

Chọn Điểm rơi

Bản chất điểm rơi là chọn những hệ số phù hợp cho quá trình sử dụng bất đẳng thức được thuận lợi và dấu bằng có thể xảy ra. Để rơi thành công thì chúng ta cần biết 1 số điều:

- Thông thường dấu bằng xảy ra với những biến có vai trò như nhau sẽ bằng nhau. Biến có vai trò như nhau thì khi đổi chỗ vị trí của biến bài toán không thay đổi. VD: Cho $a + b + 2c = 4$. Tìm Min $M = a^3 + b^3 + 3c^4$ thì a, b là các biến có vai trò như nhau.
- Do dấu bằng của BĐT Cô-si xảy ra tại các biến bằng nhau nên ta thường sử dụng pp tách: Tách a thành m số: $a = \frac{a}{m} + \frac{a}{m} + \dots + \frac{a}{m}$, tách $a^m = a.a\dots a$
- Hệ số phụ thuộc vào các yếu tố sau :
 - +Dấu bằng của BĐT
 - +Mục đích của BĐT (hạ bậc, khử biến, tạo giả thiết,...)
 - +Tỉ lệ hệ số trong biểu thức cần tìm cực trị và giả thiết
- Dấu bằng thường xảy ra trùng với dấu bằng ở các BĐT trong giả thiết (nếu có)
- Ta chỉ cần chọn hệ số

Bài toán chọn lọc:

Cho $a, b, c > 0$ và $21ab + 2bc + 8ca \leq 12$. Tìm min $M = \frac{1}{a} + \frac{2}{b} + \frac{3}{c}$

Tư duy: Rất đơn giản là từ giả thiết mà CS ta có $a^m b^n c^p \leq ?$. Rồi CS M sao cho cũng tạo ra được ở mẫu $a^m b^n c^p$. Nhưng nói là vậy còn làm thì sao?

Bài giải:

Để M dễ nhìn ta đặt $a = \frac{1}{x}, b = \frac{1}{y}, c = \frac{1}{z}$ giả thiết sẽ thành $2x + 8y + 21z \leq 12xyz$ và

$$M = x + 2y + 3z$$

Giờ thì rơi $z = \frac{x}{m} = \frac{y}{n}$ sẽ có

$$12xyz \geq 2x + 8y + 21z = 2m\left(\frac{x}{m}\right) + 8n\left(\frac{y}{n}\right) + 21z \geq (2m + 8n + 21)\left(\left(\frac{x}{m}\right)^{2m}\left(\frac{y}{n}\right)^{8n}z^{21}\right)^{\frac{1}{2m+8n+21}}$$

$$\Rightarrow x^{21+8n}y^{21+2m}z^{2m+8n} \geq ?$$

$$\text{Đến lượt M rồi } M = x + 2y + 3z = m\left(\frac{x}{m}\right) + 2n\left(\frac{y}{n}\right) + 3z \geq (m + 2n + 3)\left(\left(\frac{x}{m}\right)^m\left(\frac{y}{n}\right)^{2n}z^3\right)^{\frac{1}{m+2n+3}}$$

Bài toán sẽ thành công khi $m : 2n : 3 = (21 + 8n) : (21 + 2m) : (2m + 8n)$. Ta sẽ viết thành

$$\frac{m}{21+8n} = \frac{2n}{21+2m} = \frac{3}{2m+8n} \rightarrow \begin{cases} 2m^2 + 8mn = 24n + 63 \\ 16n^2 + 4mn = 6m + 63 \end{cases} \Rightarrow n = \frac{2m^2 - 63}{8(3-m)}$$

Thế vào thẳng thứ 2 sẽ có $16\left(\frac{2m^2 - 63}{8(3-m)}\right)^2 + 4m\frac{2m^2 - 63}{8(3-m)} = 6m + 63$. Giờ thì đừng có đâm đầu

vào giải mà lấy FX sẽ cho ngay $m = \frac{9}{2} \rightarrow n = \frac{15}{8}$. Từ đây ta cũng tìm ra được

$$x = 3, y = \frac{5}{4}, z = \frac{2}{3}$$

Important Note: Haizz! Đọc xong lời giải trên cũng thấy đau cả đầu, nhưng đừng lo, mục đích cuối cùng của bài viết cũng chỉ là để các bạn làm được các bài dễ hơn hoặc bằng ở trên thì tác giả đã mừng lắm rồi!

