Từ (4.35) suy ra t_0 chẵn. Đặt $t = 2t_1 (t_1 \in \mathbb{Z})$ thế vào (4.35) và rút gọn, ta được

$$4x_o^4 + 2y_o^4 + z_o^4 = 8t_1^4$$

Do vậy z_0 chẵn. Đặt $z_0 = 2z_1 (z_1 \in \mathbb{Z})$, thế vào và rút gọn ta được

$$2x_o^4 + y_o^4 + 8z_1^4 = 4t_1^4$$

Do vậy y_0 chẵn. Đặt $y_0 = 2y_1 (y_1 \in \mathbb{Z})$, thế vào và rút gọn ta được

$$x_o^4 + 8y_1^4 + 4z_1^4 = 2t_1^4$$

Do vậy x_0 chẵn. Đặt $x_0 = 2x_1 (x_1 \in \mathbb{Z})$, thế vào phương trình ta được

$$8x_1^4 + 4y_1^4 + 2z_1^4 = t_1^4$$

Suy ra $(x_1; y_1; z_1; t_1)$ cũng là nghiệm của (4.35) . Dễ thấy $x_1 < x_0$ (vô lí với điều giả sử). Do đó phương trình có nghiệm nguyên duy nhất là $(x; y; z; t) = (0; 0; 0; 0)$. ■

Bài tập đề nghị

Bài 1. Giải các phương trình nghiệm nguyên $x^2 + y^2 = 3z^2$

Bài 2. Giải các phương trình nghiệm nguyên $x^3 + 2y^3 = 4z^3$

Bài 3. Giải các phương trình nghiệm nguyên $3x^2 + 6y^2 + 12z^2 = t^2$

Bài 4. Giải các phương trình nghiệm nguyên $x^2 + 6y^2 + 2z^2 = 4t^2$

Bài 5. Giải phương trình nghiệm nguyên $x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = x^2y^2z^2$.

Bài 6. Giải phương trình nghiệm nguyên $5x^3 + 11y^3 + 13z^3 = 0$.

Chương 4

Phương trình nghiệm nguyên

Trần Nguyễn Thiết Quân (L Lawliet)
Phạm Quang Toàn (Phạm Quang Toàn)

Trong chương trình THCS và THPT thì phương trình nghiệm nguyên vẫn luôn là một đề tài hay và khó đối với học sinh. Các bài toán nghiệm nguyên thường xuyên xuất hiện tại các kì thi lớn, nhỏ, trong và ngoài nước. Trong bài viết này tôi chỉ muốn đề cập đến các vấn đề cơ bản của nghiệm nguyên (các dạng, các phương pháp giải) chứ không đi nghiên cứu sâu sắc về nó. Tôi cũng không đề cập tới phương trình Pell, phương trình Pythagore, phương trình Fermat vì nó có nhiều trong các sách, các chuyên đề khác.

4.1 Xét tính chia hết

4.1.1 Phát hiện tính chia hết của 1 ẩn

Ví dụ 4.1. *Giải phương trình nghiệm nguyên*

$$13x + 5y = 175 \tag{4.1}$$

Lời giải. Giả sử x, y là các số nguyên thỏa mãn phương trình (4.1). Ta thấy 175 và $5y$ đều chia hết cho 5 nên $13x \vdots 5 \Rightarrow x \vdots 5$ (do $\mathrm{GCD}(13;5) = 1$). Đặt $x = 5t$ $(t \in \mathbb{Z})$. Thay vào phương trình (4.1), ta được

$$13.5t + 5y = 175 \Leftrightarrow 13t + y = 35 \Leftrightarrow y = 35 - 13t$$

Do đó, phương trình (4.1) có vô số nghiệm nguyên biểu diễn dưới dạng

$$(x; y) = (5t; 35 - 13t), (t \in \mathbb{Z})$$

Bài tập đề nghị

Bài 1. Giải phương trình nghiệm nguyên $12x - 19y = 285$

Bài 2. Giải phương trình nghiệm nguyên $7x + 13y = 65$

Bài 3. Giải phương trình nghiệm nguyên $5x + 7y = 112$

4.1.2 Đưa về phương trình ước số

Ví dụ 4.2. *Tìm nghiệm nguyên của phương trình*

$$3xy + 6x + y - 52 = 0 \tag{4.2}$$

Lời giải. *Nhận xét.* Đối với phương trình này, ta không thể áp dụng phương pháp trên là phát hiện tính chia hết, vậy ta phải giải như thế nào?
Ta giải như sau:

$$\begin{aligned} (4.2) \Leftrightarrow 3xy + y + 6x + 2 - 54 &= 0 \\ \Leftrightarrow y(3x+1) + 2(3x+1) - 54 &= 0 \\ \Leftrightarrow (3x+1)(y+2) &= 54 \end{aligned}$$

Như vậy, đến đây ta có x và y nguyên nên $3x + 1$ và $y + 2$ phải là ước của 54. Nhưng nếu như vậy thì ta phải xét đến hơn 10 trường hợp sao? Vì:

$$\begin{aligned} 4 &= 1.54 = 2.27 = 3.18 = 6.9 \\ &= (-1).(-54) = (-2).(-27) = (-3).(-18) = (-6).(-9) \end{aligned}$$

• *Trường hợp 1.* Trong $x_0; y_0; z_0$, có 2 số lẻ, 1 số chẵn. Không mất tính tổng quát, giả sử $x_0; y_0$ lẻ còn z_0 chẵn. Xét theo module 4 thì

$$VT(4.34) \equiv 2 \pmod 4,\ VP(4.34) \equiv 0 \pmod 4 : \text{vô lý!}$$

Vậy trường hợp này không xảy ra.
• *Trường hợp 2.* $x_0;\ y_0;\ z_0$ đều chẵn. Đặt $x_0 = 2x_1;\ y_0 = 2y_1;\ z_0 = 2z_1$ với $x_1; y_1; z_1 \in \mathbb{Z}$. Thay vào (4.34) và rút gọn, ta thu được

$$x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 = 4x_1y_1z_1$$

Lập luận như trên, ta lại được $x_1;\ y_1;\ z_1$ đều chẵn.

Quá trình đó diễn ra tiếp tục nên $x_0;\ y_0;\ z_0 \vdots 2^k$ với k tự nhiên tùy ý. Điều đó chỉ xảy ra khi và chỉ khi $x_0 = y_0 = z_0 = 0$. ∎

4.3.2 Nguyên tắc cực hạn

Định nghĩa 4.1 *Nguyên tắc cực hạn hay còn gọi là nguyên lí khởi đầu cực trị. Về mặt hình thức thì phương pháp này khác với phương pháp lùi vô hạn nhưng cách sử dụng đều như nhau đều chứng minh phương trình chỉ có nghiệm tầm thường (nghiệm tầm thường là nghiệm bằng 0). Phương pháp giải như sau:*
Giả sử $(x_0; y_0; z_0; ...)$ là nghiệm của $f(x; y; z; ...)$ với một điều kiện nào đó ràng buộc bộ $(x_0; y_0; z_0; ...)$. Chẳng hạn x_0 nhỏ nhất hoặc $x_0 + y_0 + z_0 + ...$ nhỏ nhất và sau đó bằng các phép biến đổi số học ta lại tìm được 1 bộ nghiệm $(x_1; y_1; z_1; ...)$ trái với những điều kiện ràng buộc trên. Ví dụ ta chọn bộ $(x_0; y_0; z_0; ...)$ với điều kiện x_0 nhỏ nhất sau đó ta lại tìm được 1 bộ $(x_1; y_1; z_1; ...)$ với $x_1 < x_0$ dẫn đến phương trình có nghiệm tầm thường. △

Ví dụ 4.27. *Giải phương trình nghiệm nguyên sau*

$$8x^4 + 4y^4 + 2z^4 = t^4 \tag{4.35}$$

Lời giải. Giả sử $(x_0; y_0; z_0; t_0)$ là nghiệm nguyên không tầm thường của (4.35) với x_0 nhỏ nhất.

