Bài 22. Chứng minh rằng: Nếu p là số nguyên tố thì $2.3.4...(p-2)(p-1)+1 \vdots p$.

2.4 Phụ lục: Bạn nên biết

Mười số nguyên tố có 93 chữ số lập thành cấp số cộng

Sau đây là một số nguyên tố gồm 93 chữ số:

100996972469714247637786655587969840329509324689190041
803603417758904341703348882159067229719

Kỷ lục này do 70 nhà toán học lập được năm 1998 thật khó mà đánh bại được. Họ mất nhiều tháng tính toán mới tìm được mười số nguyên tố tạo thành một cấp số cộng.

Từ mục trò chơi trong 1 tạp chí khoa học, hai nhà nghiên cứu ở trường Đại học Lyonl (Pháp) đã đào sâu ý tưởng: Tìm 6 số nguyên tố sao cho hiệu 2 số liên tiếp luôn luôn như nhau. Điều đó là dễ đối với các chuyên gia nhưng họ muốn đi xa hơn. Cũng không có vấn đề gì khó khăn đối với một dãy 7 số. Họ cần sự hỗ trợ một chút để đạt được 8 số, một sự hỗ trợ hơn nữa để đạt tới 9 số. Cuối cùng tháng 3 năm 1998 có 70 nhà toán học từ khắp trên thế giới cùng với 200 máy điện toán hoạt động liên tục đã tìm ra 10 số, mỗi số có 93 chữ số, mà hiệu số của 2 số liên tiếp luôn luôn là 210. Từ số nguyên tố ở trên chỉ cần thêm vào 210 là được số nguyên tố thứ 2....

Kỷ lục có lẽ dừng ở đó: Theo ước tính của các nhà khoa học muốn tìm được 1 dãy 11 số nguyên tố thì phải mất hơn 10 tỉ năm.

"Sinh ba" rất ít, phải chăng "sinh đôi" lại rất nhiều

Ta biết rằng các số nguyên tố "có thể xa nhau tuỳ ý" điều này thể hiện ở bài tập:

Chuyên đề

SỐ HỌC

Diễn đàn Toán học

Bài 12. Tìm các số nguyên tố x, y, z thoả mãn $x^y + 1 = z$.

Bài 13. Tìm số nguyên tố $\overline{abcd}$ thỏa $\overline{ab}, \overline{ac}$ là các số nguyên tố và $b^2 = \overline{cd} + b - c$.

Bài 14. Cho các số $p = b^c + a, q = a^b + c, r = c^a + b (a, b, c \in \mathbb{N}^*)$ là các số nguyên tố. Chứng minh rằng 3 số p, q, r có ít nhất hai số bằng nhau.

Bài 15. Tìm tất cả các số nguyên tố x, y sao cho:

a) $x^2 - 12y^2 = 1$

b) $3x^2 + 1 = 19y^2$

c) $5x^2 - 11y^2 = 1$

d) $7x^2 - 3y^2 = 1$

e) $13x^2 - y^2 = 3$

f) $x^2 = 8y + 1$

Bài 16. Chứng minh rằng điều kiện cần và đủ để p và $8p^2 + 1$ là các số nguyên tố là $p = 3$.

Bài 17. Chứng minh rằng: Nếu $a^2 - b^2$ là một số nguyên tố thì $a^2 - b^2 = a + b$.

Bài 18. Chứng minh rằng mọi số nguyên tố lớn hơn 3 đều có dạng $6n+1$ hoặc $6n - 1$.

Bài 19. Chứng minh rằng tổng bình phương của 3 số nguyên tố lớn hơn 3 không thể là một số nguyên tố.

Bài 20. Cho số tự nhiên $n \geq 2$. Gọi $p_1, p_2, ..., p_n$ là những số nguyên tố sao cho $p_n \leq n+1$. Đặt $A = p_1.p_2...p_n$. Chứng minh rằng trong dãy số các số tự nhiên liên tiếp: $A + 2, A + 3, ..., A + (n + 1)$, không chứa một số nguyên tố nào.

Bài 21. Chứng minh rằng: Nếu p là số nguyên tố thì $2.3.4...(p - 3)(p - 2) - 1 \vdots p$.

d) $p+8 \in \mathbb{P}$. Chứng minh rằng: $p+4$ là hợp số.

e) $4p+1 \in \mathbb{P}$. Chứng minh rằng: $2p+1$ là hợp số.

f) $5p+1 \in \mathbb{P}$. Chứng minh rằng: $10p+1$ là hợp số.

g) $8p+1 \in \mathbb{P}$. Chứng minh rằng: $8p-1$ là hợp số.

h) $8p-1 \in \mathbb{P}$. Chứng minh rằng: $8p+1$ là hợp số.

i) $8p^2-1 \in \mathbb{P}$. Chứng minh rằng: $8p^2+1$ là hợp số.

j) $8p^2+1 \in \mathbb{P}$. Chứng minh rằng: $8p^2-1$ là hợp số.

BÀI 4. Chứng minh rằng:

a) Nếu p và q là hai số nguyên tố lớn hơn 3 thì $p^2-q^2 \,\vdots\, 24$.

b) Nếu $a, a+k, a+2k (a, k \in \mathbb{N}^*)$ là các số nguyên tố lớn hơn 3 thì $k \,\vdots\, 6$.

BÀI 5. a) Một số nguyên tố chia cho 42 có số dư r là hợp số. Tìm số dư r.

b) Một số nguyên tố chia cho 30 có số dư r. Tìm số dư r biết rằng r không là số nguyên tố.

BÀI 6. Tìm số nguyên tố có ba chữ số, biết rằng nếu viết số đó theo thứ tự ngược lại thì ta được một số là lập phương của một số tự nhiên.

BÀI 7. Tìm số tự nhiên có 4 chữ số, chữ số hàng nghìn bằng chữ số hàng đơn vị, chữ số hàng trăm bằng chữ số hàng chục và số đó viết được dưới dạng tích của 3 số nguyên tố liên tiếp.

BÀI 8. Tìm 3 số nguyên tố là các số lẻ liên tiếp.

BÀI 9. Tìm 3 số nguyên tố liên tiếp p, q, r sao cho $p^2+q^2+r^2 \in \mathbb{P}$.

BÀI 10. Tìm tất cả các bộ ba số nguyên tố a, b, c sao cho $abc < ab + bc + ca$.

BÀI 11. Tìm 3 số nguyên tố p, q, r sao cho $p^q + q^p = r$.

Chuyên đề

SỐ HỌC

Chế bản

Trần Quốc Nhật Hân [perfectstrong]
Trần Trung Kiên [Ispectorgadget]
Phạm Quang Toàn [Phạm Quang Toàn]
Lê Hữu Điền Khuê [Nesbit]
Đinh Ngọc Thạch [T*genie*]

BÀI 8. Tìm tất cả các số nguyên tố x, y sao cho: $x^2 - 6y^2 = 1$.

