– Cách của Karl George Christian von Staudt (1798 – 1867) người Đức.

. . . .

Phương trình vô định bậc 2 hai ẩn

$$y^2 = ax^2 + 1, \quad (5-11)$$

trong đó a là số nguyên dương không chính phương, đã được Brahmagupta và Bhàskara (1114 – 1185) người Ấn Độ giải. Người ta thường gọi (5–11) là phương trình Pell (J.Pell). Lí thuyết đầy đủ về phương trình (5–11) được Joseph – Louis Lagrange (25.1.1736 – 10.4.1813) người Pháp hoàn tất vào 1766 – 1769.

J–L.Lagrange

6. CUỘC THÁCH ĐỐ CHẤN ĐỘNG GIỚI TOÁN HỌC

Như chúng ta đã biết, việc tìm lời giải cho phương trình bậc 3 là khá phức tạp và công thức của nghiệm là khá cồng kềnh.

Trong một bản Babilon(*) tìm thấy có các giá trị của $n^3 + n^2$ với n = 1 đến n = 30 và như vậy chúng ta cũng tìm được nghiệm của 30 phương trình bậc 3 đặc biệt. Nhà toán học O.Neugebauer (sinh 1899) tin rằng người Babilon hoàn toàn có thể quy một phương trình bậc 3 tổng quát về dạng "chuẩn" $x^3 + x^2 = c$.

Ở Trung Hoa, bộ sách "Chức cổ toán kinh" của Vương Hiếu Chương viết vào đầu đời Đường (thế kỉ VII) có nêu cách giải

(*) Xem mục 12.

phương trình bậc 3 tổng quát bằng đại số. Trong bộ sách "Số thư cửu chương" Tần Cửu Thiều cũng đưa ra phương trình bậc 3. Nhưng sau đó, người Trung Hoa đã quá chú ý đến phương pháp đại số trên bàn tính, mà ít chú ý sử dụng các kí hiệu đại số như đang dùng, do vậy từ thế kỉ VII nên toán học Trung Hoa bắt đầu lạc hậu so với phương Tây.

Omar Khayyam (16.5.1048 - 4.12.1122) ở Khorâsân đã giải phương trình bậc 3 bằng hình học một cách độc đáo.

Sau Al-Khowarizmi đã có nhiều nhà toán học đi tìm cách giải phương trình bậc 3 một cách miệt mài. Nhưng trải qua suốt 7 thế kỉ, ngoài việc tìm được cách giải của những phương trình khác thì không có bước tiến nào cho việc giải phương trình bậc 3. Vì vậy đã có người tỏ ra chán nản, cho rằng phương trình bậc 3 có thể không có thực. Nhưng giáo sư Scippionel del Ferro (Phêro) (1465 - 1526) người Italia, ở Trường đại học Tổng hợp Bologna thì không như vậy. Ông vẫn tiếp tục con đường của mình là để tâm miệt mài nghiên cứu vấn đề hóc búa lúc bấy giờ là giải phương trình bậc 3. Trời đã không phụ ông, vào một ngày "không thể tin được", ông đã tìm ra bước đột phá và đến năm 1505 ông tuyên bố đã tìm ra cách đặc biệt để giải phương trình

$$x^3 + mx = n, \tag{6-1}$$

với m, n > 0.

Vào thời đó, mọi người đều giữ bí mật cách giải của mình, vì vậy việc S. del Ferro giữ kín bảo bối của mình cũng là điều không có gì lạ. Nhưng đáng tiếc là, ông đã không có dịp nào để công bố thành tựu của mình. Mãi đến khi sắp qua đời, ông mới để lại bí mật này cho người con rể tin cẩn là Anabel Nova. Nhưng về sau, một môn sinh của S. del Ferro là Antonio Fior (Phiorê) đã lấy cắp được bảo bối của ông .

Trong trường phái Italia thì N. Fontana (khoảng 1500 - 1557) cũng đi tiên phong trong việc tìm cách giải phương trình bậc 3.

Bây giờ lại nói đến một nhà toán học khác, đó là Niccolo Tartaglia (1499 - 1557). Thời thơ ấu của ông trôi qua thật nặng nề. Ông sinh ra ở Brescia miền Bắc Italia nên được gọi là Niccolo của Brescia và thường được gọi là Tartagli (người nói lắp), vì lúc nhỏ ông bị quân Pháp dã man làm hại. Câu chuyện thương tâm kể lại rằng, lúc ông 13 tuổi thì quân Pháp tràn vào Brescia. Ông cùng với người cha (lúc đó là người đưa thư) và dân chúng chạy trốn vào ngôi nhà thờ để tìm nơi ẩn náu nhưng quân lính Pháp đã rượt theo và thảm họa đã xảy ra : Người cha bị chết, còn cậu bé bị chém vào hàm và miệng. Lúc sau người mẹ tìm thấy cậu con trai còn sống, vội mang đi. Không có tiền lo thuốc thang điều trị vết thương cho con, bà đã nhớ lại là khi con chó bị thương nó thường liếm vào vết thương và thế là với cách chữa này mà N.Tartaglia đã bình phục. Vết thương ở vòm miệng đã làm ông suốt đời nói năng thật khó khăn. Rồi người mẹ lại qua đời. Ông phải tự đi tìm đường sống cho mình. Ông có tư chất thông minh, lại ham học. Ông học vật lí, toán học và tỏ rõ tài năng rất sớm. N. Tartaglia tự học thành tài, được nhiều người thời đó kính phục.

