Bài toán 2.1. *Cho trước số nguyên dương n tuỳ ý. Chứng minh rằng tồn tại n số tự nhiên liên tiếp mà mỗi số trong chúng đều là hợp số.* △

Vậy nhưng, các số nguyên tố cũng "có thể rất gần nhau". Cặp số $(2, 3)$ là cặp số tự nhiên liên tiếp duy nhất mà cả hai bên đều là số nguyên tố. Cặp số đ(p, q)ược gọi là cặp số "sinh đôi", nếu cả 2 đều là số nguyên tố và $q = p + 2$. Bộ 3 số (p, q, r) gọi là bộ số nguyên tố "sinh ba" nếu cả 3 số p,q,r đều là các số nguyên tố và $q = p + 2; r = q + 2$.

Bài toán 2.2. *Tìm tất cả các bộ số nguyên tố "sinh ba"?* △

Đây là một bài toán dễ, dùng phương pháp chứng minh duy nhất ta tìm ra bộ $(3, 5, 7)$ là bộ ba số nguyên tố sinh ba duy nhất, các bộ 3 số lẻ lớn hơn 3 luôn có 1 số là hợp số vì nó chia hết cho 3.
Từ bài toán 2.2 thì bài toán sau trở thành một giả thuyết lớn đang chờ câu trả lời.

Dự đoán 2.1– *Tồn tại vô hạn cặp số sinh đôi.* □

Số hoàn hảo (hoàn toàn) của những người Hy Lạp cổ đại

Người Hy Lạp cổ đại có quan niệm thần bí về các số. Họ rất thú vị phát hiện ra các số hoàn hảo, nghĩa là các số tự nhiên mà tổng các ước số tự nhiên thực sự của nó (các ước số nhỏ hơn số đó) bằng chính nó.

Chẳng hạn:

$$6 = 1 + 2 + 3 \qquad 28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14$$

Người Hy Lạp cổ đại đã biết tìm tất cả các số hoàn hảo chẵn nghĩa là họ đã làm được bài toán sau đây:

Bài toán 2.3. *Một số tự nhiên chẵn $n \neq 0$ là số hoàn hảo nếu và chỉ nếu: $n = 2^{m+1}(2^m - 1)$. Trong đó m là số tự nhiên khác 0 sao cho $2^m - 1$ là số nguyên tố.* △

Từ đó ta có giả thuyết

DỰ ĐOÁN 2.2– *Không tồn tại số hoàn hảo lẻ.* □

Ở bài toán 2.3 trên, số nguyên tố dạng $2^m - 1$ gọi là số nguyên tố Merseme. Các số nguyên tố Merseme có vai trò rất quan trọng. Cho đến nay người ta vẫn chưa biết có hữu hạn hay vô hạn số nguyên tố Merseme.

DỰ ĐOÁN 2.3– *Tồn tại vô hạn số nguyên tố Merseme.* □

Năm 1985 số nguyên tố lớn nhất mà người ta biết là số $2^{132049} - 1$ gồm 39751 chữ số ghi trong hệ thập phân. Gần đây 2 sinh viên Mỹ đã tìm ra một số nguyên tố lớn hơn nữa đó là số $2^{216091} - 1$ gồm 65050 chữ số.

Ta biết rằng với học sinh lớp 6 để thử xem số A có ít hơn 20 chữ số có là số nguyên tố không bằng cách thử xem A có chia hết cho số nào nhỏ hơn A hay không, thì để tìm hết các số nguyên tố với chiếc máy siêu điện toán cần hàng thế kỷ !!!

David SlowinSky đã soạn một phần mềm, làm việc trên máy siêu điện toán Gray-2 , sau 19 giờ ông đã tìm ra số nguyên tố $2^{756839} - 1$. Số này viết trong hệ thập phân sẽ có 227832 chữ số- viết hết số này cần 110 trang văn bản bình thường. Hoặc nếu viết hàng ngang những số trên phông chữ .VnTime Size 14 thì ta cần khoảng 570 m.

Lời Kết

Thông qua đề tài này, chúng ta có thể khẳng định rằng: Toán học có mặt trong mọi công việc, mọi lĩnh vực của cuộc sống quanh ta, nó không thể tách rời và lãng quên được, nên chúng ta phải hiểu biết và nắm bắt được nó một cách tự giác và hiệu quả.

Mục đích của đề tài này là trang bị những kiến thức cơ bản có đào sâu có nâng cao và rèn luyện tư duy toán học cho học sinh, tạo ra nền tảng tin cậy để các em có vốn kiến thức nhất định làm hành trang cho

Do k lẻ nên

$$\begin{aligned} x^{k.2^t} + y^{k.2^t} &= \left(x^{2^t}\right)^k + \left(y^{2^t}\right)^k \vdots \left(x^{2^t} + y^{2^t}\right) \\ \Rightarrow \left(x^{k.2^t} + y^{k.2^t}\right) &\equiv 0 \pmod p \qquad (ii) \end{aligned}$$

Từ (i) và (ii) suy ra điều mâu thuẫn. Vậy giả thiết phản chứng sai. Do đó x, y đồng thời chia hết cho p. ■

Bài tập đề nghị

BÀI 1. Chứng minh $n^2 + n + 2$ không chia hết cho 15 với mọi $n \in \mathbb{Z}$.

BÀI 2. Chứng minh $n^2 + 3n + 5$ không chia hết cho 121 với mọi $n \in \mathbb{N}$.

BÀI 3. Chứng minh $9n^3 + 9n^2 + 3n - 16$ không chia hết cho 343 với mọi $n \in \mathbb{N}$.

BÀI 4. Chứng minh $4n^3 - 6n^2 + 3n + 37$ không chia hết cho 125 với mọi $n \in \mathbb{N}$.

BÀI 5. Chứng minh $n^3 + 3n - 38$ không chia hết cho 49 với mọi $n \in \mathbb{N}$.

3.2.7 Phản chứng

Cơ sở: Để chứng minh $p \nmid A(n)$, ta làm như sau:

- Giả sử ngược lại $p \mid A(n)$.
- Chứng minh điều ngược lại sai.

Ví dụ 3.28. *Chứng minh rằng với mọi số nguyên n thì n^2+n+1 không chia hết cho 9.* △

Lời giải. Giả sử $9 \mid (n^2+n+1)$. Khi đó $n^2+n+1 = (n+2)(n-1)+3$ chia hết cho 3. Suy ra $3 \mid n+2$ và $3 \mid n-1$. Như vậy $(n+2)(n-1)$ chia hết cho 9, tức n^2+n+1 chia 9 dư 3, mâu thuẫn. Ta có đpcm. ■

Nhận xét. Bài toán này vẫn có thể giải theo phương pháp xét số dư.

Ví dụ 3.29. *Giả sử $p = k.2^t + 1$ là số nguyên tố lẻ, t là số nguyên dương và k là số tự nhiên lẻ. Giả thiết x và y là các số tự nhiên mà $p \mid \left(x^{2^t} + y^{2^t}\right)$. Chứng minh rằng khi đó x và y đồng thời chia hết cho p.* △

Lời giải. Giả sử trái lại $p \nmid x$, suy ra $p \nmid y$.
Do p là số nguyên tố nên theo định lý Fermat nhỏ ta có

$$\begin{cases} x^{p-1} \equiv 1 \pmod p \\ y^{p-1} \equiv 1 \pmod p \end{cases}$$

Theo giả thiết thì $p-1 = k.2^t$, do đó

$$\begin{cases} x^{k.2^t} \equiv 1 \pmod p \\ y^{k.2^t} \equiv 1 \pmod p \end{cases}$$

Từ đó ta có

$$x^{k.2^t} + y^{k.2^t} \equiv 2 \pmod p. \qquad (i)$$

Theo giả thiết thì

$$x^{2^t} + y^{2^t} \equiv 0 \pmod p.$$

những năm học tiếp theo.

