

Một số cách chứng minh BẤT ĐẲNG THỨC NESBITT

1. Bất đẳng thức Nesbitt: Nếu a, b, c là các số dương thì ta có bất đẳng thức

$$P = \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}$$

2. Một số cách chứng minh.

Cách 1. Bất đẳng thức đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} & \left(\frac{a}{b+c} + 1 \right) + \left(\frac{b}{c+a} + 1 \right) + \left(\frac{c}{a+b} + 1 \right) \geq \frac{9}{2} \\ \Leftrightarrow & [(a+b) + (b+c) + (c+a)] \left(\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} \right) \geq 9 \end{aligned}$$

Bất đẳng thức này luôn đúng vì theo **AM – GM** :

$$(a+b) + (b+c) + (c+a) \geq 3\sqrt[3]{(a+b)(b+c)(c+a)}$$

và

$$\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} \geq \frac{3}{\sqrt[3]{(a+b)(b+c)(c+a)}}.$$

Nhân theo vế hai bất đẳng thức này ta có điều phải chứng minh. $\square$

Cách 2. Viết lại bất đẳng thức đã cho dưới dạng

$$\begin{aligned} & 2a(a+b)(c+a) + 2b(b+c)(a+b) + 2c(c+a)(b+c) \geq 3(a+b)(b+c)(c+a) \\ \Leftrightarrow & 2(a^3 + b^3 + c^3) \geq ab(a+b) + bc(b+c) + ca(c+a) \\ \Leftrightarrow & (a+b)(a-b)^2 + (b+c)(b-c)^2 + (c+a)(c-a)^2 \geq 0 \end{aligned}$$

Suy ra điều phải chứng minh. $\square$

Cách 3. Đặt $x = b+c, y = c+a, z = a+b$ thì $a = \frac{y+z-x}{2}, b = \frac{z+x-y}{2}, c = \frac{x+y-z}{2}$

Bất đẳng thức trở thành

$$\begin{aligned} & \frac{y+z-x}{2x} + \frac{z+x-y}{2y} + \frac{x+y-z}{2z} \geq \frac{3}{2} \\ \Leftrightarrow & \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \right) + \left(\frac{y}{z} + \frac{z}{y} \right) + \left(\frac{z}{x} + \frac{x}{z} \right) \geq 6 \end{aligned}$$

luôn đúng theo bất đẳng thức **AM – GM**. $\square$

Cách 4. Đặt $Q = \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a} + \frac{a}{a+b}, R = \frac{c}{b+c} + \frac{a}{c+a} + \frac{b}{a+b}$ thì theo **AM – GM** ta có

$$P + Q = \frac{a+b}{b+c} + \frac{b+c}{c+a} + \frac{c+a}{a+b} \geq 3, P + R = \frac{a+c}{b+c} + \frac{b+a}{c+a} + \frac{c+b}{a+b} \geq 3$$

Suy ra $2P + Q + R \geq 6$, mà $Q + R = 3$, nên $P \geq \frac{3}{2}$. $\square$

Cách 5. Sử dụng bất đẳng thức **Cauchy – Schwarz** ta có

$$P = \frac{a^2}{ab+ac} + \frac{b^2}{bc+ba} + \frac{c^2}{ca+cb} \geq \frac{(a+b+c)^2}{2(ab+bc+ca)} \geq \frac{3(ab+bc+ca)}{2(ab+bc+ca)} = \frac{3}{2}$$

Đó là điều phải chứng minh. $\square$

Cách 6. Không mất tính tổng quát giả sử $a \geq b \geq c$, thế thì $\frac{1}{b+c} \geq \frac{1}{c+a} \geq \frac{1}{a+b}$. Áp dụng bất đẳng thức **Chebyshev** cho hai dãy đơn điệu cùng chiều ta có

$$\begin{aligned} & \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{1}{3}(a+b+c) \left(\frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} + \frac{1}{a+b} \right) \\ \Leftrightarrow & \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{1}{3} \left(\frac{a}{b+c} + 1 + \frac{b}{c+a} + 1 + \frac{c}{a+b} + 1 \right) \end{aligned}$$

Hay $P \geq \frac{1}{3}(P+3)$, nghĩa là $P \geq \frac{3}{2}$. $\square$

Cách 7. Áp dụng bất đẳng thức **AM – GM** ta có

$$\frac{a^2}{b+c} + \frac{b+c}{4} \geq a, \frac{b^2}{c+a} + \frac{c+a}{4} \geq b, \frac{c^2}{a+b} + \frac{a+b}{4} \geq c$$

Cộng theo về ba bất đẳng thức cùng chiều trên ta được

$$\begin{aligned} \frac{a^2}{b+c} + a + \frac{b^2}{c+a} + b + \frac{c^2}{a+b} + c &\geq \frac{3}{2}(a+b+c) \\ \Leftrightarrow \frac{a(a+b+c)}{b+c} + \frac{b(a+b+c)}{c+a} + \frac{c(a+b+c)}{a+b} &\geq \frac{3}{2}(a+b+c) \\ \Leftrightarrow \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} &\geq \frac{3}{2}. \quad \square \end{aligned}$$