BÀI 1. $x^4 + x^2 + 1 = y^2$

BÀI 2. $3(x^4 + y^4 + x^2 + y^2 + 2) = 2(x^2 - x + 1)(y^2 - y + 1)$

BÀI 3. $2x^4 + 3x^2 + 1 - y^2 = 0$

BÀI 4. $x^2 + (x + y)^2 = (x + 9)^2$

BÀI 5. $y^3 - x^3 = 2x + 1$

BÀI 6. $x^4 - y^4 + z^4 + 2x^2z^2 + 3x^2 + 4z^2 + 1 = 0$

BÀI 7. $x^3 - y^3 - 2y^2 - 3y - 1 = 0$

BÀI 8. $x^4 + (x + 1)^4 = y^2 + (y + 1)^2$

BÀI 9. $9^x - 3^x = y^4 + 2y^3 + y^2 + 2y$

BÀI 10. $x^4 + x^2 - y^2 + y + 10 = 0$

BÀI 11. $x^6 - 4y^3 - 4y^4 = 2 + 3y + 6y^2$

BÀI 12. $(x - 2)^4 - x^4 = y^3$

BÀI 13. $x^3 + 8x^2 - 6x + 8 = y^3$

4.3 Nguyên tắc cực hạn, lùi vô hạn

4.3.1 Lùi vô hạn

Ví dụ 4.26 (Korea 1996). *Giải phương trình nghiệm nguyên sau:*

$$x^2 + y^2 + z^2 = 2xyz \tag{4.34}$$

Lời giải. Giả sử $(x_0; y_0; z_0)$ là bộ nghiệm nguyên của (4.34) thì ta có

$$x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 = 2x_0y_0z_0$$

Rõ ràng VT (4.34) chẵn do VP (4.34) chẵn nên có 2 trường hợp xảy ra:

Có cách nào khác không? Câu trả lời là có! Nếu ta để ý một chút đến thừa số $3x + 1$, biểu thức này chia cho 3 luôn dư 1 với mọi x nguyên. Với lập luận trên, ta được:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} 3x + 1 = 1 \\ y + 2 = 54 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 52 \end{cases} \\ \begin{cases} 3x + 1 = -2 \\ y + 2 = -54 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = -56 \end{cases} \end{array}\right.$$

Ví dụ 4.3. *Giải phương trình nghiệm nguyên sau:*

$$2x + 5y + 3xy = 8 \tag{4.3}$$

Lời giải. Ta có

$$\begin{aligned} (4.3) &\Leftrightarrow x(2 + 3y) + 5y = 8 \\ &\Leftrightarrow 3x(2 + 3y) + 15y = 24 \\ &\Leftrightarrow 3x(2 + 3y) + 5(2 + 3y) = 34 \\ &\Leftrightarrow (3x + 5)(3y + 3) = 34 \end{aligned}$$

Đến đây phân tích $34 = 1 \cdot 34 = 2 \cdot 17$ rồi xét các trường hợp. Chú ý rằng $3x + 5, 3y + 2$ là hai số nguyên chia 3 dư 2, vận dụng điều này ta có thể giảm bớt số trường hợp cần xét. ■

Ví dụ 4.4. *Giải phương trình nghiệm nguyên*

$$x^2 - y^2 = 2011 \tag{4.4}$$

Lời giải. (4.4) $\Leftrightarrow (x - y)(x + y) = 2011$. Vì 2011 là số nguyên tố nên ước nguyên của 2011 chỉ có thể là $\pm 1, \pm 2011$. Từ đó suy ra nghiệm $(x; y)$ là $(1006; 1005); (1006; -1005); (-1006; -1005); (-1006; 1005)$. ■

Ví dụ 4.5. *Tìm các số nguyên x, y thoả mãn điều kiện*

$$x^2 + y^2 = (x - y)(xy + 2) + 9 \tag{4.5}$$

Lời giải. Đặt $a = x - y, b = xy$. Khi đó (4.5) trở thành

$$a^2 + 2b = a(b+2) + 9 \Leftrightarrow (a-2)(a-b) = 9 \tag{4.6}$$

Vì $x, y \in \mathbb{Z}$ nên $a, , a-2, a-b$ đều là các số nguyên. Từ (4.6) ta có các trường hợp sau:

- $$\begin{cases} a-2=9 \\ a-b=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=11 \\ b=10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-y=11 \\ xy=10 \end{cases} \tag{4.7}$$
- $$\begin{cases} a-2=3 \\ a-b=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=5 \\ b=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-y=5 \\ xy=2 \end{cases} \tag{4.8}$$
- $$\begin{cases} a-2=1 \\ a-b=9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=3 \\ b=-6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-y=3 \\ xy=-6 \end{cases} \tag{4.9}$$
- $$\begin{cases} a-2=-1 \\ a-b=-9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-y=1 \\ xy=10 \end{cases} \tag{4.10}$$
- $$\begin{cases} a-2=-3 \\ a-b=-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-1 \\ b=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-y=-1 \\ xy=2 \end{cases} \tag{4.11}$$
- $$\begin{cases} a-2=-3 \\ a-b=-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-1 \\ b=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-y=-1 \\ xy=2 \end{cases} \tag{4.12}$$

Dễ thấy các hệ (4.7),(4.8),(4.10) không có nghiệm nguyên, hệ (4.9) vô nghiệm, hệ (4.11) có hai nghiệm nguyên $(1;2)$ và $(-2;-1)$, hệ (4.12) có hai nghiệm nguyên $(-1;6)$ và $(-6;1)$.
Tóm lại phương trình (4.5) có các cặp nghiệm nguyên $(x;y)$ là $(1;2)$; $(-2;-1)$; $(-1;6)$; $(-6;1)$. ■

Ví dụ 4.6. *Tìm nghiệm nguyên của phương trình:*

$$\left(x^2+1\right)\left(y^2+1\right) + 2\left(x-y\right)\left(1-xy\right) = 4\left(1+xy\right) \tag{4.13}$$

Nếu $x = 1 \Rightarrow A = 9$: là số chính phương nên thỏa đề.
Nếu $x > 1$ thì xét hiệu

$$(x^2+x+1)^2 - y^2 = x^2+x-2 = (x+2)(x-1) > 0 \Rightarrow y^2 < (x^2+x+1)^2, (ii)$$

Từ (i) và (ii), ta có

$$(x^2+x)^2 < y^2 < (x^2+x+1)^2$$

Suy ra, không tồn tại $y \in \mathbb{N}$ để $y^2 = A$ khi $x > 1$.
Vậy $x = 1$ là giá trị cần tìm. ■

Ví dụ 4.25. *Giải phương trình nghiệm nguyên*

$$x^4 + x^2 + 4 = y^2 - y \tag{4.30}$$

Lời giải. Ta có đánh giá sau

$$x^2(x^2+1) < x^4 + x^2 + 4 < (x^2+2)(x^2+3) \tag{4.31}$$

Từ (4.30) và (4.31) suy ra

$$x^2(x^2+1) < y(y-1) < (x^2+2)(x^2+3). \tag{4.32}$$

Vì x, y, z nguyên nên từ (4.32) suy ra

$$y(y-1) = (x^2+1)(x^2+2) \tag{4.33}$$

Từ (4.30) và (4.33) thì

$$x^4 + x^2 + 4 = (x^2+1)(x^2+2) \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$$

Từ đây dễ tìm được $y = -1$ hoặc $y = 3$.
Vậy pt đã cho có bốn cặp nghiệm

$$(x, y) = \{(1, -2), (1, 3), (-1, -2), (-1, 3)\}$$

Bài tập đề nghị
Tìm nghiệm nguyên của các phương trình sau:

4.2.5 Phương pháp kẹp

Nhận xét. Sử dụng tính chất lũy thừa cùng bậc của số nguyên liên tiếp hoặc tích các số nguyên liên tiếp ... để đưa phương trình nghiệm nguyên cần giải về dạng phương trình khác ít ẩn hơn và quen thuộc hơn. Phương pháp này còn có cách gọi khác là phương pháp khử ẩn. Ta thường vận dụng các nhận xét sau:

1. $X^n \le Y^n \le (X+a)^n \quad (a \in \mathbb{N}^*)$ thì $Y^n = (X+a-i)^n$ với $i = 0; 1; 2; \cdots; a$.
   Ví dụ với $n = 2$ thì:
   - Không tồn tại $x \in \mathbb{Z}$ để $a^2 < x^2 < (a+1)^2$ với $a \in \mathbb{Z}$.
   - Nếu $a^2 < x^2 < (a+2)^2$ thì $x^2 = (a+1)^2$
2. $X(X+1)\cdots(X+n) \le Y(Y+1)\cdots(Y+n) \le (X+a)(X+a+1)\cdots(X+a+n)$ thì $Y(Y+1)\cdots(Y+n) = (X+i)(X+1+i)\cdots(X+a+i)$ với $i = 0; 1; 2; \cdots; a$.
   Ví dụ:
   - Không tồn tại $b \in \mathbb{Z}$ để $a(a+1) < b(b+1) < (a+1)(a+2)$ với $a \in \mathbb{Z}$.
   - Với $a(a+1) < b(b+1) < (b+2)(b+3)$ thì $b(b+1) = (b+2)(b+3)$.