Với điều kiện có nhiều hạn chế về thời gian, về năng lực trình độ nên trong khuôn khổ đề tài này phân chia dạng toán, loại toán chỉ có tính tương đối. Đồng thời cũng mới chỉ đưa ra lời giải chứ chưa có phương pháp, thuật làm rõ ràng. Tuy đã có cố gắng nhiều nhưng chnsg tôi tự thấy trong đề tài này còn nhiều hạn chế. Chúng tôi rất mong nhận được những ý kiến đóng góp của các thầy cô giáo cùng bạn đọc để toán học thật sự có ý nghĩa cao đẹp như câu ngạn ngữ Pháp đã viết:

"Toán học là Vua của các khoa học"
"Số học là Nữ hoàng"

Nhận xét. Ta có thể rút ra bài toán tổng quát và bài toán mở rộng sau:

Bài toán 3.5 (Bài toán tổng quát). *Cho n số $a_1, a_2, \cdots, a_n$. Chứng minh rằng trong n số trên tồn tại một số chia hết cho n hoặc tổng một số số chia hết cho n.* △

Bài toán 3.6 (Bài toán mở rộng). *(Tạp chí Toán Tuổi Thơ số 115) Cho n là một số chuyên dương và n số nguyên dương $a_1, a_2, \cdots, a_n$ có tổng bằng $2n-1$. Chứng minh rằng tồn tại một số số trong n số đã cho có tổng bằng n.* △

Bài tập đề nghị

BÀI 1. Chứng minh rằng có vô số số chia hết cho $2013^{11^{356}}$ mà trong biểu diễn thập phân của các số đó không có các chữ số $0, 1, 2, 3$.

BÀI 2. *(HSG 9 Hà Nội, 2006)* Chứng minh rằng tồn tại số tự nhiên $n \neq 0$ thỏa mãn $3^{13579} \mid (13579^n - 1)$.

BÀI 3. Chứng minh rằng trong 52 số nguyên dương bất kì luôn luôn tìm được hai số có tổng hoặc hiệu chia hết cho 100.

BÀI 4. Cho 10 số nguyên dương $a_1, a_2, \cdots, a_{10}$. Chứng minh rằng tồn tại các số $c_i \in \{0, -1, 1\}$, $(i = 1, \cdots 10)$ không đồng thời bằng 0 sao cho

$$A = c_1a_1 + c_2a_2 + \cdots + c_{10}a_{10}$$

chia hết cho 1032.

BÀI 5. Chứng minh rằng tồn tại số tự nhiên k sao cho $2002^k - 1$ chia hết cho 2003^{10}.

BÀI 6. Biết rằng ba số $a, a+k, a+2k$ đều là các số nguyên tố lớn hơn 3. Chứng minh rằng khi đó k chia hết cho 6.

- Nếu có 3 số có cùng tính chẵn lẻ. Không mất tính tổng quát, giả sử ba số đó là a_1, a_2, a_3. Khi đó a_4, a_5 cũng cùng tính chẵn lẻ nhưng lại khác tính chẵn lẻ của a_1, a_2, a_3. Khi đó các hiệu sau chia hết cho 2: $a_1 - a_2, a_1 - a_3, a_2 - a_3, a_4 - a_5$. Mặt khác, trong 5 số đã cho có ít nhất hai hiệu chia hết cho 4, cho nên trong 4 hiệu $a_1 - a_2, a_1 - a_3, a_2 - a_3, a_4 - a_5$ có ít nhất một hiệu chia hết cho 4. Vậy $32 \mid P$.

Ta có đpcm. ■

Ví dụ 3.27. *Cho 2012 số tự nhiên bất kì $a_1, a_2, \cdots, a_{2012}$. Chứng minh rằng tồn tại một số chia hết cho 2012 hoặc tổng một số số chia hết cho 2012.* △

Lời giải. Xét 2012 số

$$\begin{aligned} S_1 &= a_2 \\ S_2 &= a_1 + a_2 \\ &\cdots \\ S_{2012} &= a_1 + a_2 + \cdots + a_{2012} \end{aligned}$$

Trường hợp 1: Nếu tồn tại số S_i $(i = 1, 2, \cdots, 2012)$ chia hết cho 2012 thì bài toán chứng minh xong.

Trường hợp 2: Nếu $2012 \nmid S_i$ với mọi $i = 1, 2, \cdots, 2012$. Đem 2012 số này chia cho 2012 nhận được 2012 số dư. Các số dư nhận giá trị thuộc tập $\{1; 2; \cdots; 2011\}$. Vì có 2012 số dư mà chỉ có 2011 giá trị nên theo nguyên lí Dirichlet chắc chắn có hai số dư bằng nhau. Gỉa sử gọi hai số đó là S_m và S_n có cùng số dư khi chia cho 2012 $(m, n \in \mathbb{N},\ 1 \le n < m \le 2012)$ thì hiệu

$$S_m - S_n = a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_m$$

chia hết cho 2012. ■

Chương

3 Bài toán chia hết

Phạm Quang Toàn (Phạm Quang Toàn)

Chia hết là một đề tài quan trọng trong chương trình Số học của bậc THCS. Đi kèm theo đó là các bài toán khó và hay. Bài viết này xin giới thiệu với bạn đọc những phương pháp giải các bài toán chia hết: phương pháp xét số dư, phương pháp quy nạp, phương pháp đồng dư, v.v...

3.1 Lý thuyết cơ bản

3.1.1 Định nghĩa về chia hết

Định nghĩa 3.1 *Cho hai số nguyên a và b trong đó $b \neq 0$, ta luôn tìm được hai số nguyên q và r duy nhất sao cho*

$$a = bq + r$$

với $0 \le r < b$.
Trong đó, ta nói a là số bị chia, b là số chia, q là thương, r là số dư. △

Như vậy, khi a chia cho b thì có thể đưa ra các số dư $r \in \{0; 1; 2; \cdots; |b|\}$.

Đặc biệt, với $r = 0$ thì $a = bq$, khi đó ta nói a chia hết cho b (hoặc a là bội của b, hoặc b là ước của a). Ta kí hiệu $b \mid a$. Còn khi a không chia hết cho b, ta kí hiệu $b \nmid a$.

Sau đây là một số tính chất thường dùng, chứng minh được suy ra trực tiếp từ định nghĩa.

3.1.2 Tính chất

Sau đây xin giới thiệu một số tính chất về chia hết, việc chứng minh khá là dễ dàng nên sẽ dành cho bạn đọc. Ta có với a, b, c, d là các số nguyên thì:

TÍNH CHẤT 3.1– *Nếu $a \neq 0$ thì $a \mid a$, $0 \mid a$.* □

TÍNH CHẤT 3.2– *Nếu $b \mid a$ thì $b \mid ac$.* □

TÍNH CHẤT 3.3– *Nếu $b \mid a$ và $c \mid b$ thì $c \mid a$.* □

TÍNH CHẤT 3.4– *Nếu $c \mid a$ và $c \mid b$ thì $c \mid (ax \pm by)$ với x, y nguyên.*

TÍNH CHẤT 3.5– *Nếu $b \mid a$ và $a \mid b$ thì $a = b$ hoặc $a = -b$.*

TÍNH CHẤT 3.6– *Nếu $c \mid a$ và $d \mid b$ thì $cd \mid ab$.*

TÍNH CHẤT 3.7– *Nếu $b \mid a, c \mid a$ thì BCNN$(b; c) \mid a$.*

TÍNH CHẤT 3.8– *Nếu $c \mid ab$ và UCLN$(b, c) = 1$ thì $c \mid a$.*

TÍNH CHẤT 3.9– *Nếu $p \mid ab$, p là số nguyên tố thì $p \mid a$ hoặc $p \mid b$.* □

