại Ngữ - 1998)

LG:

a, đk: $x \geq 4$

$$(2) \Leftrightarrow \sqrt{2(x^2-16)} + x - 3 > 7 - x \Leftrightarrow \sqrt{2(x^2-16)} > 10 - 2x \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} 10 - 2x < 0 \\ 2(x^2-16) \geq 0 \end{cases} & (i) \\ \begin{cases} 10 - 2x \geq 0 \\ 2(x^2-16) > (10-2x)^2 \end{cases} & (ii) \end{cases}$$

Giải (i): $\begin{cases} 10 - 2x < 0 \\ 2(x^2-16) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 5 \\ |x| \geq 4 \end{cases} \Leftrightarrow x > 5$

Giải (ii): $\begin{cases} 10 - 2x \geq 0 \\ 2(x^2-16) > (10-2x)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 5 \\ x^2 - 20x + 66 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x > 10 - \sqrt{34}$

Lưu ý: - Đối với BPT trình này ta có thể quy đồng bỏ mẫu được bởi ta đã biết chính xác mẫu thức là một biểu thức mang dấu dương, còn đối với phương trình chứa ẩn ở mẫu nói chung ta không được phép quy đồng bỏ mẫu nếu chưa biết rõ dấu của mẫu thức.

- Đối với BPT dạng $\sqrt[k]{f(x)} \geq g(x)$ học sinh rất hay quên xét trường hợp $g(x) < 0$.

b, Đk: $x \in \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right] \setminus \{0\}$

(3') $\Leftrightarrow \frac{\sqrt{1-4x^2} + 3x - 1}{x} > 0$ (*)

TH1: Với $x \in \left[-\frac{1}{2}; 0\right)$ tức là $x < 0$

Khi đó ta có thể biến đổi (*) $\Leftrightarrow \sqrt{1-4x^2} + 3x - 1 < 0$ đây là BPT dạng $\sqrt{f(x)} \leq g(x)$

Hoặc nếu để ý một chút ta có nhận xét sau:

$$x \in \left[-\frac{1}{2}; 0\right) \Rightarrow 1-4x^2 < 1 \Rightarrow 1-\sqrt{1-4x^2} > 0 \Rightarrow \frac{1-\sqrt{1-4x^2}}{x} < 0 \quad \text{do} \quad \text{do} \quad x \in \left[-\frac{1}{2}; 0\right)$$

nghiem của BPT.

TH2: Với $x \in \left(0; \frac{1}{2}\right]$ tức là $x > 0$

Khi đó ta có (*) $\Leftrightarrow \sqrt{1-4x^2} + 3x - 1 > 0 \Leftrightarrow \sqrt{1-4x^2} > 1-3x$ (**)

+ Với $x \in \left(\frac{1}{3}; \frac{1}{2}\right]$ thì $1-3x < 0 \Rightarrow x \in \left(\frac{1}{3}; \frac{1}{2}\right]$ là nghiệm của BPT.

+ Với $x \in \left(0; \frac{1}{3}\right]$ thì $1-3x \geq 0$ nên

$$(**) \Leftrightarrow 1-4x^2 > (1-3x)^2 \Leftrightarrow 13x^2 - 6x < 0 \Leftrightarrow 13x\left(x - \frac{6}{13}\right) < 0 \quad \text{đúng} \quad \forall x \in \left(0; \frac{1}{3}\right] \quad \text{nên}$$

$x \in \left(0; \frac{1}{3}\right]$ là nghiệm của BPT.

Vậy tập nghiệm của BPT là: $S = \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right] \setminus \{0\}$

Trong lời giải trên người viết trình bày lời giải với khá nhiều nhận xét có vẻ không được tự nhiên mà với người mới làm quen sẽ có cảm giác khó chịu, tuy nhiên nhờ những nhận xét này mà lời giải sẽ ngắn gọn hơn và tránh được những nhầm lẫn tính toán, mặc dù vậy nếu không khéo trong những nhận xét thì rất có thể ta sẽ bị thiếu trường hợp!

- Đối với bài toán trên sai lầm thường gặp đó là thực hiện việc quy đồng bỏ mẫu, đây là phép biến đổi sai lầm dẫn đến việc bị mất nghiệm (đã ngầm công nhận $x > 0$ để biến đổi BPT, do đó thiếu trường hợp $x < 0$ (TH này làm đổi chiều của BPT khi quy đồng bỏ mẫu)).