Ví dụ 4.24. *Tìm các số nguyên dương x để biểu thức sau là số chính phương*

$$A = x^4 + 2x^3 + 2x^2 + x + 3 \tag{4.29}$$

Lời giải. Vì A là số chính phương nên ta có thể đặt

$$A = x^4 + 2x^3 + 2x^2 + x + 3 = y^2 (y \in \mathbb{N})$$

Ta thấy

$$\begin{aligned} y^2 &= (x^4 + 2x^3 + x^2) + x^2 + x + 3 \\ &= (x^2+x)^2 + \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{11}{4} \\ &> (x^2+x)^2 \\ \Rightarrow y^2 &> (x^2+x)^2, (i) \end{aligned}$$

Lời giải. Phương trình (4.13) tương đương với:

$$\begin{aligned} & x^2y^2 + x^2 + y^2 + 1 + 2x - 2x^2y - 2y + 2xy^2 = 4 + 4xy \\ \Leftrightarrow\ & (x^2+2x+1)y^2 - 2(x^2+2x+1)y + (x^2+2x+1) = 4 \\ \Leftrightarrow\ & (x+1)^2(y-1)^2 = 4 \\ \Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} (x+1)(y-1) = 2 \\ (x+1)(y-1) = -2 \end{array} \right. \end{aligned}$$

Với $(x+1)(y-1) = 2$ mà $x, y \in \mathbb{Z}$ nên ta có các trường hợp sau:

- $\begin{cases} x+1 = 1 \\ y-1 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 3 \end{cases}$
- $\begin{cases} x+1 = 2 \\ y-1 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}$
- $\begin{cases} x+1 = -2 \\ y-1 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \\ y = 0 \end{cases}$
- $\begin{cases} x+1 = -1 \\ y-1 = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = -1 \end{cases}$

Với $(x+1)(y-1) = -2$, tương tự ta cũng suy ra được:

- $\begin{cases} x+1 = -1 \\ y-1 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = 3 \end{cases}$
- $\begin{cases} x+1 = 1 \\ y-1 = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = -1 \end{cases}$
- $\begin{cases} x+1 = 2 \\ y-1 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases}$
- $\begin{cases} x+1 = -2 \\ y-1 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \\ y = 2 \end{cases}$

Vậy phương trình đã cho có các cặp nghiệm nguyên:

$$(x; y) = \{(0; 3); (1; 2); (-3; 0); (-2; -1); (-2; 3); (0; -1); (1; 0); (-3; 2)\}$$

Ví dụ 4.7. *Tìm nghiệm nguyên của phương trình*

$$x^6 + 3x^3 + 1 = y^4 \tag{4.14}$$

Lời giải. Nhân hai vế của phương trình (4.14) cho 4, ta được:

$$\begin{aligned} & 4x^6+12x^3+4=4y^4 \\ \Leftrightarrow\ & (4x^6+12x^3+9)-4y^4=5 \\ \Leftrightarrow\ & (2x^3+3)^2-4y^4=5 \\ \Leftrightarrow\ & (2x^3-2y^2+3)(2x^3+2y^2+3)=5. \end{aligned}$$

Với lưu ý rằng $5=1.5=5.1=(-1).(-5)=(-5).(-1)$ và $x,y\in\mathbb{Z}$ nên ta suy ra được các trường hợp sau:

- $\begin{cases} 2x^3-2y^2+3=1 \\ 2x^3+2y^2+3=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3-y^2=-1 \\ x^3+y^2=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3=0 \\ y^2=1 \end{cases}$
  $\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} x=0 \\ y=1 \end{array} \right. \\ \left[\begin{array}{l} x=0 \\ y=-1 \end{array} \right. \end{array} \right.$
- $\begin{cases} 2x^3-2y^2+3=-1 \\ 2x^3+2y^2+3=-5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3-y^2=-2 \\ x^3+y^2=-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3=-3 \\ y^2=-1 \end{cases}$ (loại)
- $\begin{cases} 2x^3-2y^2+3=5 \\ 2x^3+2y^2+3=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3-y^2=1 \\ x^3+y^2=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3=0 \\ y^2=-1 \end{cases}$ (loại)
- $\begin{cases} 2x^3-2y^2+3=-5 \\ 2x^3+2y^2+3=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3-y^2=-4 \\ x^3+y^2=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3=-3 \\ y^2=1 \end{cases}$ (loại)

Vậy phương trình đã cho có các cặp nghiệm nguyên:

$$\boxed{(x;y)=\{(0;1);(0;-1)\}}$$

Nhận xét. Bài toán này cũng có thể giải bằng phương pháp kẹp.

Ví dụ 4.8. *Giải phương trình nghiệm nguyên dương:*

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{p} \tag{4.15}$$

trong đó p là số nguyên tố. △

Bài 2. Tìm nghiệm nguyên của phương trình $x+xy+y=x^2+y^2$.

Bài 3. Giải phương trình nghiệm nguyên $10x^2+5y^2+38-12xy+16y-36x=0$.

Bài 4. Tìm nghiệm nguyên phương trình $9x^2+x^2+4y^2+34-12xy+20y-36x=0$.

Bài 5. Tìm nghiệm nguyên dương của $x+2y^2+3xy+3x+5y=14$.

Bài 6. Tìm nghiệm nguyên phương trình $x^2-xy-6y^2+2x-6y-10=0$.

Bài 7. Tìm nghiệm nguyên của phương trình $x^2+2y62+3xy+3x+5y=15$.

Bài 8. Tìm nghiệm nguyên của phương trình $2x^2+6y^2+7xy-x-y=25$.

Bài 9. Tìm nghiệm nguyên của phương trình $9x^2-10y^2-9xy+3x-5y=9$.

Bài 10. Tìm nghiệm nguyên của phương trình $12x^2+6xy+3y^2=28(x+y)$.

(Thi vào lớp 10 chuyên, ĐHKHTN-ĐHQGHN năm 1994)

Bài 11. Tìm nghiệm nguyên của phương trình $3(x^2+xy+y^2)=x+8y$.

Bài 12. Tìm nghiệm nguyên của phương trình $7(x^2+xy+y^2)=39(x+y)$.

Bài 13. Tìm nghiệm nguyên của phương trình $2x^2+y^2+3xy+3x+2y+2=0$.

Bài 14. Tìm nghiệm nguyên của phương trình $x^2+2y^2+3xy-x-y+3=0$.

Bài 15. Tìm nghiệm nguyên của phương trình $3x^2+4y^2+12x+3y+5=0$.

Lời giải. Coi (4.27) là phương trình bậc 2 ẩn x. Xét $\Delta_x = -27y^2 + 9y + 1$.
Để (4.27) có nghiệm x thì

$$\Delta_x \geq 0 \Leftrightarrow -27y^2 + 9y + 1 \geq 0 \Leftrightarrow -0,01 \leq y \leq 3,3 \Rightarrow y \in \{0; 1; 2; 3\}$$

Nếu $y = 0 \Rightarrow 3x^2 - x = 0 \Rightarrow x = 0$ vì $x \in \mathbb{Z}$.
Nếu $y = 1 \Rightarrow 3x^2 + 2x - 5 = 0 \Rightarrow x = 1$ vì $x \in \mathbb{Z}$.
Nếu $y = 2$ hoặc $y = 3$ thì không tìm được x nguyên nên loại.
Vậy (4.27) có nghiệm nguyên $(x; y) = (0; 0); (1; 1)$. ■

Ví dụ 4.23. *Giải phương trình nghiệm nguyên*

$$3x^2 - y^2 - 2xy - 2x - 2y + 8 = 0 \tag{4.28}$$

Lời giải. Ta có

$$(4.28) \Leftrightarrow y^2 + 2(x+1)y - (3x^2 - 2x + 8) = 0$$
$$\Delta'_y = (x+1)^2 + 3x^2 - 2x + 8 = 4x^2 + 9$$

Để (4.28) có nghiệm thì $\Delta'_y = 4x^2 + 9$ là số chính phương. Đặt $4x^2 + 9 = k^2$ với $k \in \mathbb{N}$, ta đưa về phương trình ước số và tìm được $x \in \{2; 0; -2\}$.