Từ tính chất trên ta suy ra hệ quả

HỆ QUẢ 3.1– *Nếu $p \mid a^n$ với p là số nguyên tố, n nguyên dương thì $p^n \mid a^n$.* □

$$\Longrightarrow 2012 \mid \underbrace{20112011\cdots2011}_{m-n \text{ số } 2011}\underbrace{00\cdots00}_{n \text{ số } 2011}$$

Vậy tồn tại số thỏa mãn đề bài. ■

Ví dụ 3.25. *Chứng minh rằng trong 101 số nguyên bất kì có thể tìm được hai số có 2 chữ số tận cùng giống nhau.* △

Lời giải. Lấy 101 số nguyên đã cho chia cho 100 thì theo nguyên lí Dirichlet tồn tại hai số có cùng số dư khi chia cho 100. Suy ra trong 101 số nguyên đã cho tồn tại hai số có chữ số tận cùng giống nhau. ■

Ví dụ 3.26 (Tuyển sinh 10 chuyên ĐHSPHN, 1993). *Cho 5 số nguyên phân biệt tùy ý a_1, a_2, a_3, a_4, a_5. Chứng minh rằng tích*

$$P = (a_1 - a_2)(a_1 - a_3)(a_1 - a_4)(a_1 - a_5)(a_2 - a_3)\times \\ \times (a_2 - a_4)(a_2 - a_5)(a_3 - a_4)(a_3 - a_5)(a_4 - a_5)$$

chia hết cho 288. △

Lời giải. Phân tích $288 = 2^5 \cdot 3^2$.

1. Chứng minh $9 \mid P$: Theo nguyên lí Dirichlet thì trong 4 số a_1, a_2, a_3 có hai số có hiệu chia hết cho 3. Không mất tính tổng quát, giả sử: $3 \mid a_1 - a_2$. Xét 4 số a_2, a_3, a_4, a_5 cũng có hai số có hiệu chia hết cho 3. Như vậy P có ít nhất hai hiệu khác nhau chia hết cho 3, tức $9 \mid p$.

2. Chứng minh $32 \mid P$: Theo nguyên lí Dirichlet thì tổng 5 số đã cho tồn tại ít nhất 3 số có cùng tính chẵn lẻ. Chỉ có thể có hai khả năng sau xảy ra:

   - Nếu có ít nhất 4 số có cùng tính chẵn lẻ, thì từ bốn số có thể lập thành sáu hiệu khác nhau chia hết cho 2. Do đó $32 \mid P$.

3.2.6 Sử dụng nguyên lí Dirichlet

Nội dung: Nhốt 5 con thỏ vào 3 chuồng thì tồn tại chuồng chứa ít nhất 2 con.

ĐỊNH LÝ 3.3– *Nhốt $m = nk + 1$ con thỏ vào k chuồng $(k < n)$ thì tồn tại chuồng chứa ít nhất $n + 1$ con thỏ.* □

Chứng minh. Giả sử không có chuồng nào chứa ít nhất $n+1$ con thỏ, khi đó mỗi chuồng chứa nhiều nhất n con thỏ, nên k chuồng chứa nhiều nhất kn con thỏ, mâu thuẫn với số thỏ là $nk + 1$. ■

ĐỊNH LÝ 3.4 (ÁP DỤNG VÀO SỐ HỌC)– *Trong $m = nk + 1$ số có ít nhất $n + 1$ số chia cho k có cùng số dư.* □

Tuy nguyên lý được phát biểu khá đơn giản nhưng lại có những ứng dụng hết sức bất ngờ, thú vị. Bài viết này chỉ xin nêu một số ứng dụng của nguyên lí trong việc giải các bài toán về chia hết.

Ví dụ 3.24. *Chứng minh rằng luôn tồn tại số có dạng*

$$20112011\cdots 201100\cdots 0$$

chia hết cho 2012. △

Lời giải. Lấy 2013 số có dạng

$$2011;\ 20112011,\ \cdots,\ \underbrace{20112011\cdots 2011}_{2012 \text{ số } 2011}.$$

Lấy 2013 số này chia cho 2012. Theo nguyên lí Dirichlet thì tồn tại hai số có cùng số dư khi chia cho 2012.

Giả sử hai số đó là $\underbrace{20112011\cdots 2011}_{m \text{ số } 2011}$ và $\underbrace{20112011\cdots 2011}_{n \text{ số } 2011}$ $(m > n > 0)$.

$$\Longrightarrow 2012 \mid \underbrace{20112011\cdots 2011}_{m \text{ số } 2011} - \underbrace{20112011\cdots 2011}_{n \text{ số } 2011}$$

3.1.3 Một số dấu hiệu chia hết

Ta đặt $N = \overline{a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0}$

Dấu hiệu chia hết cho $2; 5; 4; 25; 8; 125$

$$\begin{aligned} 2 \mid N &\Leftrightarrow 2 \mid a_0 \Leftrightarrow a_0 \in \{0;2;4;6;8\} \\ 5 \mid N &\Leftrightarrow 5 \mid a_0 \Leftrightarrow a_0 \in \{0;5\} \\ 4;25 \mid N &\Leftrightarrow 4;25 \mid \overline{a_1a_0} \\ 8;125 \mid N &\Leftrightarrow 8;125 \mid \overline{a_2a_1a_0} \end{aligned}$$

Dấu hiệu chia hết cho 3 *và* 9

$$3;9 \mid N \Leftrightarrow 3;9 \mid (a_0 + a_1 + \cdots + a_{n-1} + a_n)$$

Một số dấu hiệu chia hết khác

$$\begin{aligned} 11 \mid N &\Leftrightarrow 11 \mid [(a_0 + a_2 + \cdots) - (a_1 + a_3 + \cdots)] \\ 101 \mid N &\Leftrightarrow 101 \mid [(\overline{a_1a_0} + \overline{a_5a_4} + \cdots) - (\overline{a_3a_2} + \overline{a_7a_6} + \cdots)] \\ 7;13 \mid N &\Leftrightarrow 7;37 \mid [(\overline{a_2a_1a_0} + \overline{a_8a_7a_6} + \cdots) - (\overline{a_5a_4a_3} + \overline{a_{11}a_{10}a_9} + \cdots)] \\ 37 \mid N &\Leftrightarrow 37 \mid (\overline{a_2a_1a_0} + \overline{a_5a_4a_3} + \cdots + \overline{a_na_{n-1}a_{n-2}}) \\ 19 \mid N &\Leftrightarrow 19 \mid \left(a_n + 2a_{n-1} + 2^2a_{n-2} + \cdots + 2^n a_0\right) \end{aligned}$$

3.2 Phương pháp giải các bài toán chia hết

3.2.1 Áp dụng định lý Fermat nhỏ và các tính chất của chia hết

Định lý Fermat nhỏ

ĐỊNH LÝ 3.1 (ĐỊNH LÝ FERMAT NHỎ)– *Với mọi số nguyên a và số nguyên tố p thì $a^p \equiv p \pmod p$.* □

Chứng minh.