I. Tính chất hạ bậc

- Hạ bậc đơn biến CS **m biến** x^m và **m-n hằng số** α

$$(x^m + x^m + \dots + x^m) + (\alpha + \alpha + \dots + \alpha) \geq m \sqrt[m]{\alpha^{m-n} x^n}$$

- Hạ bậc đa biến CS **a biến** x^m và **b biến** y^n sẽ tạo ra đơn thức tích xy có tỉ lệ bậc là $\frac{am}{bn}$

$$ax^m + bx^n = x^m + x^m + \dots + x^m + y^n + y^n + \dots + y^n \geq (a+b) \sqrt[a+b]{x^{am} y^{bn}}$$

Nhận xét:

-Hạ bậc cho phép ta mô tả $f(a,b,c,\dots)$ từ $g(a,b,c,\dots)$ trong đó bậc của g lớn hơn f

-Điểm rơi giúp ta chọn m, n, α

Chú ý:

-Hai dạng nêu trên chỉ mang tính tiêu biểu còn trong quá trình làm bài xin nhớ cho nguyên tắc: Mỗi số đều có thể tách thành m số như nhau và CS cùng hệ số α (đa thức bậc không) $\rightarrow$ khi đó bậc sau CS sẽ thay đổi.

VD1. Cho $a, b, c > 0$, $a + b + c = 3$ Tìm Min $M = a^3 + 64b^3 + c^3$

Do a, c có vai trò như nhau nên ta giả sử dấu bằng xảy ra tại $a = c = m$, $b = n \Rightarrow 2m + n = 3$ (*). Khi đó

$$a^3 + m^3 + m^3 \geq 3m^2(a)$$

$\Rightarrow$ để dùng được giả thiết thì hệ số của a, b, c bằng nhau tức

$$a^3 + m^3 + m^3 \geq 3m^2(c)$$

$$| 3m^2 = 64.3n^2 \quad (**)$$

$$64b^3 + 64n^3 + 64n^3 \geq 64.3n^2(b)$$

| Từ (*) và (**) rút thế ta có $m = 24/17$ và $n = 3/17$

VD2. Cho $a, b, c > 0$, $2a + 4b + 3c^2 = 13$ Tìm Min $M = a^2 + b^2 + c^3$

Giả sử dấu bằng xảy ra tại $a = m$, $b = n$, $c = p \Rightarrow 2m + 4n + 3p^2 = 13$ (*). Ta CS như sau

$$a^2 + m^2 + \geq 2m(a)$$

$$b^2 + n^2 + \geq 2n(b)$$

$$c^3 + p^3 + p^3 \geq 3p^2(b)$$

$$\Rightarrow \text{để dùng được giả thiết thì } \frac{2m}{2} = \frac{2n}{4} = \frac{3p^2}{3} \quad (**)$$

Xử lý (*) và (**) bằng tính chất dãy tỉ số bằng nhau có $\frac{2m}{2} = \frac{4n}{8} = \frac{3p^2}{3} = \frac{13}{13} \Rightarrow m = 1, n = 2, p = 1$

VD3. Cho $a, b > 0$, $a^2 + b^5 = 5$. Tìm Min $M = a^3 + b^6$

Giả sử dấu bằng xảy ra tại $a = m$, $b = n \Rightarrow m^2 + n^5 = 5$ (*). Ta CS như sau

$$\begin{cases} a^3 + a^3 + m^3 \geq 3m^2(a^2) \\ b^6 + b^6 + b^6 + b^6 + b^6 + m^6 \geq 6n^5(b^5) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^3 \geq -\frac{m^3}{2} + \frac{3m^2}{2}(a^2) \\ b^6 \geq -\frac{m^6}{5} + \frac{6n^5}{5}(b^5) \end{cases} \Rightarrow \text{để dùng được GT thì } \frac{3m^2}{2} = \frac{6n^5}{5} \quad (**)$$

Từ (*) và (**) ta có thể rút thế để có $m^2 = \frac{20}{9}$, $n^5 = \frac{25}{9}$

VD4. Cho $a, b > 0$, $a^2 b^3 = 2011$ Tìm Min $M = a^7 + b^5$

Ta khoan quan tâm đến dấu bằng mà hãy đem CS m số a^7 và n số b^5 như sau:

$$\frac{a^7}{m} + \frac{a^7}{m} + \dots + \frac{a^7}{m} + \frac{b^5}{n} + \frac{b^5}{n} + \dots + \frac{b^5}{n} \geq (m+n) \sqrt[m+n]{\frac{a^{7m} b^{5n}}{m^m n^n}} \Rightarrow \text{để dùng được giả thiết thì } \frac{7m}{5n} = \frac{2}{3} \text{ nên ta}$$

chọn $m=10$ và $n=21$. Dấu bằng xảy ra khi $\frac{a^7}{10} = \frac{b^5}{21}$ và $a^2 b^3 = 2011$ (luôn có a và b đó !)