- Với $x = 2$ ta được $y^2 + 6y - 16 = 0$ nên $y \in \{-8; 2\}$.
- Với $x = 0$ thì $y^2 + 2y - 8 = 0$ nên $y \in \{-4; 2\}$.
- Với $x = -2$ thì $y^2 - 2y - 24 = 0$ nên $y \in \{-6; 4\}$.

Kết luận. Vậy phương trình (4.28) có nghiệm $(x; y)$ là $(2; -8)$, $(2; 2)$, $(0; -4)$, $(0; 2)$, $(-2; 6)$, $(-2; -4)$. ■

Nhận xét. Hai bài toán trên đều có thể sử dụng phương pháp đưa về phương trình ước số để giải.

Bài tập đề nghị

Bài 1. Tìm ở các phương pháp trước (nhất là ở phương pháp đưa về phương trình ước số) các bài toán để giải bằng phương pháp này.

Lời giải.

$$(4.15) \Leftrightarrow xy = px + py \Rightarrow (x-y)(y-p) = p^2.$$

Vì p là số nguyên tố nên ước số nguyên của p^2 chỉ có thể là $\pm 1, \pm p, \pm p^2$. Thử lần lượt với các ước trên ta dễ tìm được kết quả. Phần trình bày xin dành cho bạn đọc. ■

Nhận xét. Phương pháp này cần hai bước chính: Phân tích thành ước số và xét trường hợp để tìm kết quả. Hai bước này có thể nói là không quá khó đối với bạn đọc, nhưng xin nói một số lưu ý thêm về bước xét trường hợp. Trong một số bài toán, hằng số nguyên ở vế phải sau khi phân tích là một số có nhiều ước, như vậy đòi hỏi xét trường hợp và tính toán rất nhiều. Một câu hỏi đặt ra là: Làm thế nào để giảm số trường hợp bị xét đây? Và để trả lời được câu hỏi đó, ta sẽ tham khảo ví dụ dưới đây.

Ví dụ 4.9. *Tìm nghiệm nguyên của phương trình:*

$$x^2 + 12x = y^2. \tag{4.16}$$

Lời giải. (thông thường) Phương trình (4.16) đã cho tương đương với:

$$(x+6)^2 - y^2 = 36 \Leftrightarrow (x+6+y)(x+6-y) = 36$$

Suy ra $x + y + 6, x + 6 - y$ là ước của 36. Mà số 36 có tất cả 18 ước nên ta phải xét 18 trường hợp tương ứng với

$$x + 6 + y \in \{\pm 1; \pm 2; \pm 3; \pm 4; \pm 6; \pm 9; \pm 12; \pm 18; \pm 36\}$$

. Kết quả là ta tìm được các cặp nghiệm nguyên $(x; y)$ là

$$(0; 0); (-12; 0); (-16; 8); (-16; -8); (4; 8); (4; -8)$$

.

Nhận xét. Đúng như vấn đề mà ta đã nêu ra ở trên, số ước quá nhiều để xét. Cho nên ta sẽ có các nhận xét sau để thực hiện thao tác "siêu phàm" chuyển từ con số 18 xuống chỉ còn 2!

Vì y có số mũ chẵn trong phương trình nên có thể giả sử $y \geq 0$. Khi đó $x+6-y \leq x+6+y$, do vậy ta loại được tám trường hợp và còn lại các trường hợp sau:

$$\begin{cases} x+6+y=9 \\ x+6-y=4 \end{cases}, \begin{cases} x+6+y=-9 \\ x+6-y=-4 \end{cases}, \begin{cases} x+y+6=-1 \\ x+y-6=-36 \end{cases},$$
$$\begin{cases} x+y+6=36 \\ x-y+6=1 \end{cases}, \begin{cases} x+y+6=-2 \\ x-y+6=-18 \end{cases}, \begin{cases} x+y+6=18 \\ x-y+6=2 \end{cases},$$
$$\begin{cases} x+y+6=-3 \\ x-y+6=-12 \end{cases}, \begin{cases} x+y+6=12 \\ x-y+6=3 \end{cases}, \begin{cases} x+y+6=-6 \\ x-y+6=-6 \end{cases},$$
$$\begin{cases} x+y+6=6 \\ x+y-6=6 \end{cases}.$$

Bây giờ ta đã có 10 trường hợp, ta sẽ tiếp tục lược bỏ. Nhận thấy $(x+y+6)-(x+6-y)=2y$ nên $x+6-y$ và $x+6+y$ có cùng tính chẵn lẻ, do đó ta loại thêm 6 trường hợp, chỉ còn

$$\begin{cases} x+y+6=18 \\ x+y-6=2 \end{cases}, \begin{cases} x+y+6=-2 \\ x+y-6=-18 \end{cases},$$

$$\begin{cases} x+y+6=-6 \\ x-y+6=-6 \end{cases}, \begin{cases} x+y+6=6 \\ x+y-6=6 \end{cases}$$

.

Tiếp tục xét hai phương trình $\begin{cases} x+y+6=-6 \\ x-y+6=-6 \end{cases}$ và $\begin{cases} x+y+6=6 \\ x+y-6=6 \end{cases}$, hai phương trình này đều tìm được $y=0$. Vậy sao không để đơn giản hơn, ta xét $y=0$ ngay từ đầu. Phương trình có dạng $x(x+12)=y^2$, xét hai khả năng:

- Nếu $y=0$ thì $x=0$ hoặc $x=-12$.
- Nếu $y \neq 0$ thì $x+6+y > x+6-y$, áp dụng hai nhận xét trên ta chỉ có hai trường hợp: $\begin{cases} x+y+6=-2 \\ x-y+6=-18 \end{cases}$ và $\begin{cases} x+y+6=18 \\ x-y+6=2 \end{cases}$.

■

Bài toán 4.2. *Tìm nghiệm nguyên dương của phương trình*

$$3^x+4^y=5^z$$

Bài toán 4.2 rõ ràng đã được nâng cao lên rõ rệt, nhưng lời giải của bài toán này là sử dụng phương pháp xét số dư đã học. Sau đây là lời giải rất đẹp của khanh3570883 hiện là Điều hành viên THPT của VMF:
Lời giải. Xét theo module 3 ta có:

$$5^z \equiv (-1)^z \pmod 3 \Rightarrow 4^y \equiv (-1)^z \pmod 3 \Rightarrow z=2h\,(h\in\mathbb{N})$$
$$\Rightarrow (5^h-2^y)(5^h+2^y)=3^x$$

Do 5^h-2^y và 5^h+2^y không đồng thời chia hết cho 3 nên $5^h+2^y=3^x$ và $5^h-2^y=1$.
Ta có $5^h+2^y \equiv (-1)^h+(-1)^y=0 \pmod 3$ và $5^h-2^y \equiv (-1)^h-(-1)^y=1 \pmod 3 \Rightarrow h$ lẻ và y chẵn.
Nếu $y>2$ thì $5^h+2^y \equiv 1 \pmod 4 \Rightarrow 3^x \equiv 1 \pmod 4 \Rightarrow 3^x \equiv 1 \pmod 8$.
Mặt khác $5 \equiv 5^h+2^y \pmod 8 \Rightarrow 5 \equiv 3^x \pmod 8 \Rightarrow 5 \equiv 1 \pmod 8$: vô lý.
Do đó $y=2$. Suy ra $x=y=z=2$. ■

Phương pháp này thường hay sử dụng cho các phương trình có ẩn ở số mũ và các phương trình có nghiệm nhỏ.

4.2.4 Sử dụng Δ của phương trình bậc 2

Nhận xét. Viết phương trình dưới dạng phương trình bậc hai đối với một ẩn, dùng điều kiện. $\Delta \geq 0$ hoặc Δ là số chính phương. Ta sẽ tùy trường hợp để chọn một trong hai cách xét Δ vào việc giải toán.

Ví dụ 4.22. *Giải phương trình nghiệm nguyên*

$$3x^2+(3y-1)x+3y^2-8y=0 \qquad (4.27)$$

4.2.3 Chỉ ra nghiệm

Nhận xét. Phương pháp này dành cho những bài toán giải phương trình nghiệm nguyên khi mà ta đã tìm được chính xác nghiệm nguyên và muốn chứng minh phương trình chỉ có duy nhất các nghiệm nguyên đó mà thôi.

