

ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI TỈNH NGHỆ AN
NĂM HỌC 2012 -2013

Bài 1.

- a) Cho hàm số $y = \frac{2x-1}{x+1}$ có đồ thị (C) và điểm $P(2;5)$ Tìm tất cả các giá trị của m để đường thẳng $y = -x + m$ cắt đồ thị (C) tại hai điểm phân biệt A, B sao cho tam giác PAB đều.

Bài 2.

- 1) Giải phương trình $\frac{\sqrt{x+1}-2}{\sqrt[3]{2x+1}-3} = \frac{1}{x+2}$
- 2) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2 + y^2 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = 5 \\ (xy-1)^2 = x^2 - y^2 + 2 \end{cases}$

Bài 3.

- 1) Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a. Hình chiếu vuông góc của A' lên mặt phẳng ABC trùng với trọng tâm tam giác ABC, Biết khoảng cách giữa hai đường thẳng AA' và BC bằng $\frac{a\sqrt{3}}{4}$. Tính theo a thể tích khối lăng trụ
- 2) Cho tứ diện ABCD. G là trọng tâm tam giác BCD. Mặt phẳng (α) qua trung điểm I của AG cắt cạnh AB, AC, AD tại các điểm khác A. Gọi $h_A; h_B; h_C; h_D$ là khoảng cách từ A, B, C, D đến mặt phẳng (α) . Chứng minh rằng: $\frac{h_B^2 + h_C^2 + h_D^2}{3} \geq h_A^2$

- Bài 4.** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ OXY, Cho điểm $A(-1; -1)$ và đường tròn (T) : $(x-3)^2 + (y-2)^2 = 25$. Gọi B, C là hai điểm phân biệt trên (T) khác A. Viết phương trình đường thẳng BC, biết I(1;1) là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC

- Bài 5.** Cho các số thực dương a, b, c. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{2}{a + \sqrt{ab} + \sqrt[3]{abc}} - \frac{3}{\sqrt{a+b+c}}$$

Hết

Bài I

Phương trình hoành độ giao điểm : $x^2 + (3 - m)x - (m + 1) = 0$

Do $\Delta_m = m^2 - 2m + 13 > 0, \forall m$ nên đường thẳng Δ luôn cắt (C) tại hai điểm phân biệt A, B Tam giác

$$ABC \text{ đều} \Leftrightarrow d(p; (\Delta)) = \frac{\sqrt{3}}{2} |\vec{AB}|$$

$$\Leftrightarrow |m - 7| = \sqrt{3} \sqrt{(x_1 - x_2)^2}$$

$$\Leftrightarrow m^2 - 14m + 49 = 3[(m - 3)^2 + 4(m + 1)]$$

$$\Leftrightarrow 2m^2 + 8m - 10 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = -5 \end{cases}$$

Bài II.1

$$\text{ĐK : } \begin{cases} x \geq -1 \\ x \neq 13 \end{cases}$$

Phương trình tương đương với : $(x + 1)\sqrt{x + 1} + \sqrt{x + 1} = (2x + 1) + \sqrt[3]{2x + 1}$

Đặt : $a = \sqrt{x + 1}; b = \sqrt[3]{2x + 1}$ ($a \geq 0$) ta có : $a^3 + a = b^3 + b \Leftrightarrow (a - b)(a^2 + ab + b^2 + 1) = 0 \Leftrightarrow a = b$

$$\sqrt{x + 1} = \sqrt[3]{2x + 1} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -\frac{1}{2} \\ (x + 1)^3 = (2x + 1)^2 \end{cases}$$

Với $a = b$, ta có :

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -\frac{1}{2} \\ x^3 - x^2 - x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

Bài II.2

$$\text{Điều kiện : } \begin{cases} x \neq 0 \\ y \neq 0 \end{cases} \quad \text{Ta có : (1)} \Leftrightarrow \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{y}\right)^2 = 5$$

Ta có : (2) $\Leftrightarrow x^2y^2 - 2xy + 1 = x^2 - y^2 + 2$

$$\Leftrightarrow x^2y^2 - x^2 + y^2 - 1 = 2xy \Leftrightarrow (x^2 + 1)(y^2 - 1) = 2xy \Leftrightarrow \left(x + \frac{1}{x}\right)\left(y - \frac{1}{y}\right) = 2$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} a = x + \frac{1}{x} \\ b = y - \frac{1}{y} \end{cases} \quad (|a| \geq 2)$$

$$\text{Khi đó ta có hệ : } \begin{cases} a^2 + b^2 = 5 \\ ab = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b = 3 \\ ab = 2 \\ a + b = -3 \\ ab = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -2; b = -1 \\ a = 2; b = -1 \end{cases} \quad (\text{Do } |a| \geq 2)$$