VD5. Cho $a^2 + b^2 + c^2 + \frac{16}{25}ab = 4$ Tìm Max $M = ab + bc + ca$

Giống như VD1 dấu bằng xảy ra tại $a=b$. Ta CS như sau:

$$\left. \begin{array}{l} a^2 + b^2 \geq 2(ab) \\ a^2 + mc^2 \geq 2m(ac) \\ b^2 + mc^2 \geq 2m(bc) \\ ab \geq (ab) \end{array} \right\} \Rightarrow \text{Ta đã làm xong quá trình mô tả các biến} \left\{ \begin{array}{l} x(a^2 + b^2) \geq 2x(ab) \\ y(a^2 + mc^2) \geq 2my(ac) \\ z(b^2 + mc^2) \geq 2mz(bc) \\ tab \geq t(ab) \end{array} \right.$$

nhưng thế là chưa đủ vì các biến còn mang theo mình hệ số. Lần lượt nhân các BĐT với x, y, z, t ta sẽ có hệ thức

Giờ thì sẽ cần có

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{x+y}{1} = \frac{x+z}{1} = \frac{m(y+z)}{1} = \frac{t}{16/25} = 1 \text{ (nhìn vào GT)} \\ 2x+t = 2my = 2mz \text{ (Look at M)} \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} y = z \\ t = 16/25 \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{x+y}{1} = \frac{2my}{1} = 1 \\ 2x + \frac{16}{25} = 2my \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 9/50 \\ y = 41/50 \\ m = 50/41 \end{array} \right.$$

Có m rồi thì dấu bằng còn chỉ là khó khi $a = b = c\sqrt{\frac{50}{41}}$, $a^2 + b^2 + c^2 + \frac{16}{25}ab = 4$. Thôi tự giải tiếp nhé.

II. Tính khử kiểu tích

Xét phân số $\frac{A}{B}$

- Khử nội phân số:** ta phân tích B thành nhân tử và tách A làm các thừa số sao cho sau CS có được điều mình muốn $\frac{A_1 + A_2 + \dots}{B_1 \cdot B_2 \dots} \geq \frac{\sqrt[3]{A_1 \cdot A_2 \dots}}{B_1 \cdot B_2 \dots}$
- Khử mở rộng:** phân tích B thành nhân tử rồi cộng cả phân số với các nhân tử của B sao cho CS có được điều mình muốn $\frac{A}{B_1 \cdot B_2 \dots} + B_1 + B_2 \dots \geq \sqrt[3]{A}$

Nhận xét:

-Việc nhìn nhận $B_1, B_2 \dots$ khá dễ dàng

-Điểm rơi giúp ta chọn hệ số cho các biến đem CS sau cho phù hợp

VD1. Cho $x, y, z > 0$ thỏa mãn $x + y + z = 3$ CMR: $\frac{x^3}{y^3 + 8} + \frac{y^3}{z^3 + 8} + \frac{z^3}{x^3 + 8} \geq \frac{4}{9} - \frac{(x^2 + y^2 + z^2)}{27}$.

Vai trò x, y, z như nhau nên dấu bằng khi chúng bằng nhau và bằng 1.

Ta phân tích bài toán để tìm biến CS nhé:

$$\frac{x^3}{y^3 + 8} = \frac{x^3}{(y+2)(y^2 - 2y + 4)}$$

nên ta sẽ chọn thêm 2 biểu thức $(y+2)$, $(y^2 - 2y + 4)$ để thực hiện.

Nhưng $\frac{x^3}{y^3 + 8} = \frac{1}{9}$, $(y+2)=3$, $(y^2 - 2y + 4)=3$ nên ta sẽ làm như sau $\frac{x^3}{y^3 + 8} + \frac{y+2}{27} + \frac{y^2 - 2y + 4}{27} \geq \frac{x}{3}$

Làm tương tự có VT $\geq \frac{10(x+y+z) - (x^2 + y^2 + z^2) - 18}{27} = \frac{12 - (x^2 + y^2 + z^2)}{27}$ (Enjoy!)

VD2. CMR $\frac{a^4}{b^2c} + \frac{b^3}{ca} + \frac{c^2}{a} \geq 2a + b$ với $a, b, c > 0$

Nhìn vai trò a,b,c không hề như nhau nhưng hãy cứ thử cho a=b=c ta được dấu bằng.