1. Nếu $p \mid a$ thì $p \mid (a^5 - a)$.
2. Nếu $p \nmid a$ thì $2a, 3a, 4a, \cdots, (p-1)a$ cũng không chia hết cho p. Gọi $r_1, r_2, \cdots, r_{p-1}$ lần lượt là số dư khi chia $a, 2a, 3a, \cdots, (p-1)a$ cho p. thì chúng sẽ thuộc tập $\{1; 2; 3; \cdots; p-1\}$ và đôi một khác nhau (vì chẳng hạn nếu $r_1 = r_3$ thì $p \mid (3a - a)$ hay $p \mid 2a$,

chỉ có thể là $p = 2$, mà $p = 2$ thì bài toán không đúng). Do đó $r_1 r_2 \cdot r_{p-1} = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (p-1)$. Ta có

$$\begin{aligned} a &\equiv r_1 \pmod{p} \\ 2a &\equiv r_2 \pmod{p} \\ &\cdots \\ (p-1)a &\equiv r_{p-1} \pmod{p} \end{aligned}$$

Nhân vế theo vế ta suy ra

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (p-1) \cdot a^{p-1} \equiv r_1 r_2 \cdots r_{p-1} \pmod{p} \Rightarrow a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$$

Vì $UCLN(a, p) = 1$ nên $a^p \equiv a \pmod{p}$.
Như vậy với mọi số nguyên a và số nguyên tố p thì $a^p \equiv a \pmod{p}$. ■

Nhận xét. Ta có thể chứng minh định lý bằng quy nạp. Ngoài ra, định lý còn được phát biểu dưới dạng sau:

Định lý 3.2– *Với mọi số nguyên a, p là số nguyên tố, $UCLN(a, p) = 1$ thì $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$.* □

Phương pháp sử dụng tính chất chia hết và áp dụng định lý Fermat nhỏ

Cơ sở: Sử dụng các tính chất chia hết và định lý Fermat nhỏ để giải toán.

Ví dụ 3.1. *Cho a và b là hai số tự nhiên. Chứng minh rằng $5a^2 + 15ab - b^2$ chia hết cho 49 khi và chỉ khi $3a + b$ chia hết cho 7.* △

Lời giải. $\Rightarrow$) Giả sử $49 \mid 5a^2 + 15ab - b^2 \Rightarrow 7 \mid 5a^2 + 15ab - b^2 \Rightarrow 7 \mid (14a^2 + 21ab) - (5a^2 + 15ab - b^2) \Rightarrow 7 \mid (9a^2 + 6ab + b^2) \Rightarrow 7 \mid (3a + b)^2 \Rightarrow 7 \mid 3a + b$.

$\Leftarrow$) Giả sử $7 \mid 3a + b$. Đặt $3a + b = 7c$ ($c \in \mathbb{Z}$. Khi đó $b = 7c - 3a$. Như vậy

$$\begin{aligned} \Rightarrow 5a^2 + 15ab - b^2 &= 5a^2 + 15a(7c - 3a) - (7c - 3a)^2 \\ &= 49(c^2 + 3ac - a^2) \end{aligned}$$

Bài tập đề nghị

Bài 1. Một số bài toán ở các phương pháp nêu trên có thể giải bằng phương pháp quy nạp.

Bài 2. Chứng minh rằng $255 \mid 16^n - 15n - 1$ với $n \in \mathbb{N}$.

Bài 3. Chứng minh rằng $64 \mid 3^{2n+3} + 40n - 27$ với $n \in \mathbb{N}$.

Bài 4. Chứng minh rằng $16 \mid 3^{2n+2} + 8n - 9$ với $n \in \mathbb{N}$.

Bài 5. Chứng minh rằng $676 \mid 3^{3n+3} - 16n - 27$ với $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$.

Bài 6. Chứng minh rằng $700 \mid 29^{2n} - 140n - 1$ với $n \in \mathbb{N}$.

Bài 7. Chứng minh rằng $270 \mid 2002^n - 138n - 1$ với $n \in \mathbb{N}$.

Bài 8. Chứng minh rằng $22 \mid 3^{2^{4n+1}} + 2^{3^{4n+1}} + 5$ với $n \in \mathbb{N}$.

Bài 9. Chứng minh rằng số $2^{3^n} + 1$ chia hết cho 3^n nhưng không chia hết cho 3^{n+1} với $n \in \mathbb{N}$.

Bài 10. Chứng minh rằng số $2001^{2^n} - 1$ chia hết cho 2^{n+4} nhưng không chia hết cho 2^{n+5} với $n \in \mathbb{N}$.

Bài 11. Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên $n \geq 2$, tồn tại một số tự nhiên m sao cho $3^n \mid (m^3 + 17)$, nhưng $3^{n+1} \nmid (m^3 + 17)$.

Bài 12. Có tồn tại hay không một số nguyên dương là bội của 2007 và có bốn chữ số tận cùng là 2008.

Bài 13. Chứng minh rằng tồn tại một số có 2011 chữ số gồm toàn chữ số 1 và 2 sao cho số đó chia hết cho 2^{2011}.

Bài 14. Tìm phần dư khi chia 3^{2^n} cho 2^{n+3}, trong đó n là số nguyên dương.

Bài 15. Cho $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Đặt $A = 7^{7^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}$ (lũy thừa n lần). Chứng minh rằng $A_n + 17$ chia hết cho 20.

Ví dụ 3.22. *(HSG 9 TQ 1978)Chứng minh rằng số được tạo bởi 3^n chữ số giống nhau thì chia hết cho 3^n với $1 \le n,\ n \in \mathbb{N}$.* △

Lời giải. Với $n = 1$, bài toán hiển nhiên đúng.
Giả sử bài toán đúng với $n = k$, tức $3^k \mid \underbrace{\overline{aa\cdots a}}_{3^n \text{ số } a}$.

Với $n = k+1$ ta có:

$$\begin{aligned}\underbrace{\overline{aa\cdots a}}_{3^{k+1}} &= \underbrace{\overline{aa\cdots a}}_{3^k}\underbrace{\overline{aa\cdots a}}_{3^k}\underbrace{\overline{aa\cdots a}}_{3^k}\\ &= \underbrace{\overline{aa\cdots a}}_{3^k} \times 1\underbrace{00\cdots 0}_{3^k-1}\underbrace{00\cdots 0}_{3^k-1}1\end{aligned}$$

chia hết cho 3^{k+1}. Ta có đpcm. ■

Ví dụ 3.23. *Chứng minh rằng với mọi $n \in \mathbb{N}^*, k$ là số tự nhiên lẻ thì*

$$2^{n+2} \mid k^{2^n} - 1$$

Lời giải. Với $n = 1$ thì $k^{2^n} - 1 = k^2 - 1 = (k+1)(k-1)$. Do k lẻ,nên đặt $k = 2m+1$ với $m \in \mathbb{N}^*$, thì khi đó $(k+1)(k-1) = 4k(k+1)$ chia hết cho $2^3 = 8$.
Giả sử bài toán đúng với $n = p$, tức $2^{p+2} \mid k^{2^p} - 1$ hay $k^{2^p} = q \cdot 2^{p+2} + 1$ với $q \in \mathbb{N}^*$.
Ta chứng minh bài toán đúng với $n = p+1$. Thật vậy

$$\begin{aligned}A = k^{2^{p+1}} - 1 = k^{2\cdot 2^p} - 1 &= \left(k^{2^p}\right)^2 - 1\\ &= \left(k^{2^p} - 1\right)\left(k^{2^p} + 1\right)\\ &= q \cdot 2^{p+2} \cdot \left(2 + q \cdot 2^{p+2}\right)\\ &= q \cdot 2^{p+3} \cdot \left(1 + q \cdot 2^{p+1}\right)\end{aligned}$$

chia hết cho 2^{p+3}. Ta có đpcm. ■

chia hết cho 49.
Vậy $5a^2 + 15ab - b^2$ chia hết cho 49 khi và chỉ khi $3a + b$ chia hết cho 7. ■

Ví dụ 3.2. *Cho $11 \mid (16a + 17b)(17a + 16b)$ với a, b là hai số nguyên. Chứng minh rằng $121 \mid (16a + 17b)(17a + 16b)$.* △

Lời giải. Ta có theo đầu bài, vì 11 nguyên tố nên ít nhất một trong hai số $16a + 17b$ và $17a + 16b$ chia hết cho 11. Ta lại có $(16a + 17b) + (17a + 16b) = 33(a + b)$ chia hết cho 11. Do đó nếu một trong hai số $16a + 17b$ và $17a + 16b$ chia hết cho 11 thì số còn lại cũng chia hết cho 11. Cho nên $121 \mid (16a + 17b)(17a + 16b)$. ■