Ví dụ 3: Giải BPT: $\sqrt{5x-1}-\sqrt{x-1}>\sqrt{2x-4}$ (3) (KA-2005)

LG:

Đk: $x \geq 2$

(3) $\Leftrightarrow \sqrt{2x-4}+\sqrt{x-1}<\sqrt{5x-1}$ Bình phương và rút gọn ta được phương trình tương đương: $2\sqrt{(2x-4)(x-1)}<2x+4 \Leftrightarrow \sqrt{2x^2-6x+4}<x+2$ đây là BPT dạng $\sqrt{f(x)} \leq g(x)$ giải BPT này ta được nghiệm $x \in (2;10)$

Nhận xét: BPT dạng $\sqrt{f(x)} \pm \sqrt{g(x)} \geq \sqrt{h(x)}$ ta thường tiến hành bình phương hai vế và đưa BPT về dạng $\sqrt{f(x)} \leq g(x)$ hoặc $\sqrt{f(x)} \geq g(x)$.

Bài tập đề nghị:

Giải các BPT sau:

$$1, \sqrt[3]{2x^2+1}-\sqrt[3]{3x^3-1} \geq 0$$

$$4, 1-x+\sqrt{2x^2-3x-5} < 0$$

$$2, x+2 \leq \sqrt[3]{x^3+8}$$

$$5, \sqrt{x+3}-\sqrt{7-x} > \sqrt{2x-8}$$

$$3, \sqrt{x^2-3x-10} \geq x-2$$

$$6, \sqrt{2-x} > \sqrt{7-x}-\sqrt{-3-2x}$$

2.1.2. Phương pháp sử dụng lượng liên hợp.

Do tính luôn dương của các biểu thức liên hợp (chẳng hạn $\sqrt{A}+\sqrt{B}$) nên cũng như với phương trình vô tỷ, trong một số BPT vô tỷ ta cũng có thể sử dụng lượng liên hợp để giúp việc giải BPT đơn giản hơn!

Ví dụ: Giải các BPT sau:

$$a, \sqrt{3x+2}-\sqrt{4x+1} \leq \frac{x-1}{5} \quad (1)$$

$$b, \frac{2x^2}{(3-\sqrt{9+2x})^2} < x+21 \quad (2)$$

LG:

a, Nếu để ý một chút thì ta sẽ thấy "khung" của BPT này là một ví dụ trong chương 1, và việc định hướng giải cũng hoàn toàn tương tự như trong phương trình!

ĐK: $x \geq -1/4$

Rõ ràng $\sqrt{3x+2}+\sqrt{4x+1}>0$ do đó ta có BPT tương đương:

$$(1) \Leftrightarrow \frac{-(x-1)}{\sqrt{3x+2}+\sqrt{4x+1}} \leq \frac{x-1}{5} \Leftrightarrow (x-1) \left(\frac{1}{\sqrt{3x+2}+\sqrt{4x+1}} + \frac{1}{5} \right) \leq 0$$

Nhận thấy $\frac{1}{\sqrt{3x+2}+\sqrt{4x+1}} + \frac{1}{5} > 0$ nên BPT tương đương với $x-1 \leq 0 \Leftrightarrow x \leq 1$

Kết hợp với đk ta có nghiệm của BPT là $x \in \left[-\frac{1}{4}; 1 \right]$

b, ĐK: $-\frac{9}{2} \leq x \neq 0$

$$(2) \Leftrightarrow \frac{2x^2(3+\sqrt{9+2x})^2}{4x^2} < x+21 \Leftrightarrow 18+2x+6\sqrt{9+2x} < 2x+24 \Leftrightarrow \sqrt{9+2x} < 4 \Leftrightarrow x < \frac{7}{2}$$

Kết hợp với đk ta được nghiệm $x \in \left[-\frac{9}{2}; \frac{7}{2} \right) \setminus \{0\}$

Bài tập đề nghị:

