Phương pháp SOS, SS và một số bất đẳng thức với đẳng thức ko tại tâm

10maths_tp0609

Trung học phổ thông năng khiếu Trần Phú, Hải Phòng

May 25th 2007

Như chúng ta đã biết SOS và SS là hai phương pháp khá hiệu quả với các bất đẳng thức 3 biến không chứa căn, nhưng một yếu tố tiên quyết để đưa về dạng chuẩn của phương pháp là bất đẳng thức phải có dấu bằng đạt tại tâm. Vậy với những bài toán không có đẳng thức tại tâm thì sao? Bài viết này xin được đưa ra một số ví dụ quy từ bất đẳng thức tại biên về chứng minh bất đẳng thức tại tâm, công việc tưởng chừng khó khăn hơn này lại giúp ta xác định được một đường lối quen thuộc và rõ ràng hơn để chứng minh. Các ví dụ sau có thể giúp các bạn nhìn nhận rõ hơn về kỹ thuật này.

Ví dụ 1: Cho a, b, c là các số thực không âm có tổng bằng 3. Chứng minh rằng:

$$a^2(b+c) + b^2(c+a) + c^2(a+b) \leq \frac{27}{4}$$

Lời giải.
Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với:

$$a^2(b+c) + b^2(c+a) + c^2(a+b) \leq \frac{1}{4}(a+b+c)^3$$

Giả sử $c = min(a, b, c)$, ta chứng minh bất đẳng thức mạnh hơn sau:

$$(a+b+c)^3 \geq 4\left[a^2(b+c) + b^2(c+a) + c^2(a+b)\right] + 3abc$$

$$\Leftrightarrow (a+b-c)(a-b)^2 + c(a-c)(b-c) \geq 0$$

Bất đẳng thức được chứng minh.

Ví dụ 2: Cho a, b, c là các số thực không âm thoả mãn $ab + bc + ca = 1$. Chứng minh bất đẳng thưc sau:

$$\frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} + \frac{1}{a+b} \geq \frac{5}{2} \qquad (*)$$

Lời giải.

Ta có:

$$(*) \Leftrightarrow (ab+bc+ca)\left(\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}+\frac{1}{a+b}\right)^2 \geq \frac{25}{4}$$

Ta chứng minh bất đẳng thức chặt hơn:

$$\begin{aligned}
(ab+bc+ca)\left(\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}+\frac{1}{a+b}\right)^2 &\geq \frac{25}{4}+\frac{4abc}{(a+b)(b+c)(c+a)} \\
\Leftrightarrow (ab+bc+ca)\left(\frac{1}{(a+b)^2}+\frac{1}{(b+c)^2}+\frac{1}{(c+a)^2}\right)+\frac{4(a+b+c)(ab+bc+ca)}{(a+b)(b+c)(c+a)} &\geq \frac{9}{4}+4+\frac{4abc}{(a+b)(b+c)(c+a)}
\end{aligned}$$

Chú ý rằng:

$$\frac{(a+b+c)(ab+bc+ca)}{(a+b)(b+c)(c+a)} = 1+\frac{abc}{(a+b)(b+c)(c+a)}$$

Do đó ta chỉ cần chứng minh:

$$(ab+bc+ca)\left(\frac{1}{(a+b)^2}+\frac{1}{(b+c)^2}+\frac{1}{(c+a)^2}\right) \geq \frac{9}{4}$$

Đây là bất đẳng thức Iran 96 quen thuộc, bất đẳng thức được chứng minh.

Ví dụ 3: Chứng minh bất đẳng thức sau với mọi số thực không âm a, b, c:

$$\frac{a(b+c)}{b^2+c^2}+\frac{b(c+a)}{c^2+a^2}+\frac{c(a+b)}{a^2+b^2} \geq 2$$

Lời giải.