Ví dụ 3.3. *Chứng minh rằng $A = 1^{30} + 2^{30} + \cdot + 11^{30}$ không chia hết cho 11.* △

Lời giải. Với mọi $a = 1, 2, \cdots, 10$ thì $(a, 10) = 1$. Do đó theo định lý Fermat bé thì $a^{10} \equiv 1 \pmod{11} \Rightarrow a^{30} \equiv 1 \pmod{11}$ với mọi $a = 1, 2, \cdots, 10$ và $11^{30} \equiv 0 \pmod{11}$. Như vậy

$$\begin{aligned}A &\equiv \underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_{10 \text{ số } 1} + 0 \pmod{11}\\ &\equiv 10 \pmod{11} \Rightarrow 11 \nmid A\end{aligned}$$

Ví dụ 3.4. *Cho p và q là hai số nguyên tố phân biệt. Chứng minh rằng $p^{q-1} + q^{p-1} - 1$ chia hết cho pq.* △

Lời giải. Vì q nguyên tố nên theo định lý Fermat nhỏ thì

$$p^{q-1} \equiv 1 \pmod{q}$$

Do đó

$$p^{q-1} + q^{p-1} \equiv 1 \pmod{q}$$

Vì q và p có vai trò bình đẳng nên ta cũng dễ dàng suy ra

$$q^{p-1} + p^{q-1} \equiv 1 \pmod{p}.$$

Cuối cùng vì $UCLN(q, p) = 1$ nên $p^{q-1} + q^{p-1} \equiv 1 \pmod{pq}$ hay $p^{q-1} + q^{p-1} - 1$ chia hết cho pq. ■

Bài tập đề nghị

BÀI 1. Chứng minh rằng $11a+2b$ chia hết cho 19 khi và chỉ khi $18a+5b$ chia hết cho 19 với a, b là các số nguyên.

BÀI 2. Chứng minh rằng $2a+7$ chia hết cho 7 khi và chỉ khi $3a^2+10ab-8b^2$.

BÀI 3. Cho p là số nguyên tố lớn hơn 5. Chứng minh rằng nếu n là số tự nhiên có $p-1$ chữ số và các chữ số đó đều bằng 1 thì n chia hết cho p.

BÀI 4. Giả sử $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$. Xét các số tự nhiên $a_n = \overline{11\cdots 1}$ được viết bởi n chữ số 1. Chứng minh rằng nếu a_n là một số nguyên tố thì n là ước của $a_n - 1$.

BÀI 5. Giả sử a và b là các số nguyên dương sao cho $2a-1, 2b-1$ và $a+b$ đều là số nguyên tố. Chứng minh rằng a^b+b^a và a^a+b^b đều không chia hết cho $a+b$.

BÀI 6. Chứng minh rằng với mọi số nguyên tố p thì tồn tại số nguyên n sao cho $2^n+3^n+6^n-1$ chia hết cho p.

3.2.2 Xét số dư

Cơ sở: Để chứng minh $A(n)$ chia hết cho p, ta xét các số n dạng $n = kp + r$ với $r \in \{0; 1; 2; \cdots; p-1\}$.
Chẳng hạn, với $p = 5$ thì số nguyên n có thể viết lại thành $5k; 5k+1; 5k+2; 5k+3; 5k+4$. Ta thế mỗi dạng này vào các vị trí của n rồi lý luận ra đáp số. Sau đây là một số ví dụ

Ví dụ 3.5. *Tìm $k \in \mathbb{N}$ để tồn tại $n \in \mathbb{N}$ sao cho*

$$4 \mid n^2 - k$$

với $k \in \{0; 1; 2; 3\}$. △

Lời giải. Giả sử tồn tại $k \in \mathbb{N}$ để tồn tại $n \in \mathbb{N}$ thỏa mãn $4 \mid n^2 - k$.
Ta xét các Trường hợp: $(m \in \mathbb{N}^*)$

BÀI 6. Chứng minh rằng 9^n+1 không chia hết cho 100, $\forall n \in \mathbb{N}$.

BÀI 7. Chứng minh rằng với mọi số nguyên không âm n thì $2^{5n+3} + 5^n \cdot 3^{n+1}$ chia hết cho 17.

BÀI 8. Tìm $n \in \mathbb{N}$ sao cho $2n^3 + 3n = 19851986$.

BÀI 9. Viết liên tiếp 2000 số 1999 ta được số $X = 19991999\cdots 1999$. Tìm số dư trong phép chia X cho 10001.

BÀI 10. Chứng minh rằng $100 \mid 7^{7^{7^{7}}} - 7^{7^{7}}$.

BÀI 11. Cho $b^2 - 4ac$ và $b^2 + 4ac$ là hai số chính phương với $a, b, c \in \mathbb{N}$. Chứng minh rằng $30 \mid abc$.

3.2.5 Quy nạp

Cơ sở : Để chứng minh mệnh đề đúng với mọi số tự nhiên $n \geq p$, ta làm như sau:

- Kiểm tra mệnh đề đúng với $n = p$.
- Giả sử mệnh đề đúng với $n = k$. Ta đi chứng minh mệnh đề cũng đúng với $n = k+1$.

Ví dụ 3.21. *Chứng minh rằng $A = 4^n + 15 - 1$ chia hết cho 9 với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.* △

Lời giải. Với $n = 1 \implies A = 18$ chia hết cho 9.
Giả sử bài toán đúng với $n = k$. Khi đó $9 \mid 4^k + 15^k - 1$, hay $4^k + 15^k - 1 = 9q$ với $q \in \mathbb{N}^*$. Suy ra $4^k = 9q - 15k + 1$.
Ta đi chứng minh bài toán đúng với $n = k+1$, tức $9 \mid 4^{k+1} + 15(k+1) - 1$. Thật vậy:

$$\begin{aligned} 4^{k+1} + 15(k+1) - 1 &= 4 \cdot 4^k + 15k + 14 \\ &= 4\,(9q - 15k + 1) + 15k + 14 \\ &= 36q - 45k + 18 \end{aligned}$$

chia hết cho 9. Ta có đpcm. ■

Lời giải. Ta thấy A chẵn nên $2 \mid A$. Mặt khác

$$A = 111 \cdot 1000^{777} + 112 \cdot 1000^{776} + \cdots + 888.$$

Do $1000^k \equiv 1 \pmod{999}, \quad \forall k \in \mathbb{N}$ nên

$$A \equiv 111 + 112 + \cdots + 888 \equiv 0 \pmod{999}.$$

Suy ra $999 \mid A$, và $(999, 2) = 1$ nên $1998 \mid A$. ■

Ví dụ 3.20. *Chứng minh rằng* $7 \mid 5555^{2222} + 2222^{5555}$. △

Lời giải. Ta có

$$\begin{aligned} &2222 \equiv -4 \pmod 7 \implies 2222^{5555} \equiv (-4)^{5555} \pmod 7 \\ &5555 \equiv 4 \pmod 7 \implies 5555^{2222} \equiv 4 \pmod 7 \end{aligned}$$

$$\implies 5555^{2222} + 2222^{5555} \equiv -4^{5555} + 4^{2222} \pmod 7$$

Lại có

$$\begin{aligned} -4^{5555} + 4^{2222} &= -4^{2222}\left(4^{3333} - 1\right) \\ &= -4^{2222}\left(64^{1111} - 1\right) \end{aligned}$$

Và $64 \equiv 1 \pmod 7 \implies 64^{1111} - 1 \equiv 0 \pmod 7$.
Do đó $7 \mid 5555^{2222} + 2222^{5555}$ ■

Bài tập đề nghị

BÀI 1. Một số bài tập ở phương pháp phân tích có thể giải bằng phương pháp đồng dư thức.

BÀI 2. Chứng minh rằng $333^{555^{777}} + 777^{555^{333}}$ chia hết cho 10.