Giải các BPT sau:

$$1. \frac{x^2}{(1+\sqrt{1+x})^2} > x-4$$

$$3. \sqrt{2x+4} - 2\sqrt{2-x} > \frac{12x-8}{\sqrt{9x^2+16}}$$

$$2. \frac{1-\sqrt{21-4x+x^2}}{x+1} \geq 0$$

- Cũng như phương trình vô tỷ, một số BPT vô tỷ có thể trị tuyệt đối hoá hoặc đưa về BPT tích:

Ví dụ: Giải BPT: a, $\sqrt{x^2+x-2} + \sqrt{x^2+2x-3} \leq \sqrt{x^2+4x-5}$ (*)

b, $\sqrt{x+2}\sqrt{x-1} + \sqrt{x-2}\sqrt{x-1} > 3/2$ (**)

LG:

ĐK: $x \in (-\infty; -5] \cup [1; +\infty)$

$$(*) \Leftrightarrow \sqrt{(x-1)(x+2)} + \sqrt{(x-1)(x+3)} \leq \sqrt{(x-1)(x+5)}$$

TH1: $x \in (-\infty; -5] \Rightarrow x-1 < x+2 < x+3 < x+5 \leq 0$

Khi đó ta được BPT tương đương: $\sqrt{1-x}(\sqrt{-(x+2)} + \sqrt{-(x+3)} - \sqrt{-(x+5)}) \leq 0$

$$\Leftrightarrow \sqrt{-(x+2)} + \sqrt{-(x+3)} - \sqrt{-(x+5)} \leq 0 \Leftrightarrow \sqrt{-(x+2)} + \sqrt{-(x+3)} \leq \sqrt{-(x+5)}$$

Đây là BPT dạng $\sqrt{f(x)} \pm \sqrt{g(x)} \geq \sqrt{h(x)}$ đã nói ở trên.

$$\text{TH2: } x \in [1; +\infty) \Rightarrow 0 \leq x-1 < x+2 < x+3 < x+5$$

Ta được BPT tương đương: $\sqrt{x-1}(\sqrt{(x+2)} + \sqrt{(x+3)} - \sqrt{(x+5)}) \leq 0$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x+2)} + \sqrt{(x+3)} - \sqrt{(x+5)} \leq 0 \Leftrightarrow \sqrt{(x+2)} + \sqrt{(x+3)} \leq \sqrt{(x+5)}$$

BPT này cũng thuộc dạng $\sqrt{f(x)} \pm \sqrt{g(x)} \geq \sqrt{h(x)}$.

Lưu ý: Ta thường hay mắc sai lầm đó là không xét trường hợp thứ nhất vô tình thừa nhận $\sqrt{A.B} = \sqrt{A}.\sqrt{B}$, điều này chỉ đúng nếu cả A và B cùng không âm!

b, ĐK: $x \geq 1$

$$(**) \Leftrightarrow \sqrt{(\sqrt{x-1}+1)^2} + \sqrt{(\sqrt{x-1}-1)^2} \geq \frac{3}{2} \Leftrightarrow \sqrt{x-1}+1 + |\sqrt{x-1}-1| \geq \frac{3}{2}$$

Bằng cách xét các TH của x để bỏ dấu giá trị tuyệt đối ta có thể giải đc phương trình này một cách dễ dàng!

Bài tập đề nghị:

Giải các BPT sau:

1. $\sqrt{x^2+3x+2} + \sqrt{x^2+6x+5} \leq \sqrt{2x^2+9x+7}$
2. $\sqrt{x^2-8x+15} + \sqrt{x^2+2x-15} \leq \sqrt{4x^2-18x+18}$
3. $\sqrt{x^2-4x+3} - \sqrt{2x^2-3x+1} \geq x-1$

2.2. Phương pháp đặt ẩn phụ

Để khử căn thức, người ta có thể đưa thêm một hoặc nhiều ẩn phụ. tùy theo dạng của BPT mà lựa chọn phép đặt ẩn phụ thích hợp. Các phương pháp đặt cho BPT vô tỷ cũng giống cho phương trình vô tỷ, bao gồm:

1. Dùng ẩn phụ chuyển BPT chứa căn thức, thành một BPT với một ẩn phụ.
2. Dùng ẩn phụ chuyển BPT vô tỷ thành một BPT với một ẩn phụ nhưng các hệ số vẫn còn chứa x.