Nếu được thế thì cùng thử liều xem

$$\left. \begin{aligned} \frac{a^4}{b^2c} + b + b + c &\geq 4a \\ \frac{b^3}{ca} + c + a &\geq 3b \\ \frac{c^2}{a} + a &\geq 2c \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{a^4}{b^2c} + \frac{b^3}{ca} + \frac{c^2}{a} \geq 2a + b. \text{ Bài này xoáy thật !}$$

VD3.CMR $\frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{16c^2}{a+b} \geq \frac{1}{9}(64c - a - b)$ với $a, b, c > 0$

Nhìn đi: a,b có vai trò như nhau nên ta sẽ đặt a=b=mc thì dấu bằng xảy ra tại

$$\frac{(mc)^2}{mc+c} + \frac{(mc)^2}{c+mc} + \frac{16c^2}{mc+mc} \geq \frac{1}{9}(64c - mc - mc) \Leftrightarrow \frac{2m^2}{m+1} + \frac{8}{m} = \frac{2}{9}(32 - m)$$

Nhét vào Fx570ES sẽ cho ra m=2. Và khi đó ta sẽ làm như sau:

$$\left. \begin{aligned} \frac{a^2}{b+c} + \frac{4}{9}(b+c) &\geq \frac{4}{3}a \\ \frac{b^2}{c+a} + \frac{4}{9}(a+c) &\geq \frac{4}{3}b \\ \frac{16c^2}{a+b} + (a+b) &\geq 8c \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{16c^2}{a+b} \geq \frac{1}{9}(64c - a - b)$$

VD4. Cho $x, y > 0$ $x+y=4$ Tìm Min $M = 2x + 3y + \frac{6}{x} + \frac{10}{y}$

Ta CS như sau $\begin{cases} \frac{6}{x} + mx \geq 2\sqrt{6m} \\ \frac{10}{y} + ny \geq 2\sqrt{10n} \end{cases} \Rightarrow \text{Dấu bằng xảy ra tại } \begin{cases} mx^2 = 6 \\ ny^2 = 10 \end{cases} \Rightarrow \sqrt{\frac{6}{m}} + \sqrt{\frac{10}{n}} = 4(*)$

Và phần còn lại của M là $(2-m)x + (3-n)y$ để giải quyết được cần $2-m=3-n$ hay $n=m+1(**)$

Từ (*) và (**) ta có $\sqrt{\frac{6}{m}} + \sqrt{\frac{10}{m+1}} = 4$ nhét và máy tính đi sẽ cho m=3/2 -> n=5/2

VD5. Cho $a \geq 2$ Tìm Min $M = a + \frac{1}{a^2}$

Có dấu bằng là a=2 rồi thì cứ thế mà làm $M = \frac{3}{4}a + \frac{1}{a^2} + \frac{a}{8} + \frac{a}{8} \geq \frac{3}{4}.2 + 3\sqrt[3]{\frac{1}{8^2}} = \frac{9}{4}$

VD6. Tìm Min $M = (1+x)(1+\frac{y}{x})(1+\frac{9}{y})^2$

Ta sẽ CS $1+x$ bằng cách **tách 1 thành a số và x thành b số**. Khi đó sẽ tạo ra $\sqrt[a+b]{x^b}$. Và thẳng này chỉ có thể khử khi CS $(1+\frac{y}{x})$ bằng cách **tách 1 ra a số và $\frac{y}{x}$ ra b số** tức tạo ra $\sqrt[a+b]{\frac{y^b}{x^b}}$. Nếu làm như vậy

dấu bằng xảy ra tại $\frac{1}{a} = \frac{x}{b} = \frac{y}{xb} \Rightarrow y = x^2 \Rightarrow M = \left[(1+x)(1+\frac{9}{x}) \right]^2 = (10+x+\frac{9}{x})^2$ Thế này thì x chỉ có thể bằng 3 và y sẽ là 9. Lời giải chuẩn như sau

$$M = (1 + \frac{x}{3} + \frac{x}{3} + \frac{x}{3})(1 + \frac{y}{3x} + \frac{y}{3x} + \frac{y}{3x})(1 + \frac{3}{\sqrt{y}} + \frac{3}{\sqrt{y}} + \frac{3}{\sqrt{y}})^2 \geq 4\sqrt[4]{\frac{x^3}{3^3}} \cdot 4\sqrt[4]{\frac{y^3}{(3x)^3}} \cdot 4\left(\sqrt[4]{\frac{3^3}{(\sqrt{y})^3}}\right)^2 = 256$$