Cách 8. Không mất tính tổng quát giả sử $a+b+c=3$. Xét hàm $f(x) = \frac{x}{3-x}$ trên khoảng $(0,3)$. Ta

có $f''(x) = \frac{6}{(3-x)^3} > 0$, suy ra $f(x)$ là hàm lồi trên $(0,3)$ nên áp dụng bất đẳng thức **Jensen** ta được

$$P = f(a) + f(b) + f(c) \geq 3f\left(\frac{a+b+c}{3}\right) = 3f(1) = \frac{3}{2}. \quad \square$$

Cách 9. Không mất tính tổng quát giả sử $a+b+c=3$. Ta có

$$\frac{a}{3-a} \geq \frac{1}{2} + \frac{3}{2}(a-1) \quad (1)$$

Thật vậy, $(1) \Leftrightarrow 3(a-1)^2 \geq 0$ luôn đúng với mọi a dương.

Trong (1) thay a lần lượt bởi b và c rồi cộng theo về ta được

$$P = \frac{a}{3-a} + \frac{b}{3-b} + \frac{c}{3-c} \geq \frac{3}{2} + \frac{3}{2}(a+b+c-3) = \frac{3}{2}. \quad \square$$

Cách 10. Không mất tính tổng quát giả sử $a+b+c=3$. Sử dụng bất đẳng thức **AM – GM** ta có

$$\frac{a}{b+c} + \frac{a(b+c)}{4} \geq a, \frac{b}{c+a} + \frac{b(c+a)}{4} \geq b, \frac{c}{a+b} + \frac{c(a+b)}{4} \geq c$$

Cộng theo về ba bất đẳng thức cùng chiều trên ta được

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq a+b+c - \frac{ab+bc+ca}{2} \geq a+b+c - \frac{(a+b+c)^2}{6} = \frac{3}{2}. \quad \square$$

Cách 11. Ta có nhận xét rằng $\frac{a}{b+c} \geq \frac{1}{4} \cdot \frac{8a-b-c}{a+b+c} \quad (2)$

Thật vậy, $(2) \Leftrightarrow (2a-b-c)^2 \geq 0$ luôn đúng. Tương tự ta cũng có

$$\frac{b}{c+a} \geq \frac{1}{4} \cdot \frac{8b-c-a}{a+b+c} \quad \text{và} \quad \frac{c}{a+b} \geq \frac{1}{4} \cdot \frac{8c-a-b}{a+b+c}$$

Suy ra

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{1}{4} \cdot \frac{(8a-b-c) + (8b-c-a) + (8c-a-b)}{a+b+c} = \frac{3}{2}. \quad \square$$

Cách 12. Ta có

$$P - \frac{3}{2} = \frac{(a-b)^2}{2(a+c)(b+c)} + \frac{(b-c)^2}{2(b+a)(c+a)} + \frac{(c-a)^2}{2(c+b)(a+b)} \geq 0. \quad \square$$

Cách 13. Không mất tính tổng quát giả sử $c = \min\{a, b, c\}$, ta có

$$P - \frac{3}{2} = \frac{(a-b)^2}{(a+c)(b+c)} + \frac{a+b-2c}{2(a+b)(b+c)(c+a)}(a-c)(b-c) \geq 0. \quad \square$$

Cách 14. Đặt $f(a, b, c) = \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b}$ và $t = \frac{a+b}{2}$ ta có

$$f(a, b, c) - f(t, t, c) = \frac{(a-b)^2(a+b+c)}{(a+c)(b+c)(a+b+2c)} \geq 0$$

và

$$f(t, t, c) - \frac{3}{2} = \frac{2t}{c+t} + \frac{c}{2t} - \frac{3}{2} = \frac{(c-t)^2}{2t(c+t)} \geq 0$$

Suy ra $f(a, b, c) \geq f(t, t, c) \geq \frac{3}{2}$. $\square$

Cách 15. Đặt $f(a, b, c) = \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b}$ và $t = \sqrt{ab}$. Không mất tính tổng quát, giả sử $c = \min\{a, b, c\}$, ta có $t \geq c$ và

$$\begin{aligned} f(a, b, c) - f(a, b, t) &= \frac{a(t-c)}{(b+c)(b+t)} + \frac{b(t-c)}{(c+a)(t+a)} + \frac{c-t}{a+b} \\ &\geq \frac{t-c}{a+b} \left(\frac{a}{b+t} + \frac{b}{t+a} - 1 \right) = \frac{t-c}{a+b} \cdot \frac{(a-b)^2}{(b+t)(t+a)} \geq 0 \end{aligned}$$