Vào năm 1530 một nhà toán học đã đưa ra cho ông hai câu hỏi mang tính thách thức, nhằm hạ uy tín của ông :

1. Tìm một số mà lập phương cùng với 3 lần bình phương thì bằng 5 ;

2. Tìm ba số mà trong đó số thứ hai lớn hơn số thứ nhất là 2, số thứ ba lớn hơn số thứ hai là 2 và tích của chúng là 1000.

Đây thực chất là tìm nghiệm của phương trình bậc 3. Với câu hỏi 1 phương trình sẽ là :

$$x^3 + 3x^2 - 5 = 0$$

và câu hỏi 2 :

$$x^3 + 6x^2 + 8x - 1000 = 0.$$

Ông đã tìm được nghiệm của cả hai phương trình bậc 3 này và vì vậy ông càng nổi tiếng.

Các môn sinh của S. del Ferro cũng tuyên bố giải được phương trình bậc 3. Không ai chịu ai, nên cuối cùng các nhà toán học Italia quyết định mở một cuộc thách đố giữa hai bên, mỗi bên đưa ra 30 đề toán làm trong 2 giờ.

Sắp đến ngày thi, N. Tartaglia cảm thấy nao núng, vì ông chỉ là người tự học, sợ không bảo vệ được cách giải của mình. Ông suy nghĩ rất nhiều và đưa ra nhiều phương án khác nhau. Trước khi thi 8 ngày, ông đã tìm được phương pháp mới để giải phương trình bậc 3.

Ông học thuộc cách giải mới và nghĩ ra 30 đề toán mà chỉ có cách giải mới này mới thực hiện được.

Vào ngày 22-2-1535, các nhà toán học và những người hâm mộ của Italia và nhiều nước châu Âu kéo về thành phố Milan để dự cuộc thi tài. Cả hội trường vô cùng náo nhiệt, mọi người nóng lòng chờ đợi giờ phút thi đấu. Bắt đầu cuộc thi, người ta thấy một người trẻ tuổi, đi khập khiễng, lại nói lắp nhưng có đôi mắt sáng, đó là N.Tartaglia giáo viên toán ở Brescia. Ba chục đề toán mà mỗi bên đưa ra đều là phương trình bậc 3. Người ta thấy N.Tartaglia rất bình tĩnh, tự tin. Ông đã giải xong 30 đề toán đối phương đưa ra trước giờ quy định. Ngược lại, nhóm môn sinh của S.del Ferro đã không giải được bài nào trong 30 đề toán mà ông đưa ra. Như vậy cuộc thi kết thúc với tỉ số 0 : 30, phần thắng tuyệt đối thuộc về N.Tartaglia.

Tin tức được truyền đi, làm chấn động cả giới toán học. Ở thành phố Milan, có một người đứng ngồi không yên, đó là Girolamo Cardano (24.9.1501 - 21.9.1576). Ông không chỉ là thầy thuốc nổi tiếng khắp châu Âu, mà còn là một nhà toán học tài ba, dạy toán và có nhiều công trình nghiên cứu về toán học. Ông chuyên tâm nghiên cứu phương trình bậc 3, nhưng chưa có kết quả. Cho nên khi nghe tin N.Tartaglia đã giải được phương

G.Cardano

trình bậc 3, ông hi vọng rằng sẽ được hưởng một phần thành tựu của N.Tartaglia.

Lúc này N.Tartaglia đã nổi tiếng khắp châu Âu, nhưng ông lại không muốn công bố rộng rãi công trình của mình. Ông chỉ viết lại trong tác phẩm "Nguyên tắc hình học", cho nên trong tủ sách của nhiều người khó lòng có được tác phẩm của N.Tartaglia.

G.Cardano hành nghề y nhưng rất quan tâm đến toán học. Với thái độ chân tình, hiếu học, sau nhiều lần G.Cardano đề nghị, năm 1539 N.Tartaglia đã đồng ý truyền lại những bí quyết cho G.Cardano. Nhưng G.Cardano đã không tôn trọng lời hứa, năm 1545 đã giới thiệu cách giải phương trình bậc 3 với lời giải thích của mình trong cuốn "Ars magna". G.Cardano viết :

"Khoảng 30 năm trước, S. del Ferro đã tìm được phương pháp giải này, đã truyền lại cho người khác và đã từng tranh luận với N.Tartaglia, N. Tartaglia cũng phát hiện được phương pháp này. Tôi đã nhiều lần đề nghị thiết tha và cuối cùng N.Tartaglia đã truyền đạt cho tôi phương pháp giải nhưng lại không chỉ cho tôi phương pháp chứng minh, vì vậy buộc tôi phải tìm ra nhiều cách chứng minh. Vì nó rất khó, tôi xin mô tả nó như sau : ...".