Ví dụ 4.21. *Tìm nghiệm nguyên dương của phương trình*

$$2^x + 3^x = 5^x \tag{4.26}$$

Lời giải. Chia 2 vế của phương trình (4.26) cho số dương 5^x, ta được:

$$(4.26) \Leftrightarrow \left(\frac{2}{5}\right)^x + \left(\frac{3}{5}\right)^x = 1$$

Với $x = 1$ thì ta được $\frac{2}{5} + \frac{3}{5} = 1$:đúng nên $x = 1$ là 1 nghiệm của (4.26).
Với $x > 1$ thì

$$\left(\frac{2}{5}\right)^x + \left(\frac{3}{5}\right)^x > \frac{2}{5} + \frac{3}{5} = 1$$

Do đó mọi giá trị $x > 1$ đều không là nghiệm của (4.26). Vậy nghiệm nguyên dương của (4.26) là $x = 1$. ■

Nhận xét. Ở ví dụ trên, ta dễ nhận thấy $x = 1$ là nghiệm duy nhất của phương trình nên chỉ cần chứng minh với $x > 1$ thì phương trình vô nghiệm. Ngoài ra, từ bài toán trên ta có thể mở rộng thành hai bài toán mới:

Bài toán 4.1. *Tìm nghiệm nguyên dương của phương trình*

$$(\sqrt{3})^x + (\sqrt{4})^x = (\sqrt{5})^x$$

Bằng cách giải tương tự ta cũng tìm được nghiệm duy nhất của phương trình trên là $x = 4$.

Phương trình đã cho có 6 nghiệm nguyên

$$(x; y) = (-16; 8), (0; 0), (-12; 0), (-16; 8), (4; 8), (4; -8)$$

Nhận xét. Như vậy bài toán ngắn gọn, chính xác nhờ linh hoạt trong việc xét tính chẵn lẻ, giới hạn hai số để giảm số trường hợp cần xét. Ngoài các cách đánh giá trên ta còn có thể áp dụng xét số dư từng vế để đánh giá (đây cũng là một phương pháp giải phương trình nghiệm nguyên).

Bài tập đề nghị

Bài 1. Thử biến đổi các bài toán giải phương trình nghiệm nguyên ở phương pháp Biểu thị một ẩn theo ẩn còn lại bằng phương pháp đưa về ước số.

Bài 2. Tìm độ dài cạnh một tam giác vuông sao cho tích hai cạnh huyền gấp ba lần chu vi tam giác đó.

Bài 3. Giải phương trình nghiệm nguyên $x - y + 2xy = 6$

Bài 4. Giải phương trình nghiệm nguyên $2x + 5y + 2xy = 8$

Bài 5. (Thi HSG lớp 9 tỉnh Quảng Ngãi năm 2011-2012) Giải phương trình nghiệm nguyên $6x + 5y + 18 = 2xy$

Bài 6. Tìm nghiệm nguyên $(xy - 7)^2 = x^2 + y^2$

Bài 7. Tìm $x, y \in \mathbb{Z}$ thỏa mãn $2x^2 - 2xy = 5x - y - 19$.

Bài 8. Tìm nghiệm nguyên của phương trình $x^2+6xy+8y^2+3x+6y = 2$.

Bài 9. Tìm nghiệm nguyên dương của phương trình $x^3 - y^3 = xy + 61$

Bài 10. Tìm nghiệm nguyên của phương trình $4x^2y^2 = 22 + x(1 + x) + y(1 + y)$

Bài 11. Giải phương trình nghiệm nguyên $x(x + 1)(x + 7)(x + 8) = y^2$.

BÀI 12. Tìm nghiệm nguyên dương của phương trình $6x^3 - xy(11x + 3y) + 2y^3 = 6$ (Tạp chí TTT2 số 106).

BÀI 13. Tìm nghiệm nguyên dương của phương trình $x(x+2y)^3 - y(y+2x)^3 = 27$ (tạp chí THTT số 398).

BÀI 14. Tìm nghiệm nguyên của phương trình $\sqrt{9x^2 + 16x + 96} = 3x - 16y - 24$.

BÀI 15. Tìm nghiệm nguyên dương của phương trình

$$2 + \sqrt{x + \frac{1}{2} + \sqrt{x + \frac{1}{4}}} = y$$

.

BÀI 16. Tìm số nguyên x để $x^2 - 4x - 52$ là số chính phương.

BÀI 17. Giải phương trình nghiệm nguyên $x^2 + 2y^2 + 3xy - 2x - y = 6$.

BÀI 18. Giải phương trình nghiệm nguyên $x^2 + 3xy - y^2 + 2x - 3y = 5$.

BÀI 19. Giải phương trình nghiệm nguyên $2x^2 + 3y^2 + xy - 3x - 3 = y$.

BÀI 20. (Tuyển sinh vào lớp 10 THPT chuyên trường KHTN Hà Nội năm học 2012-2013) Tìm tất cả các cặp số nguyên x, y thỏa mãn đẳng thức $(x + y + 1)(xy + x + y) = 5 + 2(x + y)$.

BÀI 21. Giải phương trình nghiệm nguyên $x^4 - 2y^4 - x^2y^2 - 4x^2 - 7y^2 - 5 = 0$.

(Thi HSG lớp 9 tỉnh Hưng Yên năm 2011-2012)

BÀI 22. *(Romanian 1999)* Chứng minh rằng phương trình sau không có nghiệm nguyên

$$x^5 - x^4y - 13x^3y^2 + 13x^2y^3 + 36xy^4 - 36y^5 = 1937$$

BÀI 3. (Đề thi tuyển sinh vào đại học Vinh) Tìm nghiệm nguyên của phương trình

$$(x^2 + 1)(y^2 + 4)(z^2 + 9) = 48xyz$$

BÀI 4. Giải phương trình nghiệm nguyên

$$\frac{4}{\sqrt{x-2}} + \frac{1}{\sqrt{y-1}} + \frac{25}{\sqrt{z-5}} = 16 - \sqrt{x-2} - \sqrt{y-1} - \sqrt{z-5}$$

BÀI 5. Tìm nghiệm nguyên của hệ phương trình $\begin{cases} x^2 + z^2 = 9 \\ y^2 + t^2 = 16 \\ xt + yz = 12 \end{cases}$

BÀI 6. Tìm nghiệm nguyên dương của phương trình $x^3 + y^3 - 6xy + 8 = 0$.

BÀI 7. Tìm nghiệm nguyên của hệ phương trình $\begin{cases} xy + yz + zx = 12 \\ x^4 + y^4 + z^4 = 48 \end{cases}$.

BÀI 8. Cho phương trình $x^3 + y^3 + z^3 = nxyz$.

a, Chứng minh rằng khi $m = 1$ và $m = 2$ thì phương trình không có nghiệm nguyên dương.

b, Giải phương trình nghiệm nguyên dương khi $m = 3$.

BÀI 9. Giải phương trình nghiệm nguyên dương $(x^3 + y^3) + 4(x^2 + y^2) + 4(x + y) = 16xy$.

BÀI 10. Giải phương trình nghiệm nguyên dương

$$3(x^4 + y^4 + x^2 + y^2 + 2) = 2(x^2 - x + 1)(y^2 - y + 1)$$

BÀI 11. Giải phương trình nghiệm nguyên dương với x, y, z là các số đôi một khác nhau

$$x^3 + y^3 + z^3 = (x + y + z)^2$$

Áp dụng Bất đẳng thức AM-GM cho bộ ba số dương $(x^2)^3, z^3$ và $(y^2+5)^3$ ta được:

$$(x^2)^3+(y^2+5)^3+z^3 \geq 3\sqrt[3]{(x^2)^3.(y^2+5)^3.z^3} = 3x^2z(y^2+5) = VP(4.25)$$

Dấu bằng chỉ xảy ra khi $x^2 = y^2+5 = 5$.
Mặt khác ta có:

$$x^2 = y^2+5 \Leftrightarrow (x-y)(x+y) = 5$$

Đây là một dạng phương trình nghiệm nguyên quen thuộc ta đã học, tôi tin chắc các bạn đều có thể dễ dàng giải phương trình trên, và từ $x;y$ trên ta có thể tìm được z một cách dễ dàng.
Đáp số: Nghiệm nguyên của phương trình (4.25) là $(x;y;z) = (3;2;9)$. ■

Ví dụ 4.20. *Tìm nghiệm nguyên của phương trình*

$$(x+y+z)^2 = 3(x^2+y^2+1)$$

Lời giải. Áp dụng bất đẳng thức Bunyakovsky cho hai bộ số $(x,y,1)$ và $(1,1,1)$ ta có

$$(x+y+1)^2 \leq (1^2+1^2+1^2)(x^2+y^2+1) = 3(x^2+y^2+1)$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y=1$.
Vậy phương trình có nghiệm nguyên là $(x,y) = (1,1)$. ■

Nhận xét. Các bài Toán về phương trình nghiệm nguyên mà giải bằng cách sử dụng Bất đẳng thức rất ít dung vì rất dễ bị lộ dụng ý nếu người ra đề không khéo léo. Tuy nhiên, ta vẫn phải thành thạo phương pháp này không được xem thường nó để tránh những sai lầm đáng tiếc không thể sửa được.