BÀI 9. Cho p và $p+2$ là các số nguyên tố ($p > 3$). Chứng minh rằng $p+1 \vdots 6$.

2.3.2 Bài tập không có hướng dẫn

BÀI 1. Tìm số nguyên tố p sao cho các số sau cũng là số nguyên tố:

a) $p+2$ và $p+10$.
b) $p+10$ và $p+20$.
c) $p+10$ và $p+14$.
d) $p+14$ và $p+20$.
e) $p+2$ và $p+8$.
f) $p+2$ và $p+14$.
g) $p+4$ và $p+10$.
h) $p+8$ và $p+10$.

BÀI 2. Tìm số nguyên tố p sao cho các số sau cũng là số nguyên tố:

a) $p+2, p+8, p+12, p+14$
b) $p+2, p+6, p+8, p+14$
c) $p+6, p+8, p+12, p+14$
d) $p+2, p+6, p+8, p+12, p+14$
e) $p+6, p+12, p+18, p+24$
f) $p+18, p+24, p+26, p+32$
g) $p+4, p+6, p+10, p+12, p+16$

BÀI 3. Cho trước số nguyên tố $p > 3$ thỏa

a) $p+4 \in \mathbb{P}$. Chứng minh rằng: $p+8$ là hợp số.
b) $2p+1 \in \mathbb{P}$. Chứng minh rằng: $4p+1$ là hợp số.
c) $10p+1 \in \mathbb{P}$. Chứng minh rằng: $5p+1$ là hợp số.

Bài 3. Tổng của 2 số nguyên tố có thể bằng 2003 hay không? Vì sao?

HD: Vì tổng của 2 số nguyên tố bằng 2003, nên trong 2 số nguyên tố đó tồn tại 1 số nguyên tố chẵn. Mà số nguyên tố chẵn duy nhất là 2. Do đó số nguyên tố còn lại là 2001. Do 2001 chia hết cho 3 và 2001 > 3. Suy ra 2001 không phải là số nguyên tố.

Bài 4. Tìm số nguyên tố p, sao cho $p+2; p+4$ cũng là các số nguyên tố.

Bài 5. Cho p và $p+4$ là các số nguyên tố $(p > 3)$. Chứng minh rằng $p+8$ là hợp số.

HD: Vì p là số nguyên tố và $p > 3$, nên số nguyên tố p có 1 trong 2 dạng:

- *Nếu $p = 3k+2$ thì $p+4 = 3k+6 = 3(k+2) \Rightarrow p+4 \vdots 3$ và $p+4 > 3$. Do đó $p+4$ là hợp số: trái đề bài.*
- *Nếu $p = 3k+1$ thì $p+8 = 3k+9 = 3(k+3) \Rightarrow p+8 \vdots 3$ và $p+8 > 3$. Do đó $p+8$ là hợp số.*

Bài 6. Chứng minh rằng mọi số nguyên tố lớn hơn 2 đều có dạng $4n+1$ hoặc $4n-1$.

Bài 7. Tìm số nguyên tố, biết rằng số đó bằng tổng của hai số nguyên tố và bằng hiệu của hai số nguyên tố.

HD: Giả sử a, b, c, d, e là các số nguyên tố và $d > e$. Theo đề bài:

$$a = b + c = d - e \quad (*)$$

Từ (*) $\Rightarrow a > 2$ nên a là số nguyên tố lẻ $\Rightarrow b+c; d-e$ là số lẻ.
Do b, d là các số nguyên tố $\Rightarrow b, d$ là số lẻ $\Rightarrow c, e$ là số chẵn.
$\Rightarrow c = e = 2$ (do c, elà số nguyên tố) $\Rightarrow a = b+2 = d-2 \Rightarrow d = b+4$.
Vậy ta cần tìm số nguyên tố b sao cho $b+2$ và $b+4$ cũng là các số nguyên tố.

Lời giới thiệu

Bạn đọc thân mến,

Số học là một phân môn quan trọng trong toán học đã gắn bó với chúng ta xuyên suốt quá trình học Toán từ bậc tiểu học đến trung học phổ thông. Chúng ta được tiếp xúc với Số học bắt đầu bằng những khái niệm đơn giản như tính chia hết, ước chung lớn nhất, bội chung nhỏ nhất... giúp làm quen dễ dàng hơn với sự kì diệu của những con số cho đến những vấn đề đòi hỏi nhiều tư duy hơn như đồng dư, số nguyên tố, các phương trình Diophantine mà nổi tiếng nhất là định lý lớn Fermat..., đâu đâu từ tầm vi mô đến vĩ mô, từ cậu bé lớp một bi bô 4 chia hết cho 2 đến Giáo sư thiên tài Andrew Wiles (người giải quyết bài toán Fermat), chúng ta đều có thể thấy được hơi thở của Số học trong đó.

Số học quan trọng như vậy nhưng lạ thay số chuyên đề viết về nó lại không nhiều nếu đem so với kho tàng đồ sộ các bài viết về bất đẳng thức trên các diễn đàn mạng. Xuất phát từ sự thiếu hụt đó cũng như để kỉ niệm tròn một năm Diễn đàn Toán học khai trương trang chủ mới (16/01/2012 - 16/01/2013), nhóm biên tập chúng tôi cùng với nhiều thành viên tích cực của diễn đàn đã chung tay biên soạn một chuyên đề gửi đến bạn đọc.

Chuyên đề là tập hợp các bài viết riêng lẻ của các tác giả *Nguyễn Mạnh Trùng Dương* (duongld) , *Nguyễn Trần Huy* (yeutoan11), Nguyễn Trung Hiếu (nguyentrunghieua), *Phạm Quang Toàn* (Phạm Quang Toàn), *Trần Nguyễn Thiết Quân* (L Lawliet), *Trần Trung Kiên* (Ispectorgadget), *Nguyễn Đình Tùng* (tungc3sp)... cùng sự góp sức gián tiếp của nhiều thành viên tích cực trên Diễn đàn Toán học như Nguyen Lam Thinh, nguyenta98, Karl Heinrich Marx, The Gunner, perfectstrong...

Kiến thức đề cập trong chuyên đề tuy không mới nhưng có thể giúp các bạn phần nào hiểu sâu hơn một số khái niệm cơ bản trong Số học cũng như trao đổi cùng các bạn nhiều dạng bài tập hay và khó từ cấp độ dễ đến các bài toán trong các kì thi Học sinh giỏi quốc gia, quốc tế.

Chuyên đề gồm 7 chương. Chương 1 đề cập đến các khái niệm về **Ước và Bội**. **Số nguyên tố** và một số bài toán về nó được giới thiệu trong chương 2. Chương 3 nói sâu hơn về **Các bài toán chia hết**. **Phương trình nghiệm nguyên**, **Phương trình đồng dư** được phác họa trong các chương 4 và 5. **Hệ thặng dư và định lý Thặng dư Trung Hoa** sẽ được gửi đến chúng ta qua chương 6 trước khi kết thúc chuyên đề bằng **Một số bài toán số học hay trên VMF** ở chương 7.