Bất đẳng thức mạnh hơn vẫn đúng:

$$\frac{a(b+c)}{b^2+c^2}+\frac{b(c+a)}{c^2+a^2}+\frac{c(a+b)}{a^2+b^2} \geq 2+\frac{8a^2b^2c^2}{(a^2+b^2)(b^2+c^2)(c^2+a^2)} \qquad (*)$$

Lời giải 1:

$$\begin{aligned}
(*) \Leftrightarrow \sum_{sym}\left[a(b+c)(a^2+b^2)(a^2+c^2)\right] &\geq 2(a^2+b^2)(b^2+c^2)(c^2+a^2)+8a^2b^2c^2 \\
\Leftrightarrow \sum_{sym} a^5(b+c)+2\sum_{sym} b^2c^2+abc\sum_{sym} a^2(b+c) &\geq 2\sum_{sym} a^4(b^2+c^2)+12a^2b^2c^2
\end{aligned}$$

Giả sử $c = min(a,b,c)$ Ta có:

$$VT - VP = M(a-b)^2+N(a-c)(b-c)$$

Trong đó:

$$\begin{aligned}
M &= 2(a^2+b^2+c^2)(a+b-c)c \geq 0 \\
N &= (a^2+b^2+c^2)(a-b)^2+(a^3+b^3)c+(a+b)c^3+2c(a^2b+b^2c-a^2c-b^2c) \geq 0
\end{aligned}$$

Bất đẳng thức được chứng minh.

Lời giải 2: Đưa bất đẳng thức cần chứng minh về dạng:

$$S_a(b-c)^2 + S_b(c-a)^2 + S_c(a-b)^2 \geq 0$$

Với:

$$\begin{aligned} S_a &= \frac{bc-a^2}{(a^2+b^2)(a^2+c^2)} + \frac{a^2(b+c)^2}{(a^2+b^2)(b^2+c^2)(c^2+a^2)} \\ &= \frac{bc(2a^2+b^2+c^2)}{(a^2+b^2)(b^2+c^2)(c^2+a^2)} \geq 0 \end{aligned}$$

Tương tự ta có $S_b, S_c \geq 0$, bất đẳng thức được chứng minh.

Ví dụ 4: Cho a, b, c là các số thực không âm. Chứng minh rằng:

$$(a+b+c)\left(\frac{a}{b^2+c^2} + \frac{b}{c^2+a^2} + \frac{c^2}{a^2+b^2}\right) \geq 4$$

Lời giải.

Bất đẳng thức hiển nhiên đúng nếu ta chứng minh được:

$$(a+b+c)\left(\frac{a}{b^2+c^2} + \frac{b}{c^2+a^2} + \frac{c^2}{a^2+b^2}\right) \geq 4 + \frac{4a^2b^2c^2}{(a^2+b^2)(b^2+c^2)(c^2+a^2)} \qquad (*)$$

Lời giải 1:

$$(*) \Leftrightarrow \sum_{sym} \frac{a^2}{b^2+c^2} + \sum_{sym} \frac{a(b+c)}{b^2+c^2} \geq 4 + \frac{4a^2b^2c^2}{(a^2+b^2)(b^2+c^2)(c^2+a^2)}$$

Trong ví dụ 3 ta đã chứng minh:

$$\frac{a(b+c)}{b^2+c^2} + \frac{b(c+a)}{c^2+a^2} + \frac{c(a+b)}{a^2+b^2} \geq 2 + \frac{8a^2b^2c^2}{(a^2+b^2)(b^2+c^2)(c^2+a^2)}$$

Công việc còn lại là chứng minh:

$$\begin{aligned} \frac{a^2}{b^2+c^2} + \frac{b^2}{c^2+a^2} + \frac{c^2}{a^2+b^2} + \frac{4a^2b^2c^2}{(a^2+b^2)(b^2+c^2)(c^2+a^2)} &\geq 2 \\ \Leftrightarrow (a^2+b^2-c^2)(a^2-b^2)^2 + c^2(a^2-c^2)(b^2-c^2) &\geq 0 \end{aligned}$$

Giả sử $c = min(a, b, c)$ bất đẳng thức cuối hiển nhiên đúng.