3. Dùng ẩn phụ chuyển BPT vô tỷ thành một hệ BPT với hai ẩn.
4. Dùng một ẩn phụ chuyển BPT vô tỷ thành một hệ BPT gồm một ẩn phụ và một ẩn x.
5. Lượng giác hoá.

VD1: Giải BPT: $2x^2 + \sqrt{x^2 - 5x - 6} > 10x + 15$ (1)

LG: ĐK: $x \in (-\infty; -1] \cup [6; +\infty)$

(1) $\Leftrightarrow 2(x^2 - 5x - 6) + \sqrt{x^2 - 5x - 6} - 3 > 0$ Đặt $t = \sqrt{x^2 - 5x - 6}$, $t \geq 0$

BPT trở thành: $2t^2 + t - 3 > 0$ Giải BPT kết hợp với đk ta được nghiệm $t > 1$

từ đó ta được $x^2 - 5x - 7 > 0$ đây là BPT bậc 2 ta có thể giải được một cách dễ dàng!

Nhận xét: BPT vô tỷ có chứa $f(x)$ và $\sqrt{f(x)}$ ta thường đặt $\sqrt{f(x)} = t$ và giải BPT với ẩn t.

VD2: Giải BPT: $x^2 - 1 \leq 2x\sqrt{x^2 + 2x}$

LG: Đk: $x \in (-\infty; -2] \cup [0; +\infty)$

Chú ý rằng: Với $x \in (-\infty; -2] \Rightarrow 2x\sqrt{x^2 + 2x} < 0$ và $x^2 - 1 > 0$ do đó BPT vô nghiệm

Xét với $x \in [0; +\infty)$. Đặt $\sqrt{x^2 + 2x} = t > 0$ BPT trở thành: $t^2 - 2xt - 2x - 1 \leq 0$ (*)

$f(t) = t^2 - 2xt - 2x - 1$, $\Delta'_t = (x+1)^2$ do đó f(t) có 2 nghiệm: $t_1 = -1$, $t_2 = 2x+1$

Do $x \in [0; +\infty)$ nên $t_2 > t_1$ (*) $\Leftrightarrow -1 < t < 2x+1$ kết hợp với Đk ta được $0 \leq t \leq 2x+1$

Khi đó BPT trở thành $\sqrt{x^2 + 2x} \leq 2x+1$ đây là BPT cơ bản!

VD3: Giải BPT: $\sqrt{2x^2 - 6x + 8} - \sqrt{x} \leq x - 2$ (3)

LG: Đk: $x \geq 0$ Biến đổi BPT về dạng: $\sqrt{2(x-2)^2 + 2x} \leq x - 2 + \sqrt{x}$

Đặt $\begin{cases} u = \sqrt{x} \geq 0 \\ v = x - 2 \end{cases}$ Khi đó BPT trở thành: $\sqrt{2u^2 + 2v^2} \leq u + v$ (*)

(*) $\Leftrightarrow \begin{cases} u + v \geq 0 \\ 2u^2 + 2v^2 \leq (u + v)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u + v \geq 0 \\ (u - v)^2 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow u = v \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2 \geq 0 \\ \sqrt{x} = x - 2 \end{cases} \Leftrightarrow x = 4$

Vậy nghiệm của BPT là $x = 4$.

VD4: Giải BPT: $\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x} \leq 2 - \frac{x^2}{4}$ (4)

LG: Đk: $x \in [-1;1]$, Đặt $x = \cos \alpha, \alpha \in [0; \pi]$. Khi đó:

$$(4) \Leftrightarrow \sqrt{1+\cos \alpha} + \sqrt{1-\cos \alpha} \leq 2 - \frac{\cos^2 \alpha}{4} \Leftrightarrow 2 \cos \left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{4} \right) \leq 2 - \sin^2 \left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{4} \right) \cos^2 \left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{4} \right)$$

$$\Leftrightarrow \cos^4 \left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{4} \right) - \cos^2 \left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{4} \right) - 2 \cos \left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{4} \right) + 2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\cos \left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{4} \right) - 1 \right]^2 \left[\cos^2 \left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{4} \right) + 2 \cos \left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{4} \right) + 2 \right] \geq 0 \quad (*)$$