Do thời gian chuẩn bị gấp rút nội dung chuyên đề chưa được đầu tư thật sự tỉ mỉ cũng như có thể còn nhiều sai sót trong các bài viết, chúng tôi mong bạn đọc thông cảm. Mọi sự ủng hộ, đóng góp, phê bình của độc giả sẽ là nguồn động viên tinh thần to lớn cho ban biên tập cũng như cho các tác giả để những phiên bản cập nhật sau của chuyên đề được tốt hơn, đóng góp nhiều hơn nữa cho kho tàng học thuật của cộng đồng toán mạng. Chúng tôi hi vọng qua chuyên đề này sẽ giúp các bạn tìm thêm được cảm hứng trong số học và thêm yêu vẻ đẹp của những con số. Mọi trao đổi góy ý xin gửi về địa chỉ email : contact@diendantoanhoc.net.

Trân trọng,
Nhóm biên tập Chuyên đề Số học.

Lời giải. Ta có:

$$p^2 = 8q + 1 \Rightarrow 8q = p^2 - 1 = (p+1)(p-1) \tag{2.1}$$

Do $p^2 = 8q + 1$: lẻ $\Rightarrow p^2$: lẻ $\Rightarrow p$: lẻ. Đặt $p = 2k + 1$.
Thay vào (2.1) ta có:

$$8q = 2k(2k+2) \Rightarrow 2q = k(k+1) \tag{2.2}$$

Nếu $q = 2 \Rightarrow 4 = k(k+1) \Rightarrow$ không tìm được $k \in \mathbb{N}$
Vậy $q > 2$. Vì $q \in \mathbb{P} \Rightarrow (2, q) = 1$.
Từ (2.2) ta có:

a) $k = 2$ và $q = k + 1 \Rightarrow k = 2; q = 3$. Thay kết quả trên vào (2.2) ta có: $p = 2.2 + 1 = 5$

b) $q = k$ và $2 = k + 1 \Rightarrow q = 1$:loại.

Vậy $(q; p) = (5; 3)$. ■

2.3 Bài tập

2.3.1 Bài tập có hướng dẫn

Bài 1. Ta biết rằng có 25 số nguyên tố nhỏ hơn 100. Tổng của 25 số nguyên tố nhỏ hơn 100 là số chẵn hay số lẻ?

HD :Trong 25 số nguyên tố nhỏ hơn 100 có chứa một số nguyên tố chẵn duy nhất là 2, còn 24 số nguyên tố còn lại là số lẻ. Do đó tổng của 25 số nguyên tố là số chẵn.

Bài 2. Tổng của 3 số nguyên tố bằng 1012. Tìm số nguyên tố nhỏ nhất trong ba số nguyên tố đó.

HD: Vì tổng của 3 số nguyên tố bằng 1012, nên trong 3 số nguyên tố đó tồn tại ít nhất một số nguyên tố chẵn. Mà số nguyên tố chẵn duy nhất là 2 và là số nguyên tố nhỏ nhất. Vậy số nguyên tố nhỏ nhất trong 3 số nguyên tố đó là 2.

- Nếu $p = 3k+2$. Khi đó $4p+1 = 4(3k+2)+1 = 12k+9 \vdots 3 \Rightarrow 4p+1$ là hợp số ■

Ví dụ 2.14. *Trong dãy số tự nhiên có thể tìm được 1997 số liên tiếp nhau mà không có số nguyên tố nào hay không ?* △

Lời giải. Chọn dãy số: $(a_i) : a_i = 1998! + i + 1$ $(i = \overline{1,1997}) \Rightarrow a_i \vdots i + 1\ \forall i = \overline{1,1997}$
Như vậy: Dãy số $a_1; a_2; a_3; .....a_{1997}$ gồm có 1997 số tự nhiên liên tiếp không có số nào là số nguyên tố. ■

Ví dụ 2.15 (Tổng quát bài tập 2.14). *Chứng minh rằng có thể tìm được 1 dãy số gồm n số tự nhiên liên tiếp $(n > 1)$ không có số nào là số nguyên tố ?* △

Lời giải. Ta chọn dãy số sau: $(a_i) : a_i = (n+1)! + i + 1 \Rightarrow a_i \vdots i + 1\ \forall i = \overline{1,n}$.
Bạn đọc hãy tự chứng minh dãy (a_i) ở trên sẽ gồm có n số tự nhiên liên tiếp trong đó không có số nào là số nguyên tố cả. ■

2.2.5 Các dạng khác

Ví dụ 2.16. *Tìm 3 số nguyên tố sao cho tích của chúng gấp 5 lần tổng của chúng.* △
Lời giải. Gọi 3 số nguyên tố phải tìm là a, b, c. Ta có: $abc = 5(a+b+c) \Rightarrow abc \vdots 5$
Vì a, b, c có vai trò bình đẳng nên không mất tính tổng quát, giả sử: $a \vdots 5 \Rightarrow a = 5$
Khi đó: $5bc = 5(5+b+c) \Leftrightarrow 5+b+c = bc \Leftrightarrow (c-1)(b-1) = 6$

$$\text{Do vậy: } \left[\begin{array}{l} \begin{cases} b-1=1 \\ c-1=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=2 \\ c=7 \end{cases} \text{ chọn} \\ \begin{cases} b-1=2 \\ c-1=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=3 \\ c=4 \end{cases} \text{ loại} \end{array}\right.$$

Vậy bộ số $(a; b; c)$ cần tìm là hoán vị của $(2; 5; 7)$. ■

Ví dụ 2.17. *Tìm $p, q \in \mathbb{P}$ sao cho $p^2 = 8q + 1$.* △

Mục lục

- $p = 2 \Rightarrow 2^p + p^2 = 2^2 + 2^2 = 8 \notin \mathbb{P}$
- $p = 3 \Rightarrow 2^p + p^2 = 2^3 + 3^2 = 17 \in \mathbb{P}$
- $p > 3 \Rightarrow p \not\vdots 3$. Ta có $2^p + p^2 = (p^2 - 1) + (2^p + 1)$.
  Vì p lẻ $\Rightarrow 2^p + 1 \vdots 3$ và $p^2 - 1 = (p+1)(p-1) \vdots 3 \Rightarrow 2^p + p^2 \notin \mathbb{P}$

Vậy có duy nhất 1 giá trị $p = 3$ thoả mãn. ■

Ví dụ 2.11. *Tìm tất cả các số nguyên tố p sao cho: $p|2^p + 1$.* △
Lời giải. Vì $p \in \mathbb{P} : p|2^p + 1 \Rightarrow p > 2 \Rightarrow (2; p) = 1$
Theo định lý Fermat, ta có: $p|2^{p-1} - 1$. Mà

$$p|2^p + 1 \Rightarrow p|2(2^{p-1} - 1) + 3 \Rightarrow p|3 \Rightarrow p = 3$$

Vậy: $p = 3$. ■

2.2.4 Nhận biết số nguyên tố

Ví dụ 2.12. *Nếu p là số nguyên tố và 1 trong 2 số $8p+1$ và $8p-1$ là số nguyên tố thì số còn lại là số nguyên tố hay hợp số?* △
Lời giải.
- Nếu $p = 2 \Rightarrow 8p + 1 = 17 \in \mathbb{P}; 8p - 1 = 15 \notin \mathbb{P}$
- Nếu $p = 3 \Rightarrow 8p - 1 = 23 \in \mathbb{P}; 8p - 1 = 25 \notin \mathbb{P}$
- Nếu $p > 3$, xét 3 số tự nhiên liên tiếp: $8p - 1; 8p$ và $8p + 1$. Trong 3 số này ắt có 1 số chia hết cho 3. Nên một trong hai số $8p + 1$ và $8p - 1$ chia hết cho 3.