Lời giải 2:

Bất đẳng thức có thể viết lại dưới dạng:

$$S_a(b-c)^2 + S_b(c-a)^2 + S_c(a-b)^2 \geq 0$$

Trong đó:

$$\begin{aligned}
S_a &= \frac{(b+c)^2}{2(a^2+b^2)(a^2+c^2)} + \frac{bc-a^2}{(a^2+b^2)(a^2+c^2)} + \frac{a^2(b+c)^2}{2(a^2+b^2)(b^2+c^2)(c^2+a^2)} \\
S_b &= \frac{(c+a)^2}{2(b^2+c^2)(b^2+c^2)} + \frac{ca-b^2}{(b^2+c^2)(b^2+a^2)} + \frac{b^2(c+a)^2}{2(a^2+b^2)(b^2+c^2)(c^2+a^2)} \\
S_c &= \frac{(a+b)^2}{2(c^2+a^2)(c^2+b^2)} + \frac{ab-c^2}{(c^2+a^2)(c^2+b^2)} + \frac{c^2(a+b)^2}{2(a^2+b^2)(b^2+c^2)(c^2+a^2)}
\end{aligned}$$

Giả sử $a \geq b \geq c$, ta chứng minh được $S_b, S_b + S_a, S_b + S_c \geq 0$, áp dụng tiêu chuẩn 2 của phương pháp SOS ta có điều phải chứng minh.

Ví dụ 5: Chứng minh bất đẳng thức sau với ọi số thực không âm a, b, c:

$$\frac{a^2+bc}{b^2+c^2} + \frac{b^2+ca}{c^2+a^2} + \frac{c^2+ab}{a^2+b^2} \geq \frac{5}{2}$$

Lời giải.

Ta chứng minh bất đẳng thức mạnh hơn:

$$\frac{a^2+bc}{b^2+c^2} + \frac{b^2+ca}{c^2+a^2} + \frac{c^2+ab}{a^2+b^2} \geq \frac{5}{2} + \frac{4a^2b^2c^2}{(a^2+b^2)(b^2+c^2)(c^2+a^2)}$$

Lời giải 1:

Bất đẳng thức tương đương với:

$$\begin{aligned}
2\sum_{sym}\left[(a^2+bc)(a^2+b^2)(a^2+c^2)\right] &\geq (a^2+b^2)(b^2+c^2)(c^2+a^2) + 8a^2b^2c^2 \\
\Leftrightarrow 2\sum_{sym} a^6 + 2\sum_{sym} b^3c^3 + 2abc\sum_{sym} a^3 + 2abc\sum_{sym} a^2(b+c) &\geq 3\sum_{sym} a^4(b^2+c^2) + 12a^2b^2c^2
\end{aligned}$$

Giả sử $c = min(a, b, c)$, ta có:

$$VT - VP = M(a-b)^2 + N(a-c)(b-c)$$

Với:

$$\begin{aligned}
M &= 2(a^4+b^4) + 4ab(a^2+b^2) + a^2b^2 + abc^2 + (a+b)c^3 + (2a^2b^2 - a^2c^2 - b^2c^2) + 2c(a^2b + ab^2 - a^2c - b^2c) \geq 0 \\
N &= c\left[(3ab+2c^2)(a+b) + 4abc + 2c^3 + (a^2b + ab^2 - a^2c - b^2c)\right] \geq 0
\end{aligned}$$

Bất đẳng thức được chứng minh.