Chú ý: $\left[\cos^2 \left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{4} \right) + 2 \cos \left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{4} \right) + 2 \right] > 0 \quad \forall \alpha \in [0; \pi]$ do đó (*) đúng $\forall \alpha \in [0; \pi]$

Vậy nghiệm của BPT là $x \in [-1;1]$

Bài tập đề nghị: Giải các BPT sau:

1. $(2x-2)\sqrt{2x-1} \leq 6(x-1)$

4. $x(x-4)\sqrt{-x^2+4x} + (x-2)^2 < 2$

2. $5\sqrt{x} + \frac{5}{2\sqrt{x}} < 2x + \frac{1}{2x} + 4$

5. $\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x} \leq x$

3. $x + \frac{2x}{\sqrt{x^2-4}} > 3\sqrt{5}$

6. $\frac{1}{1-x^2} > \frac{3x}{\sqrt{1-x^2}} - 1$

2.3. Phương pháp hàm số.

Tương tự như trong phương trình ta có các hướng áp dụng sau:

Hướng 1: Thực hiện theo các bước:

Bước 1: Chuyển BPT về dạng: $f(x) > k$ (Thực hiện tương tự với $f(x) < k$)

Bước 2: Xét hàm số $y = f(x)$. Dùng lập luận khẳng định hàm số là đơn điệu. (giả sử đồng biến).

Bước 3: Nhận xét:

Với $x \leq x_0 \Leftrightarrow f(x) \leq f(x_0) = k$ do đó BPT vô nghiệm

Với $x > x_0 \Leftrightarrow f(x) > f(x_0) = k$, do đó BPT nghiệm đúng.

Vậy $x > x_0$ là nghiệm của BPT

Lưu ý: Nếu ở Bước 1 dấu của BPT là $\geq$ (tương tự với $\leq$) thì ở Bước 3 nhận xét BPT vô nghiệm với $x < x_0$ và nghiệm đúng với $x \geq x_0$

Hướng 2: Thực hiện theo các bước:

Bước 1: Chuyển BPT về dạng: $f(u) < f(v)$ (2)

Bước 2: Xét hàm số: $y = f(x)$

Dùng lập luận khẳng định hàm số đơn điệu (giả sử nghịch biến)

Bước 3: Khi đó: $(2) \Leftrightarrow u < v$ Giải BPT này tìm x .

Ví dụ 1: Giải BPT: $\sqrt{7x+7} + \sqrt{7x-6} < 13$ (1)

LG: Xét hàm số: $f(x) = \sqrt{7x+7} + \sqrt{7x-6}$ với $x \in \left[\frac{6}{7}; +\infty\right)$

$$f'(x) = \frac{7}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{7x+7}} + \frac{1}{\sqrt{7x-6}} \right) > 0 \quad \forall x \in \left[\frac{6}{7}; +\infty\right)$$

$$(1) \Leftrightarrow f(x) < 13 \Leftrightarrow f(x) < f(6) \Leftrightarrow x < 6$$

Kết hợp với điều kiện ta được nghiệm của BPT là $x \in \left[\frac{6}{7}; 6\right)$

Nhận xét: (1) có thể giải được bằng cách bình phương hai vế của BPT, nhưng rõ ràng việc sử dụng tính chất của hàm số nhanh hơn mà tránh được những biến đổi dễ gây nhầm lẫn trong quá trình giải!

Ví dụ 2: Giải BPT: $\sqrt{x^2-2x+3} - \sqrt{x^2-6x+11} > \sqrt{3-x} - \sqrt{x-1}$ (2)

LG: Đk: $x \in [1; 3]$

Viết lại BPT dưới dạng:

$$\sqrt{x^2-2x+3} + \sqrt{x-1} > \sqrt{x^2-6x+11} + \sqrt{3-x} \Leftrightarrow \sqrt{(x-1)^2+2} + \sqrt{x-1} > \sqrt{(x-3)^2+2} + \sqrt{x-3}$$

Xét hàm số $y = f(t) = \sqrt{t^2+2} + \sqrt{t}$, $f'(t) = \frac{t}{\sqrt{t^2+2}} + \frac{1}{2\sqrt{t}} > 0 \quad \forall x \in [1; 3]$