Kết luận: Nếu $p \in \mathbb{P}$ và 1 trong 2 số $8p + 1$ và $8p - 1$ là số nguyên tố thì số còn lại phải là hợp số. ■

Ví dụ 2.13. *Nếu $p \geq 5$ và $2p + 1$ là các số nguyên tố thì $4p + 1$ là nguyên tố hay hợp số?* △
Lời giải. Xét 3 số tự nhiên liên tiếp: $4p; 4p + 1; 4p + 2$. Trong 3 số ắt có một số là bội của 3.
Mà $p \geq 5; p \in \mathbb{P}$ nên p có dạng $3k + 1$ hoặc $3k + 2$

- Nếu $p = 3k + 1$ thì $2p + 1 = 6k + 3 \vdots 3$: (trái với giả thiết)

Lời giải. Vì $n > 2$ nên $k = n! - 1 > 1$, do đó k có ít nhất một ước số nguyên tố p. Tương tự bài tập 3, ta chứng minh được mọi ước nguyên tố p của k đều lớn hơn k.
Vậy: $p > n \Rightarrow n < p < n! - 1 < n!$ (đpcm) ■

2.2.3 Tìm số nguyên tố thỏa mãn điều kiện cho trước

Ví dụ 2.8. *Tìm tất cả các giá trị của số nguyên tố p để: $p + 10$ và $p + 14$ cũng là số nguyên tố.* △

Lời giải. Nếu $p = 3$ thì $p + 10 = 3 + 10 = 13$ và $p + 14 = 3 + 14 = 17$ đều là các số nguyên tố nên $p = 3$ là giá trị cần tìm.
Nếu $p > 3 \Rightarrow p$ có dạng $3k + 1$ hoặc dạng $3k - 1$

- Nếu $p = 3k + 1$ thì $p + 14 = 3k + 15 = 3(k + 5)\vdots 3$

- Nếu $p = 3k - 1$ thì $p + 10 = 3k + 9 = 3(k + 3)\vdots 3$

Vậy nếu $p > 3$ thì hoặc $p + 10$ hoặc $p + 14$ là hợp số : không thỏa mãn bài. Vậy $p = 3$. ■

Ví dụ 2.9. *Tìm $k \in \mathbb{N}$ để trong 10 số tự nhiên liên tiếp:*

$$k + 1; k + 2; k + 3; ....k + 10$$

có nhiều số nguyên tố nhất. △

Lời giải. Nếu $k = 0$: từ 1 đến 10 có 4 số nguyên tố: $2; 3; 5; 7$.
Nếu $k = 1$: từ 2 đến 11 có 5 số nguyên tố: $2; 3; 5; 7; 11$.
Nếu $k > 1$: từ 3 trở đi không có số chẵn nào là số nguyên tố. Trong 5 số lẻ liên tiếp, ít nhất có 1 số là bội số của 3 do đó, dãy sẽ có ít hơn 5 số nguyên tố.
Vậy với $k = 1$, dãy tương ứng: $k + 1; k + 2, ...k + 10$ có chứa nhiều số nguyên tố nhất (5 số nguyên tố). ■

Ví dụ 2.10. *Tìm tất cả các số nguyên tố p để: $2^p + p^2$ cũng là số nguyên tố.* △

Lời giải. Xét 3 trường hợp:

Chương

1 Ước và Bội

Nguyễn Mạnh Trùng Dương (DUONGLD)
Nguyễn Trần Huy (YEUTOAN11)

Ước và bội là 2 khái niệm quan trọng trong chương trình số học THCS. Chuyên đề này sẽ giới thiệu những khái niệm và tính chất cơ bản về ước, ước số chung, ước chung lớn nhất, bội, bội số chung, bội chung nhỏ nhất. Một số bài tập đề nghị về các vấn đề này cũng sẽ được đề cập đến ở cuối bài viết.

1.1 Ước số, ước số chung, ước số chung lớn nhất

Trong phần này, chúng tôi sẽ trình bày một số khái niệm về ước số, ước số chung và ước số chung lớn nhất kèm theo một vài tính chất của chúng. Một số bài tập ví dụ cho bạn đọc tham khảo cũng sẽ được đưa ra.

1.1.1 Định nghĩa

Định nghĩa 1.1 *Số tự nhiên $d \neq 0$ được gọi là một ước số của số tự nhiên a khi và chỉ khi a chia hết cho d. Ta nói d chia hết a, kí hiệu $d|a$. Tập hợp các ước của a là: $U(a) = \{d \in \mathbb{N} : d|a\}$.* △

TÍNH CHẤT 1.1– *Nếu $U(a) = \{1; a\}$ thì a là số nguyên tố.* □

Định nghĩa 1.2 *Nếu $U(a)$ và $U(b)$ có những phần tử chung thì những phần tử đó gọi là ước số chung của a và b. Ta kí hiệu:*

$$\begin{aligned} USC(a;b) &= \{d \in \mathbb{N} : (d|a) \wedge (d|b)\} \\ &= \{d \in \mathbb{N} : (d \in U(a)) \wedge (d \in U(b))\}. \end{aligned}$$

TÍNH CHẤT 1.2– *Nếu $USC(a;b) = \{1\}$ thì a và b nguyên tố cùng nhau.* □

Định nghĩa 1.3 *Số $d \in \mathbb{N}$ được gọi là ước số chung lớn nhất của a và b $(a; b \in \mathbb{Z})$ khi d là phần tử lớn nhất trong tập $USC(a;b)$. Ký hiệu ước chung lớn nhất của a và b là $UCLN(a;b)$, $(a;b)$ hay $gcd(a;b)$.* △

1.1.2 Tính chất

Sau đây là một số tính chất của ước chung lớn nhất:

- Nếu $(a_1; a_2; \ldots; a_n) = 1$ thì ta nói các số $a_1; a_2; \ldots; a_n$ nguyên tố cùng nhau.
- Nếu $(a_m; a_k) = 1, \forall m \neq k, \{m;k\} \in \{1;2;\ldots;n\}$ thì ta nói các $a_1; a_2; \ldots; a_n$ đôi một nguyên tố cùng nhau.
- $c \in USC(a;b)$ thì $\left(\dfrac{a}{c};\dfrac{b}{c}\right) = \dfrac{(a;b)}{c}$.
- $d = (a;b) \Leftrightarrow \left(\dfrac{a}{d};\dfrac{b}{d}\right) = 1$.
- $(ca;cb) = c(a;b)$.
- $(a;b) = 1$ và $b|ac$ thì $b|c$.
- $(a;b) = 1$ và $(a;c) = 1$ thì $(a;bc) = 1$.
- $(a;b;c) = ((a;b);c)$.
- Cho $a > b > 0$
  - Nếu $a = b.q$ thì $(a;b) = b$.
  - Nếu $a = bq + r (r \neq 0)$ thì $(a;b) = (b;r)$.