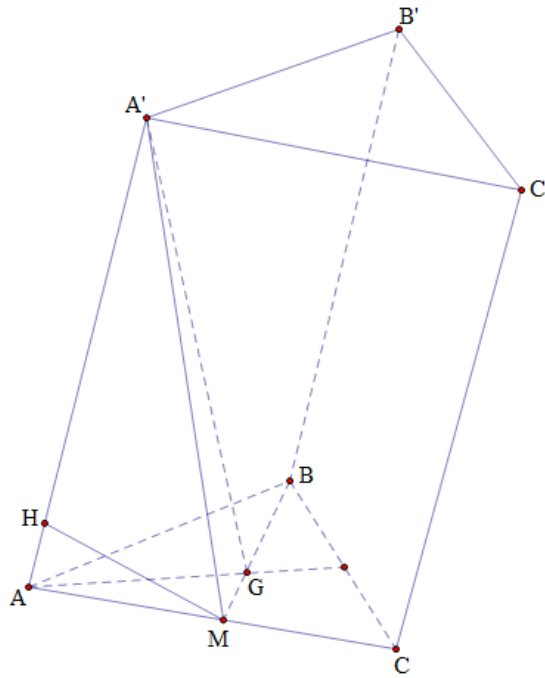
$$+) \text{ Với : } \begin{cases} a = -2 \\ b = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

$$+) \text{ Với : } \begin{cases} a = 2 \\ b = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

Bài III.1

Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC và M là trung điểm của BC .

Theo bài ra ta có $A'G \perp (ABC)$ nên $A'G \perp BC$.



Hình 1: Câu III.1

Lại có $AM \perp BC$ do đó $BC \perp (A'M)$. Trong $mp(A'M)$ kẻ $MH \perp AA'$ thì ta cũng có $BC \perp MH$.
Suy ra $d_{AA',BC} = MH = \frac{a\sqrt{3}}{4}$.

Tam giác ABC đều cạnh a suy ra $AM = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, $AG = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Đặt $AA' = x$, ta có $A'G = \sqrt{x^2 - \frac{a^2}{3}}$.

Trong tam giác $AA'M$ ta có: $MH \cdot AA' = A'G \cdot AM \Leftrightarrow \frac{a\sqrt{3}}{4} \cdot x = \sqrt{x^2 - \frac{a^2}{3}} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow x = \frac{2a}{3}$.

Từ đó ta tính được $A'G = \frac{a}{3}$. Diện tích tam giác ABC là: $S_{ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

Vậy thể tích khối lăng trụ: $V = A'G \cdot S_{ABC} = \frac{a^3\sqrt{3}}{12}$.

Bài III.2

Gọi $B_1; C_1; D_1$ lần lượt là giao của α .

Đặt $\frac{AB_1}{AB} = x; \frac{AC_1}{AC} = y; \frac{AD_1}{AD} = z$

Khi đó: $\frac{BB_1}{B_1A} = \frac{1-x}{x}; \frac{CC_1}{C_1A} = \frac{1-y}{y}; \frac{DD_1}{D_1A} = \frac{1-z}{z}$

Khi đó: $h_B = \frac{1-x}{x}h_A; h_C = \frac{1-y}{y}h_A; h_D = \frac{1-z}{z}h_A$

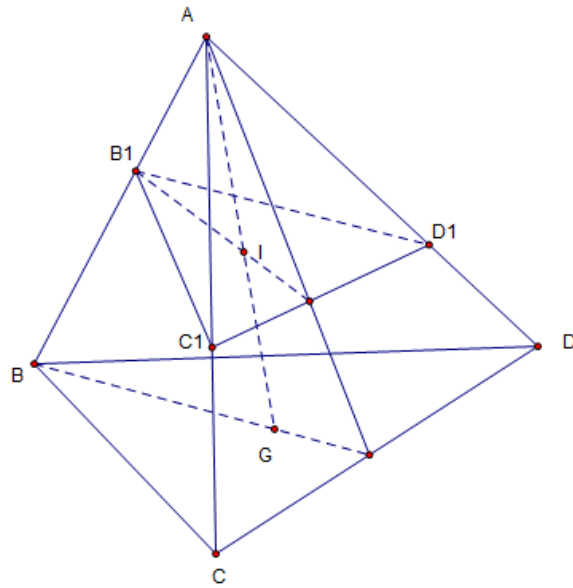
$\text{CPM} \Leftrightarrow \frac{1-x^2}{x} + \frac{1-y^2}{y} + \frac{1-z^2}{z} \geq 3(*)$