Bài tập đề nghị

BÀI 1. Tìm nghiệm nguyên dương x,y thỏa mãn phương trình $(x^2+1)(x^2+y^2) = 4x^2y$

BÀI 2. Tìm nghiệm nguyên của phương trình $\dfrac{xy}{z}+\dfrac{yz}{x}+\dfrac{zx}{y} = 3$.

4.1.3 Biểu thị một ẩn theo ẩn còn lại rồi sử dụng tính chia hết

Ví dụ 4.10. *Tìm nghiệm nguyên của phương trình*

$$2x - xy + 3 = 0 \tag{4.17}$$

Lời giải. *Nhận xét.* Ở phương trình này ta không thể áp dụng các cách đã biết, vậy ta phải làm sao? Chú ý hơn một xíu nữa ta thấy có thể biểu diễn y theo x được rồi vận dụng kiến thức tìm giá trị nguyên ở lớp 8 tìm nghiệm nguyên của phương trình, thử làm theo ý tưởng đó xem sao.

$$(4.17) \Leftrightarrow xy = 2x+3$$

Nếu $x=0$ thì phương trình (4.17) đã cho vô nghiệm nguyên y.
Nếu $x \neq 0$ thì

$$(4.17) \Leftrightarrow y = \frac{2x+3}{x} = 2+\frac{3}{x}$$

Như vậy muốn y nguyên thì ta cần $\dfrac{3}{x}$ nguyên hay nói cách khác x là ước của 3. Với mỗi giá trị nguyên x ta tìm được một giá trị y nguyên. Từ đó, ta có bộ nghiệm của (4.17) là

$$(x;y) = (-3;1);(-1;-1);(1;5);(3;3)$$

Ví dụ 4.11 (Thi HSG lớp 9 Quảng Ngãi năm 2011-2012). *Tìm các số nguyên dương x,y sao cho*

$$6x+5y+18 = 2xy \tag{4.18}$$

Nhận xét. Hướng phân tích và định hướng lời giải. Đã xác định được phương pháp của dạng này thì bây giờ ta sẽ biểu diễn ẩn x theo y. Không khó để viết thành $x = \dfrac{-5y-18}{6-2y}$. Ta dường như nhân thấy biểu thức này rất khó phân tích như biểu thức ở ví dụ đầu. Tuy nhiên, nếu để ý kĩ sẽ thấy bên mẫu là $2y$ và tử là $5y$, do đó ta mạnh dạn nhân 2 vào tử để xuất hiện $2y$ giống như ở mẫu.

Lời giải. Ta có

$$\begin{aligned}(4.18) \Leftrightarrow x &= \frac{-5y-18}{6-2y}\\ \Leftrightarrow 2x &= \frac{-10y-36}{6-2y}\\ \Leftrightarrow 2x &= \frac{-66+5(6-2y)}{6-2y} = \frac{-66}{6-2y}+5\\ \Leftrightarrow 2x &= \frac{-33}{3-y}+5\end{aligned}$$

Như vậy muốn x là số nguyên dương thì $3-y$ là phải là ước của -33. Hay $3-y \in \{\pm1; \pm3; \pm11, \pm33\}$. Lại để ý rằng vì $y \geq 1$ nên $3-y \leq 2$. Do đó chỉ có thể $3-y \in \{\pm1; -3; -11; -33\}$. Ta có bảng sau:

$3-y$	1	-1	-3	-11	-33
y	2	4	6	14	36
x	-14	19	8	4	3

Thử lại thấy các cặp $(x;y)$ nguyên dương thỏa mãn (4.18) là $(x;y) = (19;4), (8;6), (4;14), (3;36)$. ∎

Nhận xét. Bài này ta cũng có thể sử dụng phương pháp đưa về phương trình ước số. Cũng xin chú ý với bạn rằng ở lời giải trên thì ta đã nhân 2 ở x để biến đổi, do đó phải có một bước thử lại coi giá trị x, y tìm được có thỏa mãn (4.18) hay không rồi mới có thể kết luận.

Bài tập đề nghị

BÀI 1. Giải phương trình nghiệm nguyên $x^2 - xy = 6x - 5y - 8$.

BÀI 2. Giải phương trình nghiệm nguyên $x^2 + x + 1 = 2xy + y$.

BÀI 3. Giải phương trình nghiệm nguyên $x^3 - x^2y + 3x - 2y - 5 = 0$.

BÀI 4. *(Vào 10 chuyên THPT ĐHKHTN Hà Nội năm 2001-2002)* Tìm giá trị x, y nguyên thỏa mãn đẳng thức $(y-2)x^2 + 1 = y^2$.

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$.

2. *Bất đẳng thức Bunhiacopxki (hay còn được gọi là bất đẳng thức Cauchy - Bunyakovsky - Schwarz):* Với hai bộ số thực bất kì $(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ và $(b_1, b_2, \cdots, b_n)$, ta có

$$\left(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2\right)\left(b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2\right) \geq \\ \geq \left(a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n\right)^2.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi tồn tại số thực k sao cho $a_i = kb_i$ với mọi $i = 1, 2, \cdots, n$.

3. *Bất đẳng thức Trebusep (hay còn viết là bất đẳng thức Chebyshev):* Cho dãy hữu hạn các số thực được sắp theo thứ tự $a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n$ và $b_1 \leq b_2 \leq \cdots \leq b_n$. Khi đó ta có:

$$n(a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n) \geq (a_1 + a_2 + \cdots + a_n)(b_1 + b_2 + \cdots + b_n)$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\left[\begin{array}{l} a_1 = a_2 = \cdots = a_n \\ b_1 = b_2 = \cdots = b_n \end{array}\right.$.

Bây giờ ta sẽ cùng xem xét một số ví dụ sau:

Ví dụ 4.19. *Giải phương trình nghiệm nguyên dương sau:*

$$x^6 + z^3 - 15x^2z = 3x^2y^2z - (y^2+5)^3 \tag{4.25}$$

Lời giải. *Nhận xét.* Ở phương trình này khi mới nhìn vào hẳn đa số các bạn sẽ có phần rối, không xác định được phương pháp làm, không vận dụng được các phương pháp đã học. Tuy nhiên nếu để ý kĩ một xí thì ta thấy $x^6 = (x^2)^3$ điều này có gì đặc biệt? Ta thấy $(x^2)^3, z^3$ và $(y^2+5)^3$ đều có cùng bậc ba và đề bài đã cho nguyên dương nên ta nghĩ ngay đến một Bất đẳng thức kinh điển: Bất đẳng thức Cauchy hay còn gọi là bất đẳng thức AM-GM.
Ta giải như sau

$$(4.25) \Leftrightarrow (x^2)^3 + (y^2+5)^3 + z^3 = 3x^2z(y^2+5)$$

tích luôn như bài trước. Nếu bạn để ý rằng nếu không phân chia thành hai trường hợp nhưu trên thì phương trình (4.24) sẽ thành $2y+1 \geq y^2z$, rất khó để tiếp tục phân tích ra nghiệm. Do đó việc xét nhưu trên là hợp lí.

Bài tập đề nghị

Bài 1. Giải phương trình nghiệm nguyên dương $2(x+y+z)+9 = 3xyz$.

Bài 2. Giải phương trình nghiệm nguyên dương $xyz = 3(x+y+z)$.

Bài 3. Giải phương trình nghiệm nguyên dương $5(x+y+z+t)+10 = 2xyzt$

Bài 4. Giải phương trình nghiệm nguyên dương $x! + y! = (x+y)!$ (Kí hiệu $x!$ là tích các số tự nhiên liên tiếp từ 1 đến x).

Bài 5. Tìm nghiệm nguyên dương của phương trình $x^3+7y = y^3+7x$.

Bài 6. Tìm nghiệm nguyên dương của phương trình $x_1+x_2+\cdots+x_{12} = x_1x_2\cdots x_{12}$.

Bài 7. Tìm tất cả các nghiệm nguyên dương của phương trình $\dfrac{x}{y^2z^2} + \dfrac{y}{z^2x^2} + \dfrac{z}{x^2y^2} = t$.

Bài 8. Tìm nghiệm nguyên dương của phương trình $x! + y! + z! = u!$.