Vậy: Có vô số số nguyên tố có dạng $4x - 1$ (hay có dạng $4x + 3$). ■

Trên đây là một số bài toán chứng minh đơn giản của định lý Dirichlet: Có vô số số nguyên tố dạng $ax + b$ trong đó $a, b, x \in \mathbb{N}, (a,b) = 1$.

2.2.2 Chứng minh số nguyên tố

Ví dụ 2.4. *Chứng minh rằng: $(p-1)!$ chia hết cho p nếu p là hợp số, không chia hết cho p nếu p là số nguyên tố.* △

Lời giải.
- Xét trường hợp p là hợp số: Nếu p là hợp số thì p là tích của các thừa số nguyên tố nhỏ hơn p và số mũ các luỹ thừa này không thể lớn hơn số mũ của chính các luỹ thừa ấy chứa trong $(p-1)!$. Vậy: $(p-1)! \vdots p$ (đpcm).
- Xét trường hợp p là số nguyên tố: Vì $p \in \mathbb{P} \Rightarrow p$ nguyên tố cùng nhau với mọi thừa số của $(p-1)!$ (đpcm). ■

Ví dụ 2.5. *Cho $2^m - 1$ là số nguyên tố. Chứng minh rằng m cũng là số nguyên tố.* △

Lời giải. Giả sử m là hợp số $\Rightarrow m = p.q$ $(p, q \in \mathbb{N}; p, q > 1)$
Khi đó: $2^m - 1 = 2^{pq} - 1 = (2^p)^q - 1 = (2^p - 1)((2^p)^{q-1} + (2^p)^{q-2} + \ldots.. + 1)$
vì $p > 1 \Rightarrow 2^p - 1 > 1$ và $(2^p)^{q-1} + (2^p)^{q-2} + \ldots.. + 1 > 1$
Dẫn đến $2^m - 1$ là hợp số :trái với giả thiết $2^m\check{}1$ là số nguyên tố.
Vậy m phải là số nguyên tố (đpcm) ■

Ví dụ 2.6. *Chứng minh rằng: mọi ước nguyên tố của $1994! - 1$ đều lớn hơn 1994.* △

Lời giải. Gọi p là ước số nguyên tố của $1994! - 1$

Giả sử $p \leq 1994 \Rightarrow 1994.1993.....3.2.1 \vdots p \Rightarrow 1994! \vdots p$.

Mà $1994! - 1 \vdots p \Rightarrow 1 \vdots p$ (vô lý)
Vậy: $p > 1994$ (đpcm). ■

Ví dụ 2.7. *Chứng minh rằng: $n > 2$ thì giữa n và $n!$ có ít nhất 1 số nguyên tố (từ đó suy ra có vô số số nguyên tố).* △

2. Khả năng 2: M là hợp số: Ta chia M cho $2, 3, 5, ..., p$ đều tồn tại một số dư khác 0 nên các ước nguyên tố của M đều lớn hơn p, trong các ước này không có số nào có dạng $3x+1$ (đã chứng minh trên). Do đó ít nhất một trong các ước nguyên tố của M phải có dạng $3x$ (hợp số) hoặc $3x + 1$

Vì nếu tất cả có dạng $3x+1$ thì M phải có dạng $3x+1$ (đã chứng minh trên). Do đó, ít nhất một trong các ước nguyên tố của M phải có dạng $3x - 1$, ước này luôn lớn hơn p.

Vậy: Có vô số số nguyên tố dạng $3x - 1$. ■

Ví dụ 2.3. *Chứng minh rằng: Có vô số số nguyên tố có dạng* $4x + 3$. △

Lời giải. *Nhận xét.* Các số nguyên tố lẻ không thể có dạng $4x$ hoặc $4x + 2$. Vậy chúng chỉ có thể tồn tại dưới 1 trong 2 dạng $4x + 1$ hoặc $4x + 3$.
Ta sẽ chứng minh có vô số số nguyên tố có dạng $4x + 3$.

- Xét tích 2 số có dạng $4x + 1$ là: $4m + 1$ và $4n + 1$.

  Ta có: $(4m+1)(4n+1) = 16mn+4m+4n+1 = 4(4mn+m+n)+1$.

  Vậy tích của 2 số có dạng $4x + 1$ là một số cũng có dạng $4x + 1$.

- Lấy một số nguyên tố p bất kỳ có dạng $4x + 3$, ta lập tích của $4p$ với tất cả các số nguyên tố nhỏ hơn p rồi trừ đi 1 khi đó ta có: $N = 4(2.3.5.7.....p) - 1$. Có 2 khả năng xảy ra

  1. N là số nguyên tố $\Rightarrow N = 4(2.3.5.7....p) - 1$ có dạng $4x - 1$. Những số nguyên tố có dạng $4x - 1$ cũng chính là những số có dạng $4x + 3$ và bài toán được chứng minh.
  2. N là hợp số. Chia N cho $2, 3, 5, ..., p$ đều được các số dư khác 0. Suy ra các ước nguyên tố của N đều lớn hơn p.

  Các ước này không thể có dạng $4x$ hoặc $4x + 2$ (vì đó là hợp số). Cũng không thể toàn các ước có dạng $4x + 1$ vì như thế N phải có dạng $4x + 1$. Như vậy trong các ước nguyên tố của N có ít nhất 1 ước có dạng $4x - 1$ mà ước này hiển nhiên lớn hơn p.

1.1.3 Cách tìm ước chung lớn nhất bằng thuật toán Euclide

Để tìm $(a; b)$ khi a không chia hết cho b ta dùng thuật toán Euclide sau:

- $a = b.q + r_1$ thì $(a; b) = (b; r_1)$.
- $b = r_1.q_1 + r_2$ thì $(b; r_1) = (r_1; r_2)$.
- $\cdots$
- $r_{n-2} = r_{n-1}.q_{n-1} + rn$ thì $(r_{n-2}; r_{n-1}) = (r_{n-1}; r_n)$.
- $r_{n-1} = r_n.q_n$ thì $(r_{n-1}; r_n) = r_n$.
- $(a; b) = r_n$.
- $(a; b)$ là số dư cuối cùng khác 0 trong thuật toán Euclide.