Lời giải 2:

Đưa bất đẳng thức về dạng SOS:

$$S_a(b-c)^2 + S_b(c-a)^2 + S_c(a-b)^2 \geq 0$$

Trong đó:

$$\begin{aligned}
S_a &= \frac{(b+c)^2}{2(a^2+b^2)(a^2+c^2)} - \frac{1}{2(b^2+c^2)} + \frac{a^2(b+c)^2}{2(a^2+b^2)(b^2+c^2)(c^2+a^2)}\\
S_b &= \frac{(c+a)^2}{2(b^2+c^2)(b^2+a^2)} - \frac{1}{2(c^2+a^2)} + \frac{b^2(c+a)^2}{2(a^2+b^2)(b^2+c^2)(c^2+a^2)}\\
S_c &= \frac{(a+b)^2}{2(c^2+a^2)(c^2+b^2)} - \frac{1}{2(a^2+b^2)} + \frac{c^2(a+b)^2}{2(a^2+b^2)(b^2+c^2)(c^2+a^2)}
\end{aligned}$$

Giả sử $a \geq b \geq c$ ta chứng minh được $S_b, S_b + S_a, S_b + S_c \geq 0$, áp dụng tiêu chuẩn 2 ta có điều phải chứng minh.

Ví dụ 6: Cho a, b, c là các số thực không âm thoả mãn $a + b + c = 1$. Chứng minh rằng:

$$(a^2+b^2)(b^2+c^2)(c^2+a^2) \leq \frac{1}{32}$$

Lời giải.
Bất đẳng thức tương đương với:

$$(a^2+b^2)(b^2+c^2)(c^2+a^2) \leq \frac{1}{32}(a+b+c)^6$$

Ta chứng minh bất đẳng thức chặt hơn sau:

$$\begin{aligned}
(a+b+c)^6 &\geq 32(a^2+b^2)(b^2+c^2)(c^2+a^2) + 473a^2b^2c^2\\
\Leftrightarrow (a+b+c)^6 &\geq 32\left[a^4(b^2+c^2) + b^4(c^2+a^2) + c^4(a^2+b^2)\right] + 537a^2b^2c^2
\end{aligned}$$

Giả sử $c = min(a, b, c)$.
Bất đẳng thức có thể viết lại dưới dạng:

$$M(a-b)^2 + N(a-c)(b-c) \geq 0$$

Trong đó:

$$\begin{aligned}
M &= (a+b)^4 + 10(a^3+b^3)c + 17(a+b)abc + 3(a+b)c^3 + 147abc^2 + 7c^4 + 21c(a^2b + ab^2 - a^2c - b^2c) \geq 0\\
N &= 4(a-b)^4 + c\left[(a+b)(79ab + 7c^2) + 57abc + c^3 + 17(a^2b + ab^2 - a^2c - b^2c)\right] \geq 0
\end{aligned}$$

Bất đẳng thức được chứng minh.

Ví dụ 7: Chứng minh bất đẳng thức sau với mọi số thực không âm a, b, c:

$$(a+b)(b+c)(c+a) \geq 2\sqrt{(a^2+bc)(b^2+ca)(c^2+ab)}$$

Lời giải .

Bất đẳng thức hiển nhiên đúng nếu ta chứng minh được:

$$(a+b)^2(b+c)^2(c+a)^2 \geq 4(a^2+bc)(b^2+ca)(c^2+ab)+32a^2b^2c^2$$

Giả sử $c = min(a,b,c)$, ta có:

$$VT - VP = (a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2 + 8abc^2(a-b)^2 + 4abc(a+b)(a-c)(b-c) \geq 0$$

Do đó ta có điều phải chứng minh.

Ví dụ 8: Chứng minh rằng với mọi số thực không âm a,b,c ta có:

$$\frac{a(b+c)}{a^2+bc}+\frac{b(c+a)}{b^2+ca}+\frac{c(a+b)}{c^2+ab} \geq 2$$

Lời giải.