Sau đó cuộc tranh cãi về bản quyền cách giải này đã nổ ra gay gắt nhưng cuối cùng lẽ phải đã chiến thắng và người ta công nhận lời giải đó là của N.Tartaglia. Tuy vậy, G. Cardano vẫn nổi tiếng nhờ công bố cách giải này.

Về sau G. Cardano còn đưa ra cách giải khác. Đặt

$$x = u + v. \tag{6-2}$$

Thay (6-2) vào (6-1) được :

$$u^3 + v^3 + (3uv + m)(u + v) + n = 0. \tag{6-3}$$

Việc giải (6-3) tương đương với việc giải hệ phương trình

$$\left.\begin{array}{l} 3uv + m = 0 ; \\ u^3 + v^3 + n = 0 , \end{array}\right\} \tag{6-4}$$

hoặc

$$\omega^2 + n\omega - \frac{m^3}{27} = 0. \tag{6-5}$$

Trong một cuốn sách của Trung Quốc lại nói rằng, sau 2 năm G. Cardano công bố cách giải phương trình bậc 3 thì trong bài "Những câu hỏi và phát minh". N.Tartaglia đã phê phán thái độ thiếu trung thực của G. Cardano và yêu cầu thành phố Milan tổ chức tranh luận công khai với G. Cardano. Đến ngày gặp nhau để tranh luận thì không phải là G. Cardano mà lại là một học trò tài ba của G. Cardano, được ông rất ưu ái, đó là Lodovico Ferrari (1522 – 1565). L.Ferrari không những nắm được cách giải phương trình bậc 3, mà còn giải được phương trình bậc 4 nên N.Tartaglia đã chịu thất bại. Từ đó N.Tartaglia như bị vết thương lòng và ôm hận đến lúc chết.

Trong cuốn "Lịch sử toán học" của Howard Eves người Mĩ xuất bản năm 1969 lại viết :"... những lời phản đối mãnh liệt của N.Tartaglia đến tai L. Ferrari nên người này đã lập luận cho thấy của mình rằng, G. Cardano có được thông tin cần cho mình từ S.del Ferro qua một người thứ ba và lên án N. Tartaglia là ăn cắp ý tứ cùng một nguồn đó ...".

Cho dù các lời đồn thổi như thế nào nhưng cuối cùng lời giải được lưu truyền đến ngày nay với tên gọi chung là công thức Cardano – Tartaglia :

$$x = \sqrt[3]{\left(\frac{n}{2}\right) + \sqrt{\left(\frac{n}{2}\right)^2 + \left(\frac{m}{3}\right)^3}} - \sqrt[3]{\left(\frac{n}{2}\right) - \sqrt{\left(\frac{n}{2}\right)^2 + \left(\frac{m}{3}\right)^3}} \qquad (6\text{–}6)$$

Cũng cần nói thêm rằng, (6–6) là công thức nghiệm của phương trình bậc 3 chưa đầy đủ (6–1). Tuy nhiên, từ phương trình bậc 3 đầy đủ (chỉnh tắc hay hoàn chỉnh) :

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0 \qquad (6\text{–}7)$$

đến phương trình (6–1) chỉ cần đặt

$$y = x + \frac{b}{3a}. \qquad (6\text{–}8)$$

Năm 1572, R.Bombelli cho công bố một cuốn sách đại số góp phần đáng kể vào việc giải phương trình bậc 3. Trong các sách giáo khoa về lí thuyết các phương trình cho biết rằng, nếu

$\left(\frac{n}{2}\right)^2 + \left(\frac{m}{3}\right)^3$ là âm thì phương trình (6–1) có ba nghiệm thực. Nhưng trong trường hợp này, theo công thức (6–6), các nghiệm đó được biểu thị bằng hiệu của hai căn bậc 3 của các số phức liên hợp. Điều tưởng chừng bất thường này gọi là "trường hợp bất khả quy của phương trình bậc 3" đã làm bận tâm đáng kể các nhà đại số học thời xưa. R. Bombelli đã chỉ ra tính thực của các nghiệm thoạt nhìn là không thực trong trường hợp bất khả quy.

Trong cuốn "Canon mathematicus seu ad triangula" của F. Viète xuất bản năm 1579, tác giả có gợi ý một cách giải bằng lượng giác cho trường hợp bất khả quy của các phương trình bậc 3. Trong luận văn của F. Viète thấy có cách giải rất đẹp sau đây cho phương trình bậc 3 :

$$x^3 + 3ax = 2b. \tag{6-9}$$

Phương trình (6–9) là một dạng mà phương trình bậc 3 nào cũng có thể quy về được. Nếu đặt

$$x = \frac{a}{y} - y \tag{6-10}$$

thì (6–9) trở thành

$$y^6 + 2by^3 = a^3. \tag{6-11}$$

Phương trình (6–11) là phương trình bậc 2 của y^3. Ta có thể tìm y^3, rồi y, sau đó là x.

Về phương trình (6–9) thì Isaac Newton (25.12.1642 – 20.3.1727) cũng có cách giải.

I. Newton