1.1.4 Bài tập ví dụ

Ví dụ 1.1. *Tìm* $(2k - 1; 9k + 4), k \in \mathbb{N}^*$. △

Lời giải. Ta đặt $d = (2k - 1; 9k + 4)$. Theo tính chất về ước số chung ta có $d|2k - 1$ và $d|9k + 4$. Tiếp tục áp dụng tính chất về chia hết ta lại có $d|9(2k - 1)$ và $d|2(9k + 4)$. Suy ra $d|2(9k + 4) - 9(2k - 1)$ hay $d|17$.
Vậy $(2k - 1; 9k + 4) = 1$. ■

Ví dụ 1.2. *Tìm* $(123456789; 987654321)$. △

Lời giải. Đặt $b = 123456789; a = 987654321$. Ta nhận thấy a và b đều chia hết cho 9.
Ta lại có :

$$\begin{aligned} a + b &= 1111111110 \\ &= \frac{10^{10} - 10}{9}. \\ \Leftrightarrow 9a + 9b &= 10^{10} - 10 \end{aligned} \tag{1.1}$$

Mặt khác :

$$\begin{aligned} 10b + a &= 9999999999 \\ &= 10^{10} - 1. \end{aligned} \tag{1.2}$$

Trừ (1.2) và (1.1) vế theo vế ta được $b-8a=9$. Do đó nếu đặt $d=(a;b)$ thì $9\vdots d$.
Mà a và b đều chia hết cho 9, suy ra $d=9$. ■

Dựa vào thuật toán Euclide, ta có lời giải khác cho Ví dụ 1.2 như sau :
Lời giải.

- ↱ $987654321 = 123456789.8+9$ thì $(987654321; 123456789) = (123456789; 9)$.
- ↱ $123456789 = 9.1371421$.
- ↱ $(123456789; 987654321) = 9$. ■

Ví dụ 1.3. *Chứng minh rằng dãy số $A_n = \frac{1}{2}n(n+1), n \in \mathbb{N}^*$ chứa những dãy số vô hạn những số đôi một nguyên tố cùng nhau.* △

Lời giải. Giả sử trong dãy đang xét có k số đôi một nguyên tố cùng nhau là $t_1=1; t_2=3; \ldots; t_k=m (m \in \mathbb{N}^*)$. Đặt $a=t_1t_2\ldots t_k$. Xét số hạng t_{2a+1} trong dãy A_n:

$$\begin{aligned} t_{2a+1} &= \frac{1}{2}(2a+1)(2a+2) \\ &= (a+1)(2a+1) \\ &\geq t_k \end{aligned}$$

Mặt khác ta có $(a+1;a)=1$ và $(2a+1;a)=1$ nên $(t_{2a+1};a)=1$.
Do đó t_{2a+1} nguyên tố cùng nhau với tất cả k số $\{t_1;t_2;\ldots t_k\}$. Suy ra dãy số A_n chứa vô hạn những số đôi một nguyên tố cùng nhau. ■

1.2 Bội số, bội số chung, bội số chung nhỏ nhất

Tương tự như cấu trúc đã trình bày ở phần trước, trong phần này chúng tôi cũng sẽ đưa ra những định nghĩa, tính chất cơ bản của bội số, bội số chung, bội số chung nhỏ nhất và một số bài tập ví dụ minh họa.

2.1.5 Một số định lý đặc biệt

Định lý 2.3 (Dirichlet)– *Tồn tại vô số số nguyên tố p có dạng: $p=ax+b$ ($x,a,b \in \mathbb{N}$, a,b là 2 số nguyên tố cùng nhau).* □

Việc chứng minh định lý này khá phức tạp, trừ một số trường hợp đặc biệt, chẳng hạn có vô số số nguyên tố dạng: $2x-1; 3x-1; 4x+3; 6x+5; \ldots$

Định lý 2.4 (Tchebycheff-Betrand)– *Trong khoảng từ số tự nhiên n đến số tự nhiên $2n$ có ít nhất một số nguyên tố ($n>2$).* □

Định lý 2.5 (Vinogradow)– *Mọi số lẻ lớn hơn 3^3 là tổng của 3 số nguyên tố.* □

2.2 Một số bài toán cơ bản về số nguyên tố

2.2.1 Có bao nhiêu số nguyên tố dạng $ax+b$

Ví dụ 2.2. *Chứng minh rằng: có vô số số nguyên tố có dạng $3x-1$.* △

Lời giải. Mọi số tự nhiên không nhỏ hơn 2 có 1 trong 3 dạng: $3x; 3x+1$ hoặc $3x-1$

- Những số có dạng $3x$ (với $x>1$) là hợp số
- Xét 2 số có dạng $3x+1$: đó là số $3m+1$ và số $3n+1$.

  Xét tích $(3m+1)(3n+1) = 9mn+3m+3n+1$. Tích này có dạng: $3x+1$
- Lấy một số nguyên tố p bất có dạng $3x-1$, ta lập tích của p với tất cả các số nguyên tố nhỏ hơn p rồi trừ đi 1 ta có: $M = 2.3.5.7....p-1 = 3(2.5.7....p)-1$ thì M có dạng $3x-1$.

  Có 2 khả năng xảy ra:

  1. Khả năng 1: M là số nguyên tố, đó là số nguyên tố có dạng $3x-1>p$, bài toán được chứng minh.

nguyên tố hay không.

Hệ quả 2.1– *Nếu có số $A > 1$ không có một ước số nguyên tố nào từ 2 đến $\sqrt{A}$ thì A là một nguyên tố.* □

2.1.3 Số các ước số và tổng các ước số của 1 số

Giả sử: $A = p_1^{x_1}.p_2^{x_2}......p_n x_n$; trong đó: $p_i \in \mathbb{P}; x_i \in \mathbb{N}; i = \overline{1, n}$

Tính chất 2.1– *Số các ước số của A tính bằng công thức:*

$$T(A) = (x_1 + 1)(x_2 + 1).....(x_n + 1)$$

Ví dụ 2.1. $30 = 2.3.5$ *thì* $T(A) = (1 + 1)(1 + 1)(1 + 1) = 8$. *Kiểm tra:* $(30) = \{1; 2; 3; 5; 6; 10; 15; 30\}$ *nên* (30) *có 8 phần tử.* △

Tính chất 2.2– *Tổng các ước một số của A tính bằng công thức:*

$$\sigma(A) = \prod_{i=1}^{n} \frac{p_i^{x_i+1} - 1}{p_i - 1}$$

2.1.4 Hai số nguyên tố cùng nhau

Định nghĩa 2.3 *Hai số tự nhiên được gọi là nguyên tố cùng nhau khi và chỉ khi chúng có ước chung lớn nhất (ƯCLN) bằng 1.* △

Tính chất 2.3– *Hai số tự nhiên liên tiếp luôn nguyên tố cùng nhau.* □

Tính chất 2.4– *Hai số nguyên tố khác nhau luôn nguyên tố cùng nhau.* □

Tính chất 2.5– *Các số a, b, c nguyên tố cùng nhau khi và chỉ khi $(a, b, c) = 1$.* □

Định nghĩa 2.4 *Nhiều số tự nhiên được gọi là nguyên tố sánh đôi khi chúng đôi một nguyên tố cùng nhau.* △

1.2.1 Định nghĩa

Định nghĩa 1.4 *Số tự nhiên m được gọi là một bội số của $a \neq 0$ khi và chỉ khi m chia hết cho a hay a là một ước số của m.* △

Nhận xét. Tập hợp các bội số của $a \neq 0$ là: $B(a) = \{0; a; 2a; \ldots; ka\}, k \in \mathbb{Z}$.