BÀI 3. Chứng minh rằng số $11^{10^{1967}} - 1$ chia hết cho 10^{1968}.

BÀI 4. Cho $9 \mid a^3 + b^3 + c^3, \quad \forall a, b, c \in \mathbb{Z}$. Chứng minh rằng $3 \mid a \cdot b \cdot c$.

BÀI 5. Chứng minh rằng $222^{333} + 333^{222}$ chia hết cho 13.

1. Nếu $n = 4m$ thì $n^2 - k = 16m^2 - k$ chia hết cho 4 khi và chỉ khi $4 \mid k$ nên $k = 0$.

2. Nếu $n = 4m \pm 1$ thì $n^2 - k = 16m^2 \pm 8m + 1 - k$ chia hết cho 4 khi và chỉ khi $4 \mid 1 - k$ nên $k = 1$.

3. Nếu $n = 4m \pm 2$ thì $n^2 - k = 16m^2 \pm 16m + 4 - k$ chia hết cho 4 khi và chỉ khi $4 \mid k$ nên $k = 0$.

Vậy $k = 0$ hoặc $k = 1$. ■

Ví dụ 3.6. *Chứng minh rằng với mọi* $n \in \mathbb{N}$ *thì* $6 \mid n(2n+7)(7n+1)$. △

Lời giải. Ta thấy một trong hai số n và $7n + 1$ là số chẵn $\forall n \in \mathbb{N}$. Do đó $2 \mid n(2n+7)(7n+1)$. Ta sẽ chứng minh $3 \mid n(2n+7)(7n+1)$. Thật vậy, xét

1. Với $n = 3k$ thì $3 \mid n(2n+7)(7n+1)$.

2. Với $n = 3k + 1$ thì $2n + 7 = 6k + 9$ chia hết cho 3 nên $3 \mid n(2n+7)(7n+1)$.

3. Với $n = 3k + 2$ thì $7n + 1 = 21k + 15$ chia hết cho 3 nên $3 \mid n(2n+7)(7n+1)$.

Do đó $3 \mid n(2n+7)(7n+1)$ mà $(2, 3) = 1$ nên $6 \mid n(2n+7)(7n+1)$ $\forall n \in \mathbb{N}$. ■

Ví dụ 3.7. *(HSG 9, Tp Hồ Chí Minh, vòng 2, 1995) Cho* x, y, z *là các số nguyên thỏa mãn*

$$(x - y)(y - z)(z - x) = x + y + z \tag{3.1}$$

Chứng minh rằng $27 \mid (x + y + z)$. △

Lời giải. Xét hai trường hợp sau

1. Nếu ba số x, y, z chia hết cho 3 có các số dư khác nhau thì các hiệu $x-y, y-z, z-x$ cũng không chia hết cho 3. Mà $3 \mid (x+y+z)$ nên từ (3.1) suy ra vô lí .
2. Nếu ba số x, y, z chỉ có hai số chia cho 3 có cùng số dư thì trong ba hiệu $x-y, y-z, z-x$ có một hiệu chia hết cho 3. Mà $3 \nmid (x+y+z)$ nên từ (3.1) suy ra vô lí.

Vậy x, y, z chia cho 3 có cùng số dư, khi đó $x-y, y-z, z-x$ đều chia hết cho 3. Từ (3.1) ta suy ra $27 \mid (x+y+z)$, ta có đpcm. ■

Bài tập đề nghị

Bài 1. i) Tìm số tự nhiên n để $7 \mid (2^n - 1)$.
ii) Chứng minh rằng $7 \nmid (2^n + 1) \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Bài 2. Chứng minh rằng với mọi số nguyên a thì $a(a^6 - 1)$ chia hết cho 7.

Bài 3. Tìm n để $13 \mid 3^{2n} + 3^n + 1$.

Bài 4. Chứng minh rằng với mọi $a, b \in \mathbb{N}$ thì $ab(a^2 - b^2)(4a^2 - b^2)$ luôn luôn chia hết cho 5.

Bài 5. Chứng minh rằng $24 \mid (p-1)(p+1)$ với p là số nguyên tố lớn hơn 3.

Bài 6. Chứng minh rằng không tồn tại số nguyên a để $a^2 + 1$ chia hết cho 12.

Bài 7. Chứng minh rằng với mọi số nguyên x, y, z nếu $6 \mid x + y + z$ thì $6 \mid x^3 + y^3 + z^3$.

Bài 8. Cho $ab = 2011^{2012}$, với $a, b \in \mathbb{N}$. Hỏi tổng $a + b$ có chia hết cho 2012 hay không ?

Bài 9. Số $3^n + 2003$ trong đó n là số nguyên dương có chia hết cho 184 không ?

Tính chất 3.11– $\begin{cases} a \equiv b \pmod{n} \\ c \equiv d \pmod{n} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a \pm c \equiv b \pm d \pmod{n} \\ ac \equiv bd \pmod{n} \end{cases}$ □

Tính chất 3.12– $a \equiv b \pmod{n} \Rightarrow a^k \equiv b^k \pmod{n}, \quad \forall k \geq 1.$ □

Tính chất 3.13– $a \equiv b \pmod{n} \Rightarrow ac \equiv bc \pmod{mc}, \ c > 0$ □

Tính chất 3.14– $(a+b)^n \equiv b^n \pmod{a}, \ (a > 0).$ □

Tính chất 3.15– *Nếu d là ước chung dương của a, b và m thì $a \equiv b \pmod{m}$ thì $\frac{a}{d} \equiv \frac{b}{d} \pmod{\frac{m}{d}}$.*

Tính chất 3.16– $a \equiv b \pmod{m}$, *c là ước chung của a và b, $(c, m) = 1$ thì* $\frac{a}{c} \equiv \frac{b}{c} \pmod{m}$.

Phương pháp đồng dư thức để giải các bài toán chia hết

Cơ sở: Sử dụng các tính chất và định nghĩa trên để giải các bài toán chia hết.

Ví dụ 3.17. *Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên n thì $7 \mid 8^n + 6$.* △
Lời giải. Ta có $8^n \equiv 1 \pmod{7} \implies 8^n + 6 \equiv 7 \equiv 0 \pmod{7}$. ■

Ví dụ 3.18. *Chứng minh rằng $19 \mid 7 \cdot 5^{2n} + 12 \cdot 6^n$. với mọi số nguyên dương n.* △
Lời giải. Ta có $5^2 = 25 \equiv 6 \pmod{19} \implies (5^2)^n \equiv 6^n \pmod{19} \implies 7 \cdot 5^{2n} \equiv 7 \cdot 6^n \pmod{19} \implies 7 \cdot 5^{2n} + 12 \cdot 6^n \equiv 19 \cdot 6^n \equiv 0 \pmod{19}$. ■

Ví dụ 3.19. *Viết liên tiếp các số $111, 112, \cdots, 888$ để được số $A = 111112\cdots888$. Chứng minh rằng $1998 \mid A$.* △

BÀI 8. Chứng minh rằng $2003^{2005} + 2017^{2015}$ chia hết cho 12.

BÀI 9. Cho p là số tự nhiên lẻ và các số nguyên a, b, c, d, e thỏa mãn $a+b+c+d+e$ và $a^2+b^2+c^2+d^2+e^2$ đều chia hết cho p. Chứng minh rằng số $a^5+b^5+c^5+d^5+e^5-5abcde$ cũng chia hết cho p.

BÀI 10. *(Canada Training for IMO 1987)*
Kí hiệu:

$$1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1) = (2n-1)!!$$
$$2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n) = (2n)!!.$$

Chứng minh rằng $(1985)!! + (1986)!!$ chia hết cho 1987.

BÀI 11. Chứng minh rằng số $2222^{5555} + 5555^{2222}$ chia hết cho 7.