Lại có: $\frac{V \cdot AB_1IC_1}{V \cdot ABGC} = \frac{xy}{2}; \frac{V \cdot AC_1ID_1}{V \cdot ACGD} = \frac{yz}{2}; \frac{V \cdot AB_1ID_1}{V \cdot ABGD} = \frac{zx}{2}$

Suy ra: $V \cdot AB_1C_1D_1 = V \cdot AB_1IC_1 + V \cdot AC_1ID_1 + V \cdot AB_1ID_1 = \frac{V}{6}(xy + yz + zx) (V = V \cdot ABCD)(1)$

Lại có: $\frac{V \cdot AB_1C_1D_1}{V} = xyz(2)$

$(1); (2) \Leftrightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 6$

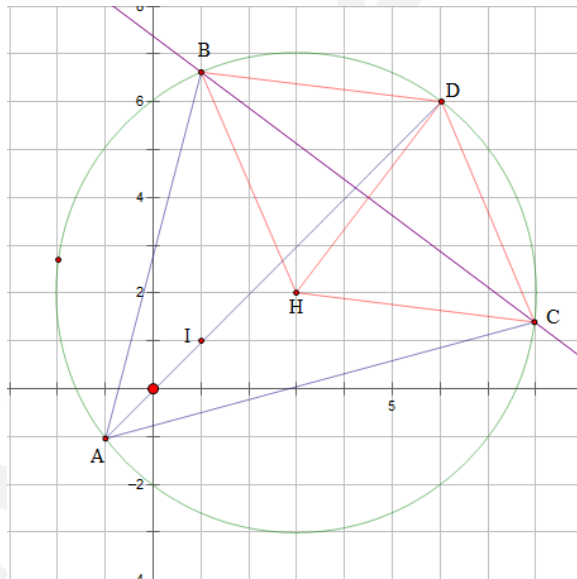


Hình 2: Câu III.2

Áp dụng Sa vác ta có: $VT(*) \geq \frac{\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} - 3\right)^2}{3} = 3$. ĐPCM

Bài IV

Ta có : $H(3;2)$ là tâm đường tròn (T)



Hình 3: Câu IV.

Phương trình phân giác góc A là $AI : x - y = 0$

Khi đó ta có giao của AI với (T) là $D(6;6)$

Lại có $HD = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$

Nhận thấy rằng B, C, H cùng thuộc đường tròn tâm $D(6;6)$ bán kính $R = 5$

nên có phương trình : $(T_1) : (x - 6)^2 + (y - 6)^2 = 25$

Suy ra phương trình $BC : 6x + 8y - 59 = 0$

Bài V

Ta sẽ chứng minh $a + \sqrt{bc} + \sqrt[3]{abc} \leq \frac{4}{3}(a+b+c)$

Áp dụng BĐT AM-GM ta có: $6\sqrt{ab} \leq 3(\frac{a}{2} + 2b)$; $6\sqrt[3]{abc} \leq 2(\frac{a}{2} + b + 4c)$

Do đó $a + \sqrt{bc} + \sqrt[3]{abc} \leq \frac{4}{3}(a+b+c)$

Ta có $P \geq \frac{2}{\frac{4}{3}(b+a+c)} - \frac{3}{\sqrt{a+b+c}}$

Đặt $t = a+b+c > 0$

$P \geq \frac{2}{\frac{4}{3}t} - \frac{3}{\sqrt{t}}$

Xét hàm $f(t) = \frac{2}{\frac{4}{3}t} - \frac{3}{\sqrt{t}}$

$f'(t) = 0 \iff t = 1$

Vậy $\min P = \frac{-3}{2}$

Lời giải được thực hiện bởi các thành viên : **Ẩn Số, giangmanh, quynhanhbaby, dandhv, , Inspectorgadget**
của diễn đàn TOÁN THPT - www.k2pi.net