Định nghĩa 1.5 *Số tự nhiên m được gọi là một bội số của $a \neq 0$ khi và chỉ khi m chia hết cho a hay a là một ước số của m* △

Định nghĩa 1.6 *Nếu 2 tập $B(a)$ và $B(b)$ có phần tử chung thì các phần tử chung đó gọi là bội số chung của a và b. Ta ký hiệu bội số chung của a và b: $BSC(a; b)$.*

Định nghĩa 1.7 *Số $m \neq 0$ được gọi là bội chung nhỏ nhất của a và b khi m là phần tử dương nhỏ nhất trong tập $BSC(a; b)$. Ký hiệu : $BCNN(a; b)$, $[a; b]$ hay $lcm(a; b)$.* △

1.2.2 Tính chất

Một số tính chất của bội chung lớn nhất:

- Nếu $[a; b] = M$ thì $\left(\frac{M}{a}; \frac{M}{b}\right) = 1$.
- $[a; b; c] = [[a; b]; c]$.
- $[a; b].(a; b) = a.b$.

1.2.3 Bài tập ví dụ

Ví dụ 1.4. *Tìm* $[n; n + 1; n + 2]$. △

Lời giải. Đặt $A = [n; n + 1]$ và $B = [A; n + 2]$. Áp dụng tính chất $[a; b; c] = [[a; b]; c]$, ta có: $B = [n; n + 1; n + 2]$.
Dễ thấy $(n; n + 1) = 1$, suy ra $[n; n + 1] = n(n + 1)$.

Lại áp dụng tính chất $[a;b] = \dfrac{a.b}{(a;b)}$ thế thì

$$[n;n+1;n+2] = \frac{n(n+1)(n+2)}{(n(n+1);n+2)}$$

.
Gọi $d = (n(n+1);n+2)$. Do $(n+1;n+2) = 1$ nên

$$\begin{aligned} d &= (n;n+2) \\ &= (n;2). \end{aligned}$$

Xét hai trường hợp:

- Nếu n chẵn thì $d = 2$, suy ra $[n;n+1;n+2] = \dfrac{n(n+1)(n+2)}{2}$.
- Nếu n lẻ thì $d = 1$, suy ra $[n;n+1;n+2] = n(n+1)(n+2)$. ■

Ví dụ 1.5. *Chứng minh rằng* $[1;2;\ldots 2n] = [n+1;n+2;\ldots;2n]$. △

Lời giải. Ta thấy được trong k số nguyên liên tiếp có một và chỉ một số chia hết cho k. Do đó bất trong các số $\{1;2;\ldots;2n\}$ đều là ước của một số nào đó trong các số $\{n+1;n+2;\ldots;2n\}$. Do đó $[1;2;\ldots n;2n] = [n+1;n+2;\ldots;2n]$. ■

1.3 Bài tập đề nghị

Thay cho lời kết, chúng tôi xin gửi đến bạn đọc một số bài tập đề nghị để luyện tập nhằm giúp các bạn quen hơn với các khái niệm và các tính chất trình bày trong chuyên đề.

BÀI 1. *a.* Cho $A = 5a+3b; B = 13a+8b(a;b \in \mathbb{N}^*)$ chứng minh $(A;B) = (a;b)$.

b. Tổng quát $A = ma+nb; B = pa+qb$ thỏa mãn $|mq-np| = 1$ với $a,b,m,n,p,q \in \mathbb{N}^*$. Chứng minh $(A;B) = (a;b)$.

BÀI 2. Tìm $(6k+5;8k+3)(k \in \mathbb{N})$.

Xét $m = n - pp' < n$ được phân tích ra thừa số nguyên tố một cách duy nhất ta thấy:

$$p|n \Rightarrow p|n - pp' \text{ hay } p|m$$

Khi phân tích ra thừa số nguyên tố ta có: $m = n - pp' = p'p.P.Q\ldots$ với $P, Q \in \mathbb{P}$ ($\mathbb{P}$ là tập các số nguyên tố).
$\Rightarrow pp'|n \Rightarrow pp'|p.q.r\ldots \Rightarrow p|q.r\ldots \Rightarrow p$ là ước nguyên tố của $q.r\ldots$
Mà p không trùng với một thừa số nào trong $q, r\ldots$ (điều này trái với gỉa thiết quy nạp là mọi số nhỏ hơn n đều phân tích được ra thừa số nguyên tố một cách duy nhất).
Vậy, điều giả sử không đúng. Định lý được chứng minh. ■

2.1.2 Cách nhận biết một số nguyên tố

Cách 1

Chia số đó lần lượt cho các nguyên tố từ nhỏ đến lớn: $2;3;5;7\ldots$

Nếu có một phép chia hết thì số đó không nguyên tố.

Nếu thực hiện phép chia cho đến lúc thương số nhỏ hơn số chia mà các phép chia vẫn có số dư thì số đó là nguyên tố.

Cách 2

Một số có hai ước số lớn hơn 1 thì số đó không phải là số nguyên tố.

Cho học sinh lớp 6 học cách nhận biết 1 số nguyên tố bằng phương pháp thứ nhất (nêu ở trên), là dựa vào định lý cơ bản:

Ước số nguyên tố nhỏ nhất của một hợp số A là một số không vượt quá $\sqrt{A}$.

Với quy tắc trên trong một khoản thời gian ngắn, với các dấu hiệu chia hết thì ta nhanh chóng trả lời được một số có hai chữ số nào đó là

Chứng minh. Giả sử chỉ có hữu hạn số nguyên tố là $p_1; p_2; p_3; ...; p_n$; trong đó p_n là số lớn nhất trong các nguyên tố.
Xét số $N = p_1 p_2 ... p_n + 1$ thì N chia cho mỗi số nguyên tố $p_i (i = \overline{1, n})$ đều dư 1 (*)
Mặt khác N là một hợp số (vì nó lớn hơn số nguyên tố lớn nhất là p_n) do đó N phải có một ước nguyên tố nào đó, tức là N chia hết cho một trong các số p_i (**).
Ta thấy (**) mâu thuẫn (*). Vậy không thể có hữu hạn số nguyên tố.■

ĐỊNH LÝ 2.2– *Mọi số tự nhiên lớn hơn 1 đều phân tích được ra thừa số nguyên tố một cách duy nhất (không kể thứ tự các thừa số).* □