BÀI 12. Cho k là số nguyên dương sao cho số $p = 3k+1$ là số nguyên tố và

$$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{3\cdot 4} + \cdots + \frac{1}{(2k-1)2k} = \frac{m}{n}$$

với hai số nguyên dương nguyên tố cùng nhau m và n.Chứng minh m chia hết cho p.

(Tạp chí Mathematics Reflections, đăng bởi T.Andreescu)

3.2.4 Xét đồng dư

Định nghĩa và một số tính chất

Định nghĩa 3.2 *Cho a, b là các số nguyên và n là số nguyên dương. Ta nói, a đồng dư với b theo modun n và kí hiệu $a \equiv b \pmod n$ nếu a và b có cùng số dư khi chia cho n.* △

Như vậy $a \equiv n \pmod n \iff n \mid (a-b)$. Ví dụ: $2012 \equiv 2 \pmod 5$.

Tính chất (bạn đọc tự chứng minh)
Cho a, b, c, d, n là các số nguyên.

TÍNH CHẤT 3.10–
$$a \equiv a \pmod n,$$
$$a \equiv b \pmod n \Leftrightarrow b \equiv a \pmod n,$$
$$a \equiv b \pmod n,\quad b \equiv c \pmod n \Rightarrow a \equiv c \pmod n.$$
□

BÀI 10. Cho các số nguyên dương x, y, z thỏa mãn $x^2+y^2=z^2$. Chứng minh rằng xyz chia hết cho 60.

BÀI 11. Cho các số nguyên dương x, y, z thỏa mãn $x^2+y^2=2z^2$. Chứng minh rằng x^2-y^2 chia hết cho 84.

BÀI 12. Cho $n > 3$, $(n \in \mathbb{N})$. Chứng minh rằng nếu $2^n = 10a+b$, $(0 < b < 9)$ thì $6 \mid ab$.

3.2.3 Phân tích

Phân tích thành tích

Cơ sở: Để chứng minh $A(n)$ chia hết cho p, ta phân tích $A(n) = D(n)p$, còn nếu trong ta không thể đưa ra cách phân tích như vậy, ta có thể viết $p = kq$.

- Nếu $(k, q) = 1$ thì ta chứng minh $A(n)$ cùng chia hết cho k và q.
- Nếu $(k, q) \neq 1$ thì ta viết $A(n) = B(n)C(n)$ và chứng minh $B(n)$ chia hết cho k, $C(n)$ chia hết cho q.

Ví dụ 3.8. *Cho n là một số nguyên dương. Chứng minh rằng*

$$2^n \mid (n+1)(n+2)\cdots(2n).$$

Lời giải. Ta có

$$(n+1)(n+2)\cdots(2n) = \frac{(2n)!}{n!} = \frac{(1.3.5...(2n-1))\,(2.4.6...2n)}{n!}$$
$$= 1.3.5...(2n-1).2^n.\frac{n!}{n!}$$
$$= 1.3.5...(2n-1).2^n.$$

Do đó $2^n \mid (n+1)(n+2)\cdots(2n)$. ■

Ví dụ 3.9. *Chứng minh rằng với mọi số nguyên n thì $6 \mid n^3 - n$.* △

Lời giải. Phân tích

$$n^3 - n = n(n^2-1) = n(n-1)(n+1)$$

Biểu thức là tích ba số nguyên liên tiếp nên tồn tại ít nhất một trong ba số một số chia hết cho 2 và một số chia hết cho 3. Mà $(2,3)=1$ nên $6 \mid n^3 - n$. ■

Ví dụ 3.10. *Chứng minh rằng $n^6 - n^4 - n^2 + 1$ chia hết cho 128 với n lẻ.* △

Lời giải. Ta có

$$n^6 - n^4 - n^2 + 1 = (n^2-1)^2(n+1) = (n-1)^2(n+1)^2$$

Vì n lẻ nên đặt $n = 2k,\ k \in \mathbb{N}$, suy ra

$$(n^2-1)^2 = \left[(2k+1)^2 - 1\right] = (4k^2+4k)^2 = [4k(k+1)]^2$$

Vậy $64 \mid (n^2-1)^2$. Vì n lẻ nên $2 \mid n+1$, suy ra đpcm. ■

Ví dụ 3.11. *Cho ba số nguyên dương khác nhau x, y, z. Chứng minh rằng $(x-y)^5 + (y-z)^5 + (x-z)^5$ chia hết cho $5(x-y)(y-z)(x-z)$.* △

Lời giải. Ta có

$$\begin{aligned}
& (x-y)^5 + (y-z)^5 + (x-z)^5 \\
= \; & (x-z+z-y)^5 + (y-z)^5 + (z-x)^5 \\
= \; & (x-z)^5 + 5(x-z)^4(z-y) + 10(x-z)^3(z-y)^2 \\
& +10(x-z)^4(z-y) + 10(x-z)^3(z-y)^2 \\
& +10(x-z)^2(z-y)^3 + 5(x-z)(z-y)^4 \\
= \; & 5(x-z)(z-y)\times \\
& \times\left[(x-z)^3 + 2(x-z)^2(z-y) + 2(x-z)(z-y)^2 + (z-y)^3\right].
\end{aligned}$$

Ví dụ 3.16. *(Đề thi tuyển sinh ĐHKHTN-ĐHQG Hà Nội, vòng 1, năm 2007-2008) Cho a, b là hai số nguyên dương và $a+1, b+2007$ đều chia hết cho 6. Chứng minh rằng $4^a + a + b$ chia hết cho 6.* △

Lời giải. Phân tích

$$\begin{aligned}
4^a + a + b &= (4^a + 2) + (a+1) + (b+2007) - 2010 \\
4^a + 2 &= 4^a - 1 + 3 = (4-1)(4^{a-1} + \cdots 1) + 3
\end{aligned}$$

Như vậy $3 \mid 4^a + 2$. Do đó $4^a + a + b$ là tổng của các số nguyên dương chia hết cho 6 nên $4^a + a + b$ chia hết cho 6. ■

Bài tập đề nghị

Bài 1. Đưa ra các mở rộng từ bài tập đề nghị của phương pháp phân tích thành tích thành các bài toán vận dụng phương pháp tách tổng (giống như cách mở rộng của ví dụ 1.9).

Bài 2. *(Hungary MO 1947)* Chứng minh rằng $46^n + 296.13^n$ chia hết cho 1947 với mọi số tự nhiên n lẻ.

Bài 3. Chứng minh rằng $20^n + 16^n - 3^n - 1$ chia hết cho 323 với mọi số tự nhiên n chẵn.

Bài 4. Chứng minh rằng $2903^n - 803^n - 464^n + 261^n$ chia hết cho 1897 với mọi số tự nhiên n.

Bài 5. Chứng minh rằng với mọi số nguyên $n > 1$ ta có $n^n + 5n^2 - 11n + 5$ chia hết cho $(n-1)^2$.

Bài 6. *(HSG 9 Tp Hà Nội, vòng 2, 1998)* Chứng minh rằng $1997 \mid m$ với $m, n \in \mathbb{N}$ thỏa mãn

$$\frac{m}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{1329} - \frac{1}{1330} + \frac{1}{1331}.$$

Bài 7. Chứng minh rằng $3^{2n+1} + 2^{n+2}$ chia hết cho 7 với mọi $n \in \mathbb{N}$.