4.2.2 Sử dụng bất đẳng thức

Nhận xét. Để giải phương trình này, ta thường sử dụng các bất đẳng thức quen thuộc để đánh giá một vế của phương trình không nhỏ hơn (hoặc không lớn hơn) vế còn lại. Muốn cho hai vế bằng nhau thì bất đẳng thức phải trở thành đẳng thức.
Cụ thể, ta có một số bất đẳng thức cơ bản thường dùng:

1. *Bất đẳng thức Cauchy (hay còn gọi là bất đẳng thức AM-GM):* Nếu $a_1, a_2, \cdots, a_n$ là các số thực không âm thì
$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}$$

Bài 5. *(Vào 10 chuyên THPT ĐHKHTN Hà Nội năm 2000-2001)* Tìm cặp số nguyên (x, y) thỏa mãn đẳng thức $y(x-1) = x^2+2$.

Bài 6. Tìm số nhỏ nhất trong các số nguyên dương là bội của 2007 và có 4 chữ số cuối cùng là 2008.

Bài 7. Tìm nghiệm nguyên của phương trình $5x - 3y = 2xy - 11$.

4.1.4 Xét số dư từng vế

Cơ sở phương pháp. Đọc ngay tiêu đề phương pháp thì chắc bạn sẽ hiểu ngay phương pháp này nói đến việc xét số dư ở từng vế cho cùng một số. Vậy, tại sao lại phải xét và xét như vậy có lợi ích gì trong "công cuộc" giải toán? Hãy cùng tìm hiểu qua ví dụ đầu sau:

Ví dụ 4.12. *Tìm nghiệm nguyên của phương trình*
$$x^2 + y^2 = 2011 \tag{4.19}$$

Lời giải. Ta có $x^2; y^2$ chia 4 có thể dư 0 hoặc 1 nên tổng chúng chia 4 chỉ có thể dư 0; 1 hoặc 2. Mặt khác 2011 chia 4 dưa 3 nên phương trình (4.19) vô nghiệm nguyên. ■

Nhận xét. Qua ví dụ đầu này thì ta đã thấy rõ số dư khi chia cho 4 của hai số khác nhau thì phương trình vô nghiệm. Do đó ta lại càng hiểu thêm mục đích của phương pháp này. Bật mí thêm tí nữa thì phương pháp này chủ yếu dùng cho các phương trình không có nghiệm nguyên. Cho nên, nếu bạn bắt gặp một phương trình bất kì mà bạn không thể tìm ra được nghiệm cho phương trình đó, thì hãy nghĩ đến phương pháp này đầu tiên. Còn bây giờ ta tiếp tục đến với ví dụ sau:

Ví dụ 4.13 (Balkan MO 1998). *Tìm nghiệm nguyên của phương trình*
$$x^2 = y^5 - 4 \tag{4.20}$$

Lời giải. Ta có: $x^2 \equiv 0; 1; 3; 4; 5; 9 \pmod{11}$. Trong khi đó $y^5 - 4 \equiv 6; 7; 8 \pmod{11}$: vô lý. Vậy phương trình (4.20) vô nghiệm nguyên. ■

Nhận xét. Một câu hỏi nữa lại lóe lên trong đầu ta: Làm thế nào lại có thể tìm được con số 11 để mà xét đồng dư được nhỉ? Đáp án của câu hỏi này cũng chính là cái cốt lõi để bạn vận dụng phương pháp này, và đó cũng là những kinh nghiệm sau:

1. Đối với phương trình nghiệm nguyên có sự tham gia của các bình phương thì ta thường xét đồng dư với $3, 4, 5, 8$. Cụ thể là:
$$\begin{aligned} a^2 &\equiv 0,1 \pmod 3\\ a^2 &\equiv 0,1 \pmod 4\\ a^2 &\equiv 0,1,4 \pmod 5\\ a^2 &\equiv 0,1,4 \pmod 8\end{aligned}$$

2. Đối với các phương trình nghiệm nguyên có sự tham gia của các số lập phương thì ta thường xét đồng dư với 9, vì $x^3 \equiv 0;1;8 \pmod 9$ và đồng dư với 7, vì $x^3 \equiv 0,1,6 \pmod 7$.

3. Đối với phương trình nghiệm nguyên có sự tham gia của các lũy thừa bậc 4 thì ta thường xét đồng dư với 8, như: $z^4 \equiv 0,1 \pmod 8$.

4. Một vấn đề cuối cùng là định lí Fermat: Đối với phương trình nghiệm nguyên có sự tham gia của các lũy thừa có số mũ là một số nguyên tố hay là một số mà khi cộng 1 vào số đó ta được một số nguyên tố thì ta thường sử dụng định lí nhỏ Fermat để xét đồng dư.

Trên đây là một số kinh nghiệm bản thân, còn nếu các bạn muốn vận dụng được phương pháp xét số dư này, yêu cầu hãy ghi nhớ kinh nghiệm trên và tìm cách chứng minh nó. Ngoài ra, nếu bạn muốn mở rộng tầm hiểu biết hơn nữa, bạn có thể tìm các đồng dư với lũy thừa khác nhau (chẳng hạn qua ví dụ 2 ta đã rút ra được modun 11 cho lũy thừa bậc hai, bậc năm). Còn bây giờ, hãy thử xem kinh nghiệm trên có hiệu quả không nhé!

Ví dụ 4.14 (Bài toán trong tuần - diendantoanhoc.net). *Chứng minh rằng phương trình sau không có nghiệm nguyên*
$$x^{10} + y^{10} = z^{10} + 199$$

Lời giải (Lời giải sai). Không mất tính tổng quát, giả sử $1 \le x \le y \le z$. Khi đó $x+y+1 \le 3z$ hay $xyz \le 3z$, suy ra $xy \le 3$. Mà $z \ge y \ge x \ge 1$ nên $x = y = z = 1$.

Nhận xét. Cái lỗi sai ở lời giải này là do x, y, z không bình đẳng, nên không thể sắp thứ tự các ẩn như trên. Sau đây là lời giải đúng:
Lời giải. Không mất tính tổng quát, giả sử $1 \le x \le y$. Ta xét trường hợp:

- Nếu $x = y$ thì
$$\begin{aligned}(4.24) &\Leftrightarrow 2y+1 = y^2z\\ &\Leftrightarrow y(z-2) = 1\\ &\Leftrightarrow \begin{cases} y = 1\\ yz-2 = 1\end{cases}\\ &\Leftrightarrow \begin{cases} y=1\\ z=3\end{cases}\end{aligned}$$

- Nếu $x < y$ thì từ (4.24) suy ra $2y + 1 > xyz. \Rightarrow 2y \ge xyz \Rightarrow xz \le 2 \Rightarrow xz \in \{1; 2\}$.
  * Với $xz = 1 \Rightarrow x = z = 1$, thay vào (4.24) suy ra $y + 2 = y$ (vô nghiệm).
  * Với $xz = 2 \Rightarrow \begin{cases} x=1\\ z=2\end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x=2\\ z=1\end{cases}$. Từ đây ta tìm được nghiệm $x = 1, y = 2, z = 2$ hoặc $x = 1, y = 3, z = 1$.

Vậy phương trình có nghiệm nguyên dương là $(1; 1; 3)$, $(1; 2; 2)$, $(2; 1; 2)$, $(2; 3; 1)$, $(3; 2; 1)$. ■

Nhận xét. Bây giờ bạn đã hiểu vì cách sắp xếp các ẩn như thế nào. Nhưng tại sao ở bài này lại xét $x = y$ và $x < y$ mà lại không đi vào phân

4.2 Sử dụng bất đẳng thức

4.2.1 Sắp thứ tự các ẩn

Ví dụ 4.17. *Giải phương trình nghiệm nguyên dương sau*

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=1 \tag{4.23}$$

Lời giải. Không mất tính tổng quát, ta có thể giả sử

$$1\le x\le y\le z \Rightarrow \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=1\le \frac{3}{x}\Rightarrow x\le 3$$

- Với $x=1$ thì (4.23) không có nghiệm nguyên dương.
- Với $x=2$ thì $\frac{1}{2}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=1\Leftrightarrow \frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{2}\le\frac{2}{y}\Rightarrow y\le 4$ Mặt khác, $y\ge x=2\Rightarrow y\in\{2;3;4\}$. Ta thử lần lượt các giá trị của y
  - Với $y=2$ thì (4.23) vô nghiệm nguyên.
  - Với $y=3$ thì $z=6$.
  - Với $y=4$ thì $z=4$.
- Với $x=3$, ta có $\frac{1}{3}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=1\Leftrightarrow\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{2}{3}\le\frac{2}{y}\Rightarrow y\le 3$ Mặt khác, do $y\ge x=3\Rightarrow y=3\Rightarrow z=3$