Do đó $y = f(x)$ là hàm số đồng biến trên $[1; 3]$

BPT trở thành: $f(x-1) > f(3-x) \Leftrightarrow x-1 > 3-x \Leftrightarrow x > 2$

Kết hợp với điều kiện ta được nghiệm của BPT là $x \in (2; 3]$

Bài tập đề nghị:

Giải các BPT sau:

$$1. \sqrt{x+9} + \sqrt{2x+4} > 5$$

$$3. \sqrt{x-1} + \sqrt{x^2-1} \geq (x+1)(3-x)$$

$$2. \sqrt{x} + \sqrt{x^2-1} \geq 1$$

$$4. \sqrt{x^2-2x+3} - \sqrt{x^2-6x+11} > \sqrt{3-x} - \sqrt{x-1}$$

$$5. \sqrt{3x^2-7x+3} + \sqrt{x^2-3x+4} > \sqrt{x^2-2} + \sqrt{3x^2-5x-1}$$

2.4. Phương pháp đánh giá.

Ví dụ 1: Giải BPT: $\sqrt[4]{(x-2)(4-x)} + \sqrt[4]{x-2} + \sqrt[4]{4-x} + 6x\sqrt{3x} \leq x^3 + 30$ (1)

LG: Đk: $x \in [2; 4]$

Áp dụng BĐT AM-GM (hay BĐT Cauchy) ta có:

$$\sqrt[4]{(x-2)(4-x)} \leq \sqrt{\frac{(x-2)+(4-x)}{2}} = 1 \quad (i)$$

$$6x\sqrt{3x} = 2\sqrt{27x^3} \leq 27 + x^3 \quad (ii)$$

Áp dụng BĐT Cauchy - Schwarz (hay BĐT Bunyakovsky) ta có:

$$\left(\sqrt[4]{x-2} + \sqrt[4]{4-x}\right)^2 \leq 2\left(\sqrt{x-2} + \sqrt{4-x}\right) \leq 2\sqrt{2(x-2+4-x)} = 4$$

$$\Rightarrow \sqrt[4]{x-2} + \sqrt[4]{4-x} \leq 2 \quad (iii)$$

Cộng từng vế của (i), (ii), (iii) ta thấy BPT thoả mãn với mọi $x \in [2; 4]$

Chú ý: Việc đánh giá các biểu thức có thể theo nhiều con đường khác nhau, chẳng hạn

từ $x^3 - 6x\sqrt{3x} + 30 = (x\sqrt{x} - 3\sqrt{3})^2 + 3 \geq 3$ kết hợp với (i) và (iii) cũng tìm được đáp án!

Ví dụ 2: Giải BPT: $\sqrt{x-\sqrt{x^2-1}} + \sqrt{x+\sqrt{x^2-1}} \leq 2$

LG: Đk: $x \in [1; +\infty)$

$$\text{Nhận xét rằng: } VT = \sqrt{x-\sqrt{x^2-1}} + \sqrt{x+\sqrt{x^2-1}} \geq 2\sqrt{\sqrt{x-\sqrt{x^2-1}} \cdot \sqrt{x+\sqrt{x^2-1}}} = 2$$

Do đó BPT có nghiệm khi và chỉ khi:

$$VT = 2 \Leftrightarrow \sqrt{x-\sqrt{x^2-1}} = \sqrt{x+\sqrt{x^2-1}} \Leftrightarrow x = 1$$

Vậy nghiệm của BPT là $x = 1$.

Để kết thúc chương này, người viết xin được trình bày các cách nhìn nhận khác nhau về một bất phương trình trong đề thi tuyển sinh ĐH, CĐ năm 2010. Phần này người viết trình bày theo bài viết của tác giả Phạm Bắc Phú (GV trường THPT Hải Hậu A, Nam Định) được đăng trên TH&TT số 398, 08-2010. Đây là một bài viết rất hay, chỉ qua một bài toán nhưng tác giả đã đưa ra nhiều cách nhìn nhận khác nhau, qua đó giúp ta xoá bỏ tư duy cứng nhắc trong giải toán!

Câu II.2 (TS ĐHCĐ - 2010) Giải BPT $\frac{x-\sqrt{x}}{1-\sqrt{2(x^2-x+1)}} \geq 1$ (1)

Qua bài toán này ta sẽ thấy việc chú ý đến dấu của các biểu thức trong BPT đóng vai trò rất quan trọng, nhiều khi đóng vai trò quyết định trong giải BPT (điển hình như đối với BPT (1)).