Ta sẽ chứng minh:

$$\begin{aligned}
\frac{a(b+c)}{a^2+bc}+\frac{b(c+a)}{b^2+ca}+\frac{c(a+b)}{c^2+ab} &\geq 2+\frac{8a^2b^2c^2}{(a^2+bc)(b^2+ca)(c^2+ab)}\\
\Leftrightarrow \sum_{sym}\left[a(b+c)(b^2+ca)(c^2+ab)\right] &\geq 2(a^2+bc)(b^2+ca)(c^2+ab)+8a^2b^2c^2\\
\Leftrightarrow \sum_{sym}a^4(b^2+c^2)+3abc\sum_{sym}a^2(b+c) &\geq \sum_{sym}b^3c^3+2abc\sum_{sym}a^3+12a^2b^2c^2
\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \left[(ac+bc-ab)^2+c^2(4ab+c^2-2ac-2bc)\right](a-b)^2+abc(a+b)(a-c)(b-c) \geq 0$$

Giả sử $c = min(a,b,c)$ bất đẳng thức cuối hiển nhiên đúng, ta có điều cần chứng minh.

Ví dụ 9: Cho a,b,c là các số thực không âm. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{b^2+c^2}+\frac{b}{c^2+a^2}+\frac{c}{a^2+b^2} \geq \frac{4}{5}\left(\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}+\frac{1}{a+b}\right)$$

Lời giải.

Ta chứng minh bất đẳng thức mạnh hơn:

$$\begin{aligned}
\frac{a}{b^2+c^2}+\frac{b}{c^2+a^2}+\frac{c}{a^2+b^2} &\geq \frac{4}{5}\left(\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}+\frac{1}{a+b}\right)+\frac{36a^2b^2c^2}{5(a^2+b^2)(b^2+c^2)(c^2+a^2)(a+b+c)}\\
\Leftrightarrow \sum_{sym}\frac{a(b+c)}{b^2+c^2}+\sum_{sym}\frac{a^2}{b^2+c^2} &\geq \frac{12}{5}+\sum_{sym}\frac{a}{b+c}+\frac{36a^2b^2c^2}{5(a^2+b^2)(b^2+c^2)(c^2+a^2)} \qquad (*)
\end{aligned}$$

Ta chứng minh được:

$$\frac{4}{5}\left(\frac{a^2}{b^2+c^2}+\frac{b^2}{c^2+a^2}+\frac{c^2}{a^2+b^2}\right)\geq\frac{4}{5}\left(\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\right) \quad (1)$$

$$\frac{1}{5}\left(\frac{a^2}{b^2+c^2}+\frac{b^2}{c^2+a^2}+\frac{c^2}{a^2+b^2}+\frac{4a^2b^2c^2}{(a^2+b^2)(b^2+c^2)(c^2+a^2)}\right)\geq\frac{1}{5}.2 \quad (2)$$

$$\frac{a(b+c)}{b^2+c^2}+\frac{b(c+a)}{c^2+a^2}+\frac{c(a+b)}{a^2+b^2}\geq 2+\frac{8a^2b^2c^2}{(a^2+b^2)(b^2+c^2)(c^2+a^2)} \quad (3)$$

Cộng vế (1) (2) và (3) suy ra $(*)$, bất đẳng thức được chứng minh.

Ví dụ 10: Cho a, b, c là các số thực không âm thoả mãn $a+b+c=3$. Chứng minh rằng:

$$a^2b+b^2c+c^2a\leq 4$$

Lời giải.

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với:

$$a^2b+b^2c+c^2a\leq\frac{4}{27}(a+b+c)^3$$

Giả sử $c=min(a,b,c)$, ta chứng minh bất đẳng thức mạnh hơn:

$$4(a+b+c)^3\geq 27(a^2b+b^2c+c^2a)+27abc$$

$$\Leftrightarrow(4a+4b+c)(a-b)^2+(16b+4c-11a)(a-c)(b-c)\geq 0$$

Chú ý rằng ta có đẳng thức sau với mọi số thực a, b, c:

$$P(a-c)(b-c)(a-b)^2-P(a-b)^2(a-c)(b-c)=0$$

Cho $P=-\dfrac{4(a+b)}{ab}$ ta được:

$$-\frac{4(a+b)(a-c)(b-c)}{ab}(a-b)^2+\frac{4(a+b)(a-b)^2}{ab}(a-c)(b-c)=0$$

Do đó bất đẳng thức có thể viết lại dưới dạng:

$$M(a-b)^2+N(a-c)(b-c)\geq 0$$

Trong đó:

$$\begin{aligned} M &= 4a+4b+c-\frac{4(a+b)(a-c)(b-c)}{ab}=\frac{c(4a^2+4b^2+9ab-4ac-4bc)}{ab}\geq 0\\ N &= 16b+4c-11a+\frac{4(a+b)(a-b)^2}{ab}=\frac{(4a+b)(a-2b)^2+4abc}{ab}\geq 0\end{aligned}$$

Bất đẳng thức được chứng minh.