Lời giải. Để ý rằng 2003 là số nguyên tố. Ta có

$$\begin{aligned}
\frac{m}{n} &= 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots-\frac{1}{1334}+\frac{1}{1335}\\
&= \left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{1335}\right)-2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\cdots+\frac{1}{1334}\right)\\
&= \left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{1335}\right)-\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{667}\right)\\
&= \frac{1}{668}+\frac{1}{669}+\cdots+\frac{1}{1335}\\
&= \left(\frac{1}{668}+\frac{1}{1335}\right)+\left(\frac{1}{669}+\frac{1}{1334}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{1001}+\frac{1}{1002}\right)\\
&= 2003\left(\frac{1}{668.1335}+\frac{1}{669.1334}+\cdots+\frac{1}{1001.1002}\right)\\
&= 2003.\frac{p}{q}
\end{aligned}$$

Ở đây p là số nguyên còn $q = 668\cdot 669\cdots 1335$. Vì 2003 nguyên tố nên $(q, 2003) = 1$.
Do đó từ $(*)$ suy ra $2003pn = mq$.
Vì p, n nguyên nên suy ra $2003|mq$ mà $(q, 2003) = 1$ nên $2003|m$. ■

Ví dụ 3.15. *Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên n thì $A = 2005^n + 60^n - 1897^n - 168^n$ chia hết cho 2004.* △

Lời giải. Ta có $2004 = 12 \times 167$. Vì $(12, 167) = 1$ nên để chứng minh A chia hết cho 2004 ta chứng minh A chia hết cho 12 và 167.
Áp dụng tính chất $a^n - b^n$ chia hết cho $a - b$ với mọi n tự nhiên và $a-b \neq 0$ suy ra $2005^n - 1897^n$ chia hết cho $2005-1897 = 108 = 12\times 9$, hay $2005^n - 1897^n$ chia hết cho 12. Tương tự thì $168^n - 60^n$ chia hết cho 12. Vậy A chia hết cho 12.
Tiếp tục phân tích

$$A = (2005^n - 168^n) - (1897^n - 60^n).$$

Lập luận tương tự như trên thì $2005^n - 168^n$ và $1897^n - 60^n$ chia hết cho 167, tức A chia hết cho 167. Vậy ta có điều phải chứng minh. ■

Nhưng ta cũng có:

$$\begin{aligned}
&(x-z)^3+2(x-z)^2(z-y)+2(x-z)(z-y)^2+(z-y)^3\\
=\ &(x-y+y-z)^3+2(x-y+y-z)^2(z-y)\\
&+2(x-y+y-z)(z-y)^2+(z-y)^3\\
=\ &(x-y)^3+2(x-y)^2(y-z)+3(x-y)(y-z)^2\\
&+(y-z)^3+2(x-y)^2(z-y)\\
&+4(x-y)(y-z)(z-y)+2(y-z)^2(z-y)\\
&+2(x-y)(z-y)^2+2(y-z)(z-y)^2+(z-y)^3\\
=\ &(x-y)^3+3(x-y)^2(y-z)+3(x-y)(y-z)^2\\
&+2(x-y)^2(z-y)+4(x-y)(y-z)(z-y)+2(x-y)(z-y)^2,
\end{aligned}$$

Biểu thức cuối cùng có nhân tử chung $(x-y)$. Ta suy ra điều phải chứng minh. ■

Bài tập đề nghị

Bài 1. Chứng minh rằng nếu a, k là các số nguyên, a lẻ thì $2^{k+1} \mid (a^{2^k} - 1)$.

Bài 2. Chứng minh rằng $n^5 - n$ chia hết cho 30 với mọi $n \in \mathbb{Z}$.

Bài 3. Chứng minh rằng $3n^4 - 14n^3 + 21n^2 - 10n$ chia hết cho 24 với mọi $n \in \mathbb{Z}$.

Bài 4. Chứng minh rằng $n^5 - 5n^3 + 4n$ chia hết cho 120 với mọi $n \in \mathbb{Z}$.

Bài 5. Chứng minh rằng $n^3 - 3n^2 - n + 3$ chia hết cho 48 với mọi n lẻ, $n \in \mathbb{Z}$.

Bài 6. Chứng minh rằng $n^8 - n^6 - n^4 + n^2$ chia hết cho 1152 với mọi số nguyên n lẻ.

Bài 7. Chứng minh rằng $n^4 - 4n^3 - 4n^2 + 16n$ chia hết cho 348 với mọi n là số nguyên chẵn.

Bài 8. Chứng minh rằng $n^4 - 14n^3 + 71n^2 - 154n + 120$ chia hết cho 24 với mọi số tự nhiên n.

BÀI 9. Cho x, y, z là các số nguyên khác 0. Chứng minh rằng nếu $x^2 - yz = a, y^2 - zx = b, z^2 - xy = c$ thì tổng $(ax + by + cz)$ chia hết cho tổng $(a + b + c)$.

BÀI 10. Cho m, n là hai số chính phương lẻ liên tiếp. Chứng minh rằng $mn - m - n + 1$ chia hết cho 192.

BÀI 11. *(HSG 9 TQ 1970)* Chứng minh rằng $n^{12} - n^8 - n^4 + 1$ chia hết cho 512 với mọi số tự nhiên n lẻ.

BÀI 12. *(HSG 9 TQ 1975)* Chứng minh rằng $n^4 + 6n^3 + 11n^2 + 6n$ chia hết cho 24 với mọi số nguyên dương n.

Tách tổng

Cơ sở: Để chứng minh $A(n)$ chia hết cho p, ta biến đổi $A(n)$ thành tổng nhiều hạng tử rồi chứng minh mỗi hạng tử đều chia hết cho p.

Ta có thể sử dụng một số hằng đẳng thức áp dụng vào chia hết, ví dụ như:

> Cho a, b là các số thực và n là số nguyên dương. Khi đó ta có
>
> $$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1})$$

Ta sẽ có hệ quả là:

HỆ QUẢ 3.2– *Nếu $a - b \neq 0$ thì $a^n - b^n$ chia hết cho $a - b$.* □

HỆ QUẢ 3.3– *Nếu $a + b \neq 0$ và n lẻ thì $a^n + b^n$ chia hết cho $a + b$.* □

HỆ QUẢ 3.4– *Nếu $a + b \neq 0$ và n chẵn thì $a^n - b^n$ chia hết cho $a + b$* □

Ví dụ 3.12. *Chứng minh rằng $ax^2 + bx + c \in \mathbb{Z}, \quad \forall x \in \mathbb{Z}$ khi và chỉ khi $2a, a + b, c \in \mathbb{Z}$* △

Lời giải. Phân tích

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= ax^2 - ax + (a + b)x + c \\ &= 2a.\frac{x(x-1)}{2} + (a + b)x + c \in \mathbb{Z}, \quad \forall x \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Ví dụ 3.13. *Chứng minh rằng $6 \mid (a^3 + 5a)\ \forall a \in \mathbb{N}$.* △

Lời giải. Phân tích $a^3 + 5a = (a^3 - a) + 6a$. Hiển nhiên đúng vì $6 \mid n^3 - n$ (chứng minh ở ví dụ Equation 4.27). ■

Nhận xét. Từ ví dụ Equation 4.27 ta cũng có thể đưa ra các bài toán sau, chứng minh cũng bằng cách vận dụng phương pháp tách tổng:

Bài toán 3.1. *Cho $m, n \in \mathbb{Z}$. Chứng minh rằng $6 \mid m^2n^2(m - n)$.* △

Bài toán 3.2. *Cho $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Chứng minh rằng $6 \mid (a^3 + b^3 + c^3)$ khi và chỉ khi $6 \mid (a + b + c)$* △

Bài toán 3.3. *Cho $a \in \mathbb{Z}$. Chứng minh rằng $\frac{a}{3} + \frac{a^2}{2} + \frac{a^3}{6} \in \mathbb{Z}$* △

Bài toán 3.4. *Viết số 2011^{2012} thành tổng các số nguyên dương. Đem tổng lập phương tất cả các số hạng đó chia cho 3 thì được dư là bao nhiêu ?* △

Ví dụ 3.14. *Cho m, n là các số nguyên thỏa mãn:*

$$\frac{m}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots - \frac{1}{1334} + \frac{1}{1335}$$

Chứng minh rằng $2003 \mid m$. △