Vậy nghiệm nguyên $(x;y;z)$ của (4.23) là hoán vị của các bộ $(2;3;6)$; $(2;4;4)$; $(3;3;3)$. ∎

Nhận xét. Phương pháp này được sử dụng ở chỗ sắp thứ tự các ẩn $1\le x\le y\le z$ rồi giới hạn nghiệm để giải.
Ta chỉ sử dụng phương pháp sắp thứ tự các ẩn khi vai trò các ẩn là bình đẳng với nhau. Dó đó khi vận dụng phương pháp này các bạn cần chú ý để tránh nhầm lẫn. Cụ thể, ta sẽ đến với ví dụ sau:

Ví dụ 4.18. *Giải phương trình nghiệm nguyên dương*

$$x+y+1=xyz \tag{4.24}$$

Nhận xét. Thường thường các bài toán khi đặt câu hỏi phương trình có nghiệm hay không thì thường có câu trả lời là **không**. Do đó để chứng minh phương trình trên không có nghiệm, thì ta sẽ tìm một con số sao cho khi chia VT và VP cho con số này thì được hai số dư khác nhau.

Như vậy, công việc bây giờ của ta là tìm con số đó. Để ý đến số mũ 10 thì sẽ khiến ta liên tưởng con số 11 là số nguyên tố. Như vậy lời giải của ta sẽ áp dụng định lý Fermat nhỏ cho số 11 để chứng minh hai vế phương trình chia cho 11 không cùng số dư.

Lời giải. Áp dụng định lý Fermat nhỏ thì $\begin{cases} x^{10}\equiv 0,1 \pmod{11}\\ y^{10}\equiv 0,1 \pmod{11}\\ z^{10}\equiv 0,1 \pmod{11}\end{cases}$.

Do đó $x^{10}+y^{10}-z^{10}\equiv 0,1,2,10 \pmod{11}$ mà $199\equiv 8 \pmod{11}$ nên phương trình vô nghiệm nguyên. ∎

Ví dụ 4.15 (Đề thi chọn HSG toán quốc gia năm 2003 - Bảng B). *Hệ phương trình sau có tồn tại nghiệm nguyên hay không:*

$$x^2+y^2=(x+1)^2+u^2=(x+2)^2+v^2=(x+3)^2+t^2 \tag{4.21}$$

Nhận xét. Ta dự đoán phương trình trên cũng sẽ vô nghiệm. Do đó cần tìm một số và khi chia cả 5 vế được các số dư khác nhau. Để ý bài toán này có bình phương nên ta nghĩ tới việc sử dụng các tính chất như: $a^2\equiv 0,1 \pmod 3$, $a^2\equiv 0,1 \pmod 4$, $a^2\equiv 0,1,4 \pmod 5$, $a^2\equiv 0,1,4 \pmod 8$. Ở bài toán này, ta sẽ chọn 8. Bây giờ chỉ cần xét tính dư khi chia cho 8.

Lời giải. Giả sử phương trình (4.21) có nghiệm nguyên (x_0,y_0,u_0,v_0,t_0), tức là:

$$x_0^2+y_0^2=(x_0+1)^2+u_0^2=(x_0+2)^2+v_0^2=(x_0+3)^2+t_0^2 \tag{4.22}$$

Với $a\in\mathbb{Z}$ thì $a^2\equiv 0,1,4 \pmod 8$. Ta xét các khả năng sau:

1. Nếu $x_0 \equiv 0 \pmod 4$ thì $x_0^2 + y_0^2 \equiv 0, 1, 4 \pmod 8$. Và

$$\begin{aligned} x_0+1 \equiv 1 \pmod 8 &\Rightarrow (x_0+1)^2 \equiv 1 \pmod 8 \\ &\Rightarrow (x_0+1)^2 + u_0^2 \equiv 1,2,5 \pmod 8 \\ x_0+2 \equiv 2 \pmod 4 &\Rightarrow (x_0+2)^2 \equiv 4 \pmod 8 \\ &\Rightarrow (x_0+2)^2 + v_0^2 \equiv 0,4,5 \pmod 8 \\ x_0+3 \equiv 3 \pmod 4 &\Rightarrow (x_0+3)^2 \equiv 1 \pmod 8 \\ &\Rightarrow (x_0+3)^2 + t_0^2 \equiv 1,2,5 \pmod 8 \end{aligned}$$

   Nhận thấy $\{0,1,4\} \cap \{1,2,5\} \cap \{0,4,5\} \cap \{1,2,5\} = 0$ nên do đó phương trình không có nghiệm nguyên với $x \equiv 0 \pmod 4$.

2. Tương tự với $x_0 \equiv 1 \pmod 4, x_0 \equiv 2 \pmod 4$ và $x_0 \equiv 3 \pmod 4$ ta cũng thực hiện tương tự và cũng cho kết quả phương trình không có nghiệm nguyên.

Vậy phương trình (4.21) đã cho không có nghiệm nguyên. ■

Nhận xét. Ví dụ 4 ta có thể tổng quát lên:

Ví dụ 4.16. *Tìm số nguyên dương n lớn nhất sao cho hệ phương trình*

$$(x+1)^2 + y_1^2 = (x+2)^2 + y_2^2 = \ldots = (x+n)^2 + y_n^2$$

có nghiệm nguyên. △

Đây cũng chính là đề thi chọn đội tuyển HSG quốc gia toán năm 2003 - Bảng A. Lời giải xin giành cho bạn đọc. Cũng xin nói thêm một thừa nhận rằng, ở phương pháp xét số dư từng vế này, chúng ta cứ tưởng chừng như đơn giản, nhưng thực chất không phải thế. Dẫn chứng là các ví dụ ở trên, đều là các bài toán hay và khó lấy từ khác cuộc thi trong nước và ngoài nước.

Bài tập đề nghị

Bài 1. Cho đa thức $f(x)$ có các hệ số nguyên. Biết rằng $f(1).f(2)$ là số lẻ. Chứng minh rằng phương trình $f(0) = 0$ không có nghiệm nghiệm nguyên.

Bài 2. Tồn tại hay không nghiệm nguyên của phương trình $x^{12} + y^{12} + z^{12} = 2\left(37^{2012} + 2014^{1995}\right)$.

Bài 3. Giải phương trình nghiệm nguyên $31^{2x} + 12^{2x} + 1997^{2x} = y^2$.

Bài 4. Giải phương trình nghiệm nguyên dương $7^z = 2^x \cdot 3^y - 1$

Bài 5. Giải phương trình nghiệm nguyên dương $2^x \cdot 3^y = 1 + 5^z$

Bài 6. Giải phương trình nghiệm tự nhiên $19^x + 5^y + 1890 = 1975^{4^{30}} + 1993$.

Bài 7. Giải phương trình nghiệm nguyên $x^3 + y^3 + z^3 = 1012$

Bài 8. (Tuyển sinh vào lớp 10 chuyên Trần Phú, Hải Phòng năm học 2012-2013) $x^4 + y^4 + z^4 = 2012$

Bài 9. $|x-y| + |y-z| + |z-x| = \dfrac{10^n - 1}{9}$ với mọi $n \in \mathbb{N}$

Bài 10. Tìm nghiệm nguyên của phương trình $(2^x+1)(2^x+2)(2^x+3)(2^x+4) - 5^y = 11879$

Bài 11. Tìm nghiệm nguyên của phương trình $x^2 + (x+1)^2 + (x+2)^2 = y^2$.

Bài 12. *(Tuyển sinh vào THPT chuyên ĐHKHTN Hà Nội năm 2011-2012)* Chứng minh rằng không tồn tại bộ ba số nguyên $(x; y; z)$ thỏa mãn $x^4 + y^4 = 7z^4 + 5$.

Bài 13. Giải phương trình nghiệm nguyên $x_1^4 + x_2^4 + \cdots = x_{13}^4 + 20122015$.

Bài 14. Cho p là số nguyên tố lẻ. Chứng minh rằng phương trình $x^p + y^p = p\left[(p-1)!\right]^p$ không có nghiệm nguyên

Bài 15. Tìm nghiệm nguyên của phương trình $x^{2012} - y^{2010} = 7$.

Bài 16. Chứng minh rằng không tồn tại số nguyên x, y thỏa mãn $x^5 + y^5 + 1 = (x+2)^5 + (y-3)^5$.