Ví dụ 11: Cho a, b, c là các số thực không âm thoả mãn $a + b + c = 3$. Chứng minh rằng:

$$(a^2b + b^2c + c^2a) + 2(ab^2 + bc^2 + ca^2) \le 6\sqrt{3} \qquad (*)$$

Lời giải.

$$(*) \Leftrightarrow (a^2b + b^2c + c^2a) + 2(ab^2 + bc^2 + ca^2) \le 2\sqrt{3}\frac{(a+b+c)^3}{9}$$

Ta chứng minh bất đẳng thức mạnh hơn:

$$9(a^2b + b^2c + c^2a) + 18(ab^2 + bc^2 + ca^2) + (54\sqrt{3} - 81)abc \le 2\sqrt{3}(a+b+c)^3$$

Giả sử $c = min(a, b, c)$ ta có:

$$VP - VT = M(a-b)^2 + N(a-c)(b-c)$$

Với:

$$\begin{aligned}
M &= 2\sqrt{3}(a+b) + \left(14\sqrt{3} - 27\right)c - \frac{2\sqrt{3}(a+b)(a-c)(b-c)}{ab} \\
&= \frac{\sqrt{3}c\left(2a^2 + 2b^2 - 2ac - 2bc + (18 - 9\sqrt{3})ab\right)}{ab} \ge 0 \\
N &= \left(8\sqrt{3} - 9\right)a + \left(8\sqrt{3} - 19\right)b + 2\sqrt{3}c + \frac{2\sqrt{3}(a+b)(a-b)^2}{ab} \\
&= \frac{\sqrt{3}\left(2a + \left(2 + \sqrt{3}\right)b\right)\left(a + \left(1 - \sqrt{3}\right)b\right)^2 + 2\sqrt{3}abc}{ab} \ge 0
\end{aligned}$$

Bất đẳng thức được chưúng minh.

Ví dụ 12: Tìm hằng số k tốt nhất sao cho bất đẳng thức sau đúng với mọi số thực không âm a, b, c:

$$k(a+b+c)^4 \ge (a^3b + b^3c + c^3a) + abc(a+b+c)$$

Lời giải.
Cho $a = 3, b = 1, c = 0$ suy ra $k \ge \dfrac{27}{256}$. Ta chứng minh đây chính là giá trị cần tìm, nghĩa là:

$$\frac{27}{256}(a+b+c)^4 \ge (a^3b + b^3c + c^3a) + abc(a+b+c)$$

Không mất tính tổng quát, giả sử $c = min(a, b, c)$. Ta chứng minh bất đẳng thức mạnh hơn:

$$\begin{aligned}
& 27(a+b+c)^4 \ge 256(a^3b + b^3c + c^3a) + 473abc(a+b+c) \\
\Leftrightarrow\ & M(a-b)^2 + N(a-c)(b-c) \ge 0
\end{aligned}$$

Với:

$$\begin{aligned} M &= 27(c+b)^2 - 40ac - 40bc + 189c^2 - \frac{\left[27(a+b)^2 + 68(a+b)c\right](a-c)(b-c)}{ab} \\ N &= 216ab - 148a^2 + 108b^2 - 121ac + 135bc + 27c^2 + \frac{\left[27(a+b)^2 + 68(a+b)c\right](a-b)^2}{ab} \end{aligned}$$