VD7. Cho $x, y, z > 0$ Tìm Min $M = \frac{xyz}{(1+3x)(x+8y)(y+9z)(z+6)}$

Ta sẽ CS mỗi thừa số của tích như sau

$(1+3x)$ tách 1 thành a số $3x$ thành b số sẽ tạo ra biến $\sqrt[a+b]{x^a y^b}$ và dấu bằng tại $\frac{1}{a} = \frac{3x}{b}$

Để khử được x (bậc 1) ở từ thì $(x+8y)$ tách x thành a số và $8y$ thành b số sẽ tạo ra biến $\sqrt[a+b]{x^a y^b}$. Dấu bằng tại $\frac{x}{a} = \frac{8y}{b}$

Lập luận tương tự có

$$\frac{1}{a} = \frac{3x}{b} \left| \frac{x}{a} = \frac{8y}{b} \right| \frac{y}{a} = \frac{9z}{b} \left| \frac{z}{a} = \frac{6}{b} \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{1}{3x} = \frac{y}{9z} = \frac{x}{8y} = \frac{z}{6} \Rightarrow \left(\frac{1}{3x} \right)^4 = \frac{1}{3 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 6} \Rightarrow x = 2, y = \frac{3}{2}, z = 1, \frac{a}{b} = \frac{1}{6}$$

Lời giải hoàn chỉnh như sau

$$\left(1 + \frac{3x}{6} + \dots + \frac{3x}{6}\right) \left(x + \frac{8y}{6} + \dots + \frac{8y}{6}\right) \left(y + \frac{9z}{6} + \dots + \frac{9z}{6}\right) (z + 1 + \dots + 1) \geq 7^4 xyz$$

VD8. Tìm Min $M = \frac{x^2 - x + 3}{\sqrt{1-x^3}}$

Ta có $\sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-x} \cdot \sqrt{1+x+x^2}$ nên cần tìm m, n sao cho

$$m(1-x) + n(1+x+x^2) = x^2 - x + 3 = nx^2 + (n-m)x + m+n \Rightarrow n = m-n = \frac{m+n}{3} \Rightarrow m = 2, n = 1.$$

Bài toán được giải như sau $M = \frac{x^2 - x + 3}{\sqrt{1-x^3}} = \frac{2(1-x) + (1+x+x^2)}{\sqrt{1-x^3}} \geq 2\sqrt{2}$

VD9. Cho $x + \sqrt{xy} + \sqrt[3]{xyz} = \frac{4}{3}$ CMR $M = x + y + z \geq 1$

Ta sẽ đi cm BDT sau $x + y + z \geq \frac{3}{4}(x + \sqrt{xy} + \sqrt[3]{xyz})$. Để CS ta cần tách x làm 3 số, y làm 2 số như sau

$$x + y + z = \frac{x}{a} + \left(\frac{x}{b} + \frac{y}{d}\right) + \left(\frac{x}{c} + \frac{x}{e} + z\right) \geq \frac{(x)}{a} + 2\sqrt{\frac{1}{bd}}(\sqrt{xy}) + 3\sqrt[3]{\frac{1}{ce}}(\sqrt[3]{xyz}). \text{ Ta sẽ có được hệ sau}$$

$$\begin{cases} \frac{1}{a} = 2\sqrt{\frac{1}{bd}} = 3\sqrt[3]{\frac{1}{ce}} = \frac{3}{4} \text{ (look VP)} \\ \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{d} + \frac{1}{e} = 1 \text{ (cách tách)} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{4}{3} \\ \frac{1}{bd} = \left(\frac{3}{8}\right)^2 \text{ và } \\ \frac{1}{ce} = \left(\frac{1}{4}\right)^3 \end{cases} \begin{cases} \frac{1}{d} + \frac{1}{e} = 1 \\ \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{4} \end{cases}$$

Rút thế lung tung ta sẽ có $\frac{(3/8)^2}{1/4 - 1/c} + c\left(\frac{1}{4}\right)^3 = 1$. Nhờ Fx570ES cho $c=16$ rồi thế là $b = \frac{16}{3}, e=4, d = \frac{4}{3}$

Lời giải sau khi có dấu bằng $x + \frac{1}{2}\sqrt{x \cdot 4y} + \frac{1}{4}\sqrt[3]{x \cdot 4y \cdot 16z} \leq \frac{4}{3}(x + y + z)$

III. Tính khử kiểu tổng

Ta thường tách từ A^m thành m biến A rồi dùng điểm rơi chọn hệ số phù hợp cho các biến