Nhận xét: Mẫu thức của vế trái trong BPT (1) luôn mang dấu âm

$$\text{Thật vậy, } 1-\sqrt{2(x^2-x+1)} = 1-\sqrt{2\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{2}} \leq 1-\sqrt{\frac{3}{2}} < 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

Kết hợp với (1) suy ra $x-\sqrt{x} < 0$ hay $x \in (0;1)$

Từ đó ta có các cách giải sau:

Cách 1: Biến đổi tương đương

$$\text{Ta có: } (1) \Leftrightarrow x-\sqrt{x} \leq 1-\sqrt{2(x^2-x+1)} \Leftrightarrow \sqrt{2(x^2-x+1)} \leq \sqrt{x}+1-x \quad (2)$$

$$\Leftrightarrow 2(x^2-x+1) \leq (\sqrt{x}+1-x)^2 \quad (\text{vì } \sqrt{x}+1-x > 0, \forall x \in (0;1))$$

$$\Leftrightarrow x^2+2x\sqrt{x}-x-2\sqrt{x}+1 \leq 0 \Leftrightarrow (x+\sqrt{x}-1)^2 \leq 0 \Leftrightarrow x+\sqrt{x}-1=0$$

$$\text{Tìm được: } \sqrt{x} = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \quad (\text{do } \sqrt{x} > 0) \text{ hay } x = \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2 = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$$

Bài tập áp dụng tương tự:

Giải các BPT sau:

$$1.1. \frac{3-2\sqrt{x^2+3x+2}}{1-2\sqrt{x^2-x+1}} > 1.$$

$$1.2. \frac{\sqrt{x}(x+\sqrt{1-x^2})}{x\sqrt{x}+1-\sqrt{x^2-x^3}} \geq 1 \quad (\text{Đs: } x = \frac{\sqrt{5}-1}{2})$$

Cách 2: Đặt ẩn phụ:

Biến đổi BPT về dạng (2)

Chia hai vế BPT (2) cho $\sqrt{x}$ có: $(1) \Leftrightarrow \sqrt{2\left(x-1+\frac{1}{x}\right)} \leq x + \frac{1}{\sqrt{x}} - \sqrt{x}$

Đặt $\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}$ thì $x + \frac{1}{x} = y^2 + 2$, ta nhận được $\sqrt{2(y^2+1)} \leq y+1$ (4)

$$\text{BPT (4)} \Leftrightarrow \begin{cases} y+1 \geq 0 \\ 2(y^2+1) \leq y^2+2y+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \geq -1 \\ (y-1)^2 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow y=1.$$

Với $y=1$ tìm được $x = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$.

Bài tập áp dụng tương tự:

Giải các phương trình sau:

2.1. $x^2 + \sqrt[3]{x^4 - x^2} = 2x + 1$. (Đs: $x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$)

2.2. $x^2 + 2x\sqrt{x - \frac{1}{x}} = 3x + 1$. (Đs: $x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$)

2.3. $\sqrt{1-4x^2} + 2\sqrt{x^2+1} = 8x$. (Đs: $x = \frac{1}{2\sqrt{2}}$).

Cách 3: Sử dụng bất đẳng thức để đánh giá.

Biến đổi BPT về dạng (2). Áp dụng BĐT Bunyakovsky ta có:

$$\left(1 \cdot \sqrt{x} + 1 \cdot (1-x)\right)^2 \leq (1^2 + 1^2) \left((\sqrt{x})^2 + (1-x)^2\right) \text{ hay } \sqrt{x} + 1 - x \leq \sqrt{2(x^2 - 2x + 1)}$$

(do $\sqrt{x} + 1 - x > 0, \forall x \in (0;1)$).

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $\frac{\sqrt{x}}{1} = \frac{1-x}{1} \Leftrightarrow x + \sqrt{x} - 1 = 0$ do đó $x = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$

Bài tập áp dụng tương tự:

3.1. $x + \sqrt{x-1} \geq 3 + \sqrt{2(x^2 - 5x + 8)}$. 3.2. $x + \frac{1}{x} + \sqrt{2-x^2} + \sqrt{2 - \frac{1}{x^2}} = 4$ (Đs: $x=1$).