Ta có:

$$\begin{aligned} M.ab &= c\left[27(a+b)(a-b)^2 + 189abc + 41c(a+b)^2 - 68c^2(a+b)\right] \geq 0 \\ N.ab &= (27a^2 + 14ab + 3b^2)(a-3b)^2 + c(68a^3 + 68b^3 - 189a^2b + 67ab^2) + 27abc^2 \end{aligned}$$

Nếu $68a^3 + 68b^3 - 189a^2b + 67ab^2 \geq 0$ bất đẳng thức hiển nhiên đúng.
Nếu $68a^3 + 68b^3 - 189a^2b + 67ab^2 \leq 0$

$$N.ab \geq (27a^2 + 14ab + 3b^2)(a-3b)^2 + b(68a^3 + 68b^3 - 189a^2b + 67ab^2)$$

Dùng đạo hàm kiểm tra được

$$(27a^2 + 14ab + 3b^2)(a-3b)^2 + b(68a^3 + 68b^3 - 189a^2b + 67ab^2) \geq 0$$

Bất đẳng thức được chứng minh, ta có $k_{min} = \dfrac{27}{256}$.

Ví dụ 13: Tìm hằng số k tốt nhất sao cho bất đẳng thức sau đúng với mọi số thực không âm a, b, c:

$$k(a+b+c)^4 \geq (a^3b + b^3c + c^3a) + (a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) + abc(a+b+c)$$

Lời giải.
Cho $a = 2, b = 1, c = 0$ suy ra $k \geq \dfrac{4}{27}$. Ta sẽ chứng minh đây chính là giá trị cần tìm, nghĩa là:

$$\frac{4}{27}(a+b+c)^4 \geq (a^3b + b^3c + c^3a) + (a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) + abc(a+b+c)$$

Không mất tính tổng quát, giả sử $c = min(a, b, c)$. Ta chứng minh bất đẳng thức chặt hơn sau:

$$4(a+b+c)^4 \geq 27(a^3b + b^3c + c^3a) + 27(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) + 54abc(a+b+c)$$

$$\Leftrightarrow M(a-b)^2 + N(a-c)(b-c) \geq 0$$

Trong đó:

$$\begin{aligned} M &= 4(a^2+b^2) + 13c^2 + 20ab - 7c(a+b) - \frac{(4a^2 + 4b^2 + 20ab + 7ac)(a-c)(b-c)}{ab} \\ &= \frac{c\left[(a+b)(4a^2 + 4b^2 + 13ab + 7ac) - 7a^2b - c(4a^2 + 4b^2 + 7ab + 7ac)\right]}{ab} \geq 0 \\ N &= 4b^2 + 4c^2 - 23a^2 - 7ac + 29ab + 20bc + \frac{(4a^2 + 4b^2 + 20ab + 7ac)(a-b)^2}{ab} \\ &= \frac{(a+b)(4a+b)(a-2b)^2 + ac\left[4bc + a^2 + 3b^2 + 3ab + 6(a-2b)^2\right]}{ab} \geq 0 \end{aligned}$$

Bất đẳng thức được chứng minh, ta có $k_{min} = \dfrac{4}{27}$.

Một số bài tập áp dụng:

Bài 1: Cho a, b, c là các số thực không âm thoả mãn $a + b + c = 2$. Chứng minh rằng:

$$(a^2 + bc)(b^2 + ca)(c^2 + ab) \leq 1$$

Bài 2: Chứng minh bất đẳng thức sau với mọi số thực không âm a, b, c:

$$\frac{ab + ac + 4bc}{b^2 + c^2} + \frac{bc + ba + 4ca}{c^2 + a^2} + \frac{ca + cb + 4ab}{a^2 + b^2} \geq 4$$

Bài 3: Cho a, b, c là các số thực không âm thoả mãn $a + b + c = 2$. Chứng minh rằng:

$$a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 + abc \leq 1$$

Bài 4: Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức sau với a, b, c là các số thực không âm $(k \geq 0)$:

$$F = \frac{a + kb}{b + kc} + \frac{b + kc}{a + kc} + \frac{c + ka}{b + kc}$$