VD1. Cho $x \in [0; 2]$ Tìm Max $M = x^3(2-x)^5$

Để khử được hết x ta phân tích M ra các thừa số x bậc 1 và chọn hệ số cho chúng như sau

$$M = \frac{x}{m} \cdot \frac{x}{m} \cdot \frac{x}{m} \cdot \frac{(2-x)}{n} \cdot \frac{(2-x)}{n} \cdot \frac{(2-x)}{n} \cdot \frac{(2-x)}{n} \cdot \frac{(2-x)}{n} \leq \left(\frac{\frac{3}{m}x + \frac{5(2-x)}{n}}{m+n} \right)^{m+n} \Rightarrow \frac{3}{m} = \frac{5}{n} \Rightarrow \begin{cases} m=3 \\ n=5 \end{cases}$$

VD2. Cho $x \in [0;1]$ Tìm Max $M = 13\sqrt{x^2 - x^4} + 9\sqrt{x^2 + x^4}$

Ta làm như sau $\frac{13}{m}\sqrt{mx^2(1-x^2)} + \frac{9}{n}\sqrt{nx^2(1+x^2)} \leq \frac{13}{m} \cdot \frac{mx^2 + (1-x^2)}{2} + \frac{9}{n} \cdot \frac{nx^2 + (1+x^2)}{2}$

Để dấu bằng xảy ra và khử hết biến x thì

$$\begin{cases} m^2x^2 = 1-x^2 \\ \frac{13(1-m^2)}{m} = \frac{9(n^2+1)}{n} \\ n^2x^2 = 1+x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2+1 = n^2-1 \\ \frac{13(1-m^2)}{m} = \frac{9(n^2+1)}{n} \end{cases} \Rightarrow \frac{13(1-m^2)}{m} = \frac{9(m^2+3)}{\sqrt{m^2+2}} \quad \left. \begin{array}{l} \text{Lại nhờ Fx cho ta} \\ m = \frac{1}{2}, n = \frac{3}{2} \end{array} \right\}$$

IV. Bài toán khó

1. Dùng các phép thử đơn giản tìm dấu bằng

VD1: Cho $a, b, c > 0$, $a+2b+3c \geq 20$ CMR $M = a+b+c + \frac{3}{a} + \frac{9}{2b} + \frac{1}{c} \geq 5$ ($a=2, b=3, c=4$)

VD2: Cho $a, b, c > 0$, $ab \geq 12$, $bc \geq 8$ CMR $M = a+b+c + 2\left(\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca}\right) + \frac{8}{abc} \geq \frac{121}{12}$ ($a=3, b=4, c=2$)

VD3: CMR $\frac{a^3}{bc} + \frac{2b^3}{ca} + \frac{32c^3}{ab} \geq 22a - 12b - 24c$ với $a, b, c > 0$ ($a=2b=4c$)

VD4: Cho $(a^2 + a + 2)(b+1)^2(c^2 + 3c) = 64$ Tìm Max $M = a^3b^4c^5$ ($a=b=c=1$)

VD5: Cho $a = \max\{a, b, c\}$ Tìm Min $M = \frac{a}{b} + 2\sqrt{1 + \frac{b}{c}} + 3\sqrt[3]{1 + \frac{c}{a}}$ ($a=b=c$)

2. Giả thiết lừa

VD1: Cho $0 < x \leq 2$ Tìm Min $x^{1995} + \frac{1}{x^{2011}}$

Đã là lừa thì cứ làm bình thường mà tách x^{1995} ra 2011 số còn $\frac{1}{x^{2011}}$ ra 1995 số

VD2: Cho $\begin{cases} a \geq 4, b \geq 2, c \geq 1995 \\ a+b+c = 2011 \end{cases}$ Tìm Max $M = abc$

Bài toán này thì không đơn giản. Nếu nhìn vào bài toán ta sẽ thấy cả 3 biến khác biệt nhau rất nhiều. Tuy nhiên hãy xem đến 1995 dường như đặc biệt hơn cả 4 và 2. Ta có thể dự rằng dấu bằng tại $a=b=8$ và $c=1995$. Khi đó

$$8M = [8(2011 - a - b)](1995 - b)(1995 - a) \leq \left[\frac{8 \cdot 2011 + 1987(a+b)}{3} \right] \leq 15960^3$$

V. Vài cảm nhận nhỏ

*1. Cho $x \in [0;1]$ CMR $\sqrt{t^2 - 2t + 3} + \sqrt{t^2 + 4t + 6} \leq \sqrt{2} + \sqrt{11}$