Chứng minh. * Mọi số tự nhiên lớn hơn 1 đều phân tích được ra thừa số nguyên tố:
Thật vậy: giả sử điều khẳng định trên là đúng với mọi số m thoả mãn: $1 < m < n$ ta chứng minh điều đó đúng đến n.
Nếu n là nguyên tố, ta có điều phải chứng minh.
Nếu n là hợp số, theo định nghĩa hợp số, ta có: $n = a.b$ (với $a, b < n$)
Theo giả thiết quy nạp: a và b là tích các thừa số nhỏ hơn n nên n là tích cuả các thừa số nguyên tố.
* Sự phân tích là duy nhất:
Giả sử mọi số $m < n$ đều phân tích được ra thừa số nguyên tố một cách duy nhất, ta chứng minh điều đó đúng đến n:
Nếu n là số nguyên tố thì ta được điều phải chứng minh. Nếu n là hợp số: Giả sử có 2 cách phân tích n ra thừa số nguyên tố khác nhau:

$$n = p.q.r....$$
$$n = p'.q'.r'....$$

Trong đó $p, q, r.....$ và $p', q', r'....$ là các số nguyên tố và không có số nguyên tố nào cũng có mặt trong cả hai phân tích đó (vì nếu có số thoả mãn điều kiện như trên, ta có thể chia n cho số đó lúc đó thường sẽ nhỏ hơn n, thương này có hai cách phân tích ra thừa số nguyên tố khác nhau, trái với giả thiết của quy nạp).
Không mất tính tổng quát, ta có thể giả thiết p và p' lần lượt là các số nguyên tố nhỏ nhất trong phân tích thứ nhất và thứ hai.
Vì n là hợp số nên $n > p^2$ và $n > p'^2$. Do $p \neq p \Rightarrow n > p.p'$

BÀI 3. Từ các chữ số $1; 2; 3; 4; 5; 6$ thành lập tất cả số có sáu chữ số (mỗi số chỉ viết một lần). Tìm $UCLN$ của tất cả các số đó.

BÀI 4. Cho $A = 2n + 1; B = \dfrac{n(n+1)}{2} (n \in \mathbb{N}^*)$. Tìm $(A; B)$.

BÀI 5.
- *a.* Chứng minh rằng trong 5 số tự nguyên liên tiếp bao giờ cũng chọn được một số nguyên tố cùng nhau với các số còn lại.
- *b.* Chứng minh rằng trong 16 số nguyên liên tiếp bao giờ cũng chọn được một số nguyên tố cùng nhau với các số còn lại.

BÀI 6. Cho $1 \leq m \leq n (m; n \in \mathbb{N})$.
- *a.* Chứng minh rằng $(2^{2^n} - 1; 2^{2^n} + 1) = 1$.
- *b.* Tìm $(2^m - 1; 2^n - 1)$.

BÀI 7. Cho $m, n \in \mathbb{N}$ với $(m, n) = 1$. Tìm $(m^2 + n^2; m + n)$.

BÀI 8. Cho $A = 2^n + 3; B = 2^{n+1} + 3^{n+1} (n \in \mathbb{N}^*); C = 2^{n+2} + 3^{n+2} (n \in \mathbb{N}^*)$. Tìm $(A; B)$ và $(A; C)$.

BÀI 9. Cho sáu số nguyên dương $a; b; a'; b'; d; d'$ sao cho $(a; b) = d; (a'; b') = d'$. Chứng minh rằng $(aa'; bb'; ab'; a'b) = dd'$.

BÀI 10. Chứng minh rằng dãy số $B_n = \dfrac{1}{6} n(n+1)(n+2) (n \in \mathbb{N}^*)$ chứa vô hạn những số nguyên tố cùng nhau.

BÀI 11. Chứng minh rằng dãy số $2^n - 3$ với mọi $n \in N$ và $n \geq 2$ chứa dãy số vô hạn những số nguyên tố cùng nhau.

BÀI 12. Chứng minh dãy Mersen $M_n = 2^n - 1 (n \in \mathbb{N}^*)$ chứa dãy số vô hạn những số nguyên tố cùng nhau.

BÀI 13. Chứng minh rằng dãy Fermat $F_n = 2^{2^n} + 1 (n \in \mathbb{N})$ là dãy số nguyên tố cùng nhau.

BÀI 14. Cho $n \in \mathbb{N}; n > 1$ và $2^n - 2$ chia hết cho n. Tìm $(2^{2^n}; 2^n - 1)$.

Bài 15. Chứng minh rằng với mọi $n \in \mathbb{N}$, phân số $\dfrac{21n+1}{14n+3}$ tối giản.

Bài 16. Cho ba số tự nhiên $a; b; c$ đôi một nguyên tố cùng nhau. Chứng minh rằng $(ab+bc+ca; abc) = 1$.

Bài 17. Cho $a; b \in \mathbb{N}^*$. Chứng minh rằng tồn tại vô số $n \in \mathbb{N}$ sao cho $(a+n; b+n) = 1$.

Bài 18. Giả sử $m; n \in \mathbb{N}(m \geq n)$ thỏa mãn $(199k-1; m) = (1993-1; n)$. Chứng minh rằng tồn tại $t(t \in \mathbb{N})$ sao cho $m = 1993^t.n$.

Bài 19. Chứng minh rằng nếu $a; m \in \mathbb{N}; a > 1$ thì $\left(\dfrac{a^m-1}{a-1}; a-1\right) = (m; a-1)$.

Bài 20. Tìm số nguyên dương n nhỏ nhất để các phân số sau tối giản:

a. $\dfrac{1}{n^{1996}+1995n+2}$,

b. $\dfrac{2}{n^{1996}+1995n+3}$,

c. $\dfrac{1994}{n^{1996}+1995n+1995}$,

d. $\dfrac{1995}{n^{1996}+1995n+1996}$.

Bài 21. Cho 20 số tự nhiên khác 0 là $a_1; a_2; \dots a_n$ có tổng bằng S và $UCLN$ bằng d. Chứng minh rằng $UCLN$ của $S-a_1; S-a_2; \dots; S-a_n$ bằng tích của d với một ước nào đó của $n-1$.

Chương 2

Số Nguyên Tố

Nguyễn Trung Hiếu (nguyentrunghieua)
Phạm Quang Toàn (Phạm Quang Toàn)

2.1 Một số kiến thức cơ bản về số nguyên tố

2.1.1 Định nghĩa, định lý cơ bản

Định nghĩa 2.1 *Số nguyên tố là những số tự nhiên lớn hơn 1, chỉ có 2 ước số là 1 và chính nó.* △

Định nghĩa 2.2 *Hợp số là số tự nhiên lớn hơn 1 và có nhiều hơn 2 ước.* △

Nhận xét. Các số 0 và 1 không phải là số nguyên tố cũng không phải là hợp số. Bất kỳ số tự nhiên lớn hơn 1 nào cũng có ít nhất một ước số nguyên tố.

Định lý 2.1– *Dãy số nguyên tố là dãy số vô hạn.* □