3.3. $\sqrt{x^2+2x} + \sqrt{2x-1} \geq \sqrt{3x^2+4x+1}$. (Đs: $x = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$)

Cách 4: Sử dụng biểu thức liên hợp

$$(1) \Leftrightarrow x - \sqrt{x} \leq 1 - \sqrt{2(x^2 - x + 1)} \Leftrightarrow (x + \sqrt{x} - 1) + (\sqrt{2(x^2 - x + 1)} - 2\sqrt{x}) \leq 0$$

$$\Leftrightarrow (x + \sqrt{x} - 1) + \frac{2(x^2 - 3x + 1)}{\sqrt{2(x^2 - x + 1)} + 2\sqrt{x}} \leq 0 \quad (5)$$

Nhận xét rằng: $x^2 - 3x + 1 = (x - 1)^2 - x = (x + \sqrt{x} - 1)(x - \sqrt{x} - 1)$

Nên vế trái của bất phương trình (5) là:

$$\begin{aligned} & (x + \sqrt{x} - 1) \left(1 + \frac{2(x - \sqrt{x} - 1)}{\sqrt{2(x^2 - x + 1)} + 2\sqrt{x}} \right) \\ &= (x + \sqrt{x} - 1) \frac{\sqrt{2(x^2 - x + 1)} - (2 - 2x)}{\sqrt{2(x^2 - x + 1)} + 2\sqrt{x}} \\ &= (x + \sqrt{x} - 1) \frac{-2(x^2 - 3x + 1)}{(\sqrt{2(x^2 - x + 1)} + 2\sqrt{x})(\sqrt{2(x^2 - x + 1)} + (2 - 2x))} \\ &= (x + \sqrt{x} - 1)^2 \frac{2(\sqrt{x} + 1 - x)}{(\sqrt{2(x^2 - x + 1)} + 2\sqrt{x})(\sqrt{2(x^2 - x + 1)} + (2 - 2x))} \end{aligned}$$

Nhận thấy các nhân tử dưới mẫu và $2(\sqrt{x} + 1 - x)$ luôn dương với mọi $x \in (0; 1)$, nên

$$(1) \Leftrightarrow (x + \sqrt{x} - 1)^2 \leq 0 \Leftrightarrow x + \sqrt{x} - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}$$

Bài tập áp dụng tương tự:

Giải các phương trình sau:

4.1. $\sqrt{5x-1} + \sqrt[3]{9-x} = 2x^2 + 3x - 1$. (Đs: $x = 1$)

4.2. $2(\sqrt{1-5x} - \sqrt{x} - \sqrt{x-x^2}) = x - 1$. (Đs: $x = 3 - 2\sqrt{2}$).

Tài liệu tham khảo:

- [1] Doãn Minh Cường (Tuyển chọn và giới thiệu), Giới thiệu đề tuyển sinh vào ĐH, NXB ĐH Quốc Gia Hà Nội, 2005.
- [2] Hoàng Kỳ (Chủ biên) - Hoàng Thanh Hà, ĐSSC và thực hành giải toán, NXB ĐH Sư Phạm, 2005.
- [3] Phan Huy Khải, Phương pháp giải toán trọng tâm, NXB ĐH Sư Phạm, 2009.
- [4] Phan Huy Khải, Phương trình và bất phương trình, NXB Giáo dục, 2009.
- [5] Trần Phương - Lê Hồng Đức, Tuyển tập các chuyên đề luyện thi môn toán: ĐSSC, NXB Hà Nội, 2007.
- [6] Trần Thành Minh (Chủ biên), Giải toán Đại số và giải tích 11, NXB Giáo Dục, 2005.
- [7] Nguyễn Quang Trung, Dạy học phân hoá qua tổ chức ôn tập một số chủ đề phương trình, BPT vô tỉ. (Luận văn thạc sĩ), ĐHSP Thái Nguyên, 2007.
- [8] Tạp chí Toán học & Tuổi trẻ.
- [9] [Http://www.mathvn.com/](http://www.mathvn.com/)
- [10] [Http://www.vnmath.com/](http://www.vnmath.com/)