Dấu bằng khi $t=1$ nhưng nếu ta CS sẽ có

$$\begin{aligned}\sqrt{t^2-2t+3} + \sqrt{t^2+4t+6} &= \sqrt{2} \cdot \sqrt{\frac{t^2-2t+3}{2}} \cdot 1 + \sqrt{11} \cdot \sqrt{\frac{t^2+4t+6}{11}} \cdot 1 \leq \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\frac{t^2-2t+3}{2} + 1 \right) + \frac{\sqrt{11}}{2} \left(\frac{t^2+4t+6}{11} + 1 \right) \\ &= \left(\frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{11}}{22} \right) t^2 + \left(\frac{2\sqrt{11}}{11} - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) t + \frac{\sqrt{2} + \sqrt{11}}{2}\end{aligned}$$

Nhưng tam thức bậc 2 đó max tại $t=-1$????

.....=> Qua bài toán này tôi muốn nói rằng không phải bất cứ khi nào có dấu bằng cũng có thể làm được. Bài toán trên bình phương lên rồi xét hiệu sẽ có đáp án !

*2. Cho $x, y > 0$ và $x + y = 1$ Tìm Min $S = 3\sqrt{1+2x^2} + 2\sqrt{40+9y^2}$

Ta sẽ dùng B.C.S như sau $S = \sqrt{(a^2+b^2)(1+2x^2)} + \sqrt{(c^2+d^2)(40+9y^2)} \geq a + \sqrt{2}bx + 2\sqrt{10}c + 3dy$

$$\text{Việc chọn } a, b, c, d \text{ thỏa mãn } \begin{cases} a^2 + b^2 = 9; & c^2 + d^2 = 40 \\ \frac{1}{a^2} = \frac{2x^2}{b^2}; & \frac{40}{c^2} = \frac{9y^2}{d^2} \\ x + y = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = \sqrt{2}/3 \\ c = 2\sqrt{10} \\ d = 2 \end{cases}$$

.....=> Như vậy khi đã nắm được nguyên lý hoạt động của pp này ta có thể dùng nó với mọi loại BĐT chứ không riêng gì CS. Sau đây sẽ là một vài ví dụ

PP phân phối lại

Cho $a, b, c > 0$ CMR $\frac{5b^3 - a^3}{ab + 3b^2} + \frac{5c^3 - b^3}{bc + 3c^2} + \frac{5a^3 - c^3}{ca + 3a^2} \leq a + b + c$

Không thể lấy $\frac{a+b}{4} - \frac{5b^3 - a^3}{ab + 3b^2}$ nên ta nghĩ đến việc tìm m, n để $ma + nb - \frac{5b^3 - a^3}{ab + 3b^2} \geq 0$

Cũng có nghĩa là $(ma + nb)(ab + 3b^2) - (5b^3 - a^3) = a^3 + ma^2b + (3m + n)ab^2 + (3n - 5)b^3 \geq 0$

Kiến thức bổ trợ: Cho $\begin{cases} f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \\ f(x_1) = 0 \end{cases}$ thì $f(x) \geq 0 \forall x \Leftrightarrow 3ax_1^2 + 2bx_1 + c = 0$

Chia cho b^3 và đặt $x = \frac{a}{b} \Rightarrow f(x) = x^3 + mx^2 + (3m + n)x + (3n - 5) \geq 0$. Dấu bằng lại xảy ra tại $x = 1$ nên

$$\text{ta có hệ } \begin{cases} f(1) = 1 + m + (3m + n) + (3n - 5) = 0 \\ 3 + 2m + (3m + n) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -1 \\ n = 2 \end{cases}$$

Trở lại bài toán ta có $(-a + 2b) - \frac{5b^3 - a^3}{ab + 3b^2} \geq 0 \Leftrightarrow f(x) = x^3 - x^2 - x + 1 = (x - 1)(x^2 + 1) \geq 0 \left(x = \frac{a}{b} \right)$

Chú ý: Đây là một kỹ thuật khá mạnh trong chứng minh các bài toán phân thức có bậc vừa phải. Kiến thức bổ sung chính là đạo hàm bậc nhất của các hàm đa thức tuy nhiên không cần hiểu gì về nó bạn chỉ cần nhớ là với hàm đa thức bậc 4 ta sẽ đi xét $4ax^3 + 3ax^2 + 2bx + c = 0$. Các bậc nhỏ hơn thì coi như hệ số bậc lớn bằng 0.

➡ Sau khi đọc xong bài toán trên chúng ta sẽ có cái nhìn tổng quát hơn khá nhiều cho các bài báo "Hành trình đi đến bài toán tổng quát" (THTT số 371 tháng 8/2008) và "Một phương pháp chứng minh bất đẳng thức" (THTT số 403 tháng 1/1011)

Bài tập cho pp điểm rơi

$$1. \text{ Cho } \begin{cases} a, b, c > 0 \\ a + b + c = \frac{47}{12} \end{cases} \text{ Tìm Min } M = 3a^2 + 4b^2 + 5c^2$$

$$2. \text{ Cho } a + b + c = 2011. \text{ Tìm Max } M = a^4 b^2 c^{1995}$$

3. Cho $0 < b \leq a \leq 4$, $a + b \leq 7$, $2 \leq c \leq 3 \leq d$ Tìm Min $M = \frac{2c + \frac{1}{c} + d + \frac{2}{d}}{a^2 + b^2}$
4. Cho $a, b, c > 0$ và $a^2b + b^2c + c^2a = 1$. Tìm Min $M = 2(a^3 + b^3) + c^3$
5. CMR Với $a, b, c > 0$ thì $\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{4c^2}{a} \geq a + 3b$
6. Cho $a, b, c, d > 0$ và $c + d = 4$, $4a^2 + b^2 = 2$. Tìm Max $M = 2ac + bd + cd$
7. CMR Với $a, b, c > 0$ thì $\frac{a^3}{b(c+a)} + \frac{b^3}{c(a+b)} + \frac{c^2}{b+c} \geq a + \frac{b}{2}$
8. Tìm Max $M = (x+z)(y+t)$ biết $x^2 + y^2 + 2z^2 + 2t^2 = 1$
9. Tìm Min $M = x + \frac{11}{2x} + \sqrt{4\left(1 + \frac{7}{x^2}\right)}$
10. Tìm Max $M = 2x + \sqrt{1 - 4x - x^2}$
11. Biết $x, y \geq 0$, $z \geq 60$, $x + y + z = 100$. Tìm Max $M = xyz$
12. Cho $x, y, z \geq 0$ và $x + y + z = 1$ Tìm Min $M = \frac{x+y}{xyz}$
13. Tìm cực trị $M = x(99 + \sqrt{101 - x^2})$
14. Cho $x, y, z \geq 0$ và $3x^2 + 4y^2 + 5z^2 = xyz$ Tìm Min $M = 3x + 2y + z$
15. Cho $\begin{cases} a, b > 0 \\ 1 \geq a + \frac{1}{b} \end{cases}$ Tìm Min $M = 32\frac{a}{b} + 1999\frac{b}{a}$
16. Cho $3x^2 + 2y^2 + z^2 \leq 1$. Tìm Min $M = \frac{3a}{bc} + \frac{4b}{ca} + \frac{5c}{ab}$

Bài tập rèn luyện kỹ năng sử dụng Cô-si

LT3: Cho $0 \leq x \leq 3$, $0 \leq y \leq 4$. Tìm max $M = (3-x)(4-y)(2x+3y)$

LT4: Cho ba số dương a, b, c thỏa $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. Chứng minh:

$$\frac{a}{b^2 + c^2} + \frac{b}{c^2 + a^2} + \frac{c}{a^2 + b^2} \geq \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

LT5: Cho $x \in [0; 1]$ Tìm Min $M = \frac{2010}{a} + \frac{2011}{1-a}$

LT6: Tìm Min $M = \frac{\sqrt{ab}}{a+b} + \frac{a+b}{\sqrt{ab}}$

LT7: Cho $a, b, c > 0$ và $a^2 \geq b^2 + c^2$ Tìm Min $M = \frac{b^2 + c^2}{a^2} + a^2\left(\frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right)$

LT10: Tìm Min $M = \frac{2009 + 2010\sqrt{1-x^2} + 2011}{\sqrt{1-x^2}}$

LT11: Min $M = 2a + \frac{32}{(a-b)(2b+3)^2}$ với $a > b > 0$

LT15: CMR Với $a, b, c > 0$ thì $\frac{a^3}{b(c+2a)} + \frac{b^3}{c(a+2b)} + \frac{c^2}{a(b+2c)} \geq \frac{a+b+c}{3}$

LT16: Cho $x, y, z > 0$ và $xy + yz + zx = 3$ Tìm Min $M = \frac{1}{xyz} + \frac{4}{(x+y)(y+z)(z+x)}$

LT17: Tìm Max $M = x^2(1-x^3)$ với $0 < x < 1$ rồi tìm liên hệ cho LT4

Tác giả đã tham khảo quá nhiều tài liệu nên không thể nhớ rõ. Mọi thông tin đóng góp xin gửi về hieuvghy@gmail.com