Mặt khác ta lại có

$$f(a, b, t) - \frac{3}{2} = \frac{(a-b)^2}{2(b+t)(t+a)} + \frac{(a-t)^2}{2(b+t)(a+b)} + \frac{(t-b)^2}{2(a+b)(t+a)} \geq 0$$

Suy ra $f(a, b, c) \geq f(a, b, t) \geq \frac{3}{2}$. $\square$

Cách 16. Không mất tính tổng quát giả sử $a \geq b \geq c$. Ta có

$$\begin{aligned} \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} - \left(\frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a} + \frac{a}{a+b} \right) &= \frac{a-b}{b+c} + \frac{b-c}{c+a} + \frac{c-a}{a+b} \\ &\geq \frac{a-b}{a+c} + \frac{b-c}{c+a} + \frac{c-a}{a+c} = \frac{a-b+b-c+c-a}{a+c} = 0. \end{aligned}$$

Suy ra

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a} + \frac{a}{a+b}$$

Nên

$$\begin{aligned} 2P &= \frac{2a}{b+c} + \frac{2b}{c+a} + \frac{2c}{a+b} \geq \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a} + \frac{a}{a+b} \\ &= \frac{a+b}{b+c} + \frac{b+c}{c+a} + \frac{c+a}{a+b} \geq 3 \quad (\text{AM - GM}) \end{aligned}$$

Suy ra điều phải chứng minh. $\square$

Cách 17. Áp dụng bất đẳng thức **AM - GM** cho ba số dương ta có

$$P + \frac{3}{2} = \frac{a}{b+c} + \frac{1}{2} + \frac{b}{c+a} + \frac{1}{2} + \frac{c}{a+b} + \frac{1}{2} \geq 3 \sqrt[3]{\left(\frac{a}{b+c} + \frac{1}{2} \right) \left(\frac{b}{c+a} + \frac{1}{2} \right) \left(\frac{c}{a+b} + \frac{1}{2} \right)}$$

Ta chỉ cần chứng minh rằng

$$\left(\frac{a}{b+c} + \frac{1}{2} \right) \left(\frac{b}{c+a} + \frac{1}{2} \right) \left(\frac{c}{a+b} + \frac{1}{2} \right) \geq 1$$

$$\Leftrightarrow (2a+b+c)(2b+c+a)(2c+a+b) \geq 8(a+b)(b+c)(c+a)$$

Lại sử dụng bất đẳng thức **AM - GM** thì

$$2a+b+c = (a+b) + (a+c) \geq 2\sqrt{(a+b)(a+c)}$$

Tương tự với hai bất đẳng thức còn lại rồi nhân theo vế ta được điều phải chứng minh. $\square$

Cách 18. Tương tự **cách 17**, sử dụng bất đẳng thức **AM – GM** thì

$$P + 3 = \frac{a}{b+c} + 1 + \frac{b}{c+a} + 1 + \frac{c}{a+b} + 1 \geq 3 \sqrt[3]{\left(\frac{a}{b+c} + 1\right)\left(\frac{b}{c+a} + 1\right)\left(\frac{c}{a+b} + 1\right)}$$

Ta chỉ cần chứng minh

$$\begin{aligned} \left(\frac{a}{b+c} + 1\right)\left(\frac{b}{c+a} + 1\right)\left(\frac{c}{a+b} + 1\right) &\geq \left(\frac{3}{2}\right)^3 \\ \Leftrightarrow 8(a+b+c)^3 &\geq 27(a+b)(b+c)(c+a) \end{aligned}$$

Bất đẳng thức cuối luôn đúng vì theo **AM – GM** :

$$8(a+b+c)^3 = [(a+b)+(b+c)+(c+a)]^3 \geq 27(a+b)(b+c)(c+a). \quad \square$$

Cách 19. Viết lại bất đẳng thức dưới dạng tương đương sau

$$\begin{aligned} \frac{a}{b+c} - \frac{1}{2} + \frac{b}{c+a} - \frac{1}{2} + \frac{c}{a+b} - \frac{1}{2} &\geq 0 \\ \Leftrightarrow \frac{2a-b-c}{b+c} + \frac{2b-c-a}{c+a} + \frac{2c-a-b}{a+b} &\geq 0 \end{aligned}$$

Không mất tính tổng quát giả sử $a \geq b \geq c$, thế thì

$$\begin{cases} 2a-b-c \geq 2b-c-a \geq 2c-a-b \\ \frac{1}{b+c} \geq \frac{1}{c+a} \geq \frac{1}{a+b} \end{cases}$$

Áp dụng bất đẳng thức **Chebyshev** ta có

$$\begin{aligned} \frac{2a-b-c}{b+c} + \frac{2b-c-a}{c+a} + \frac{2c-a-b}{a+b} \\ \geq \frac{1}{3}[(2a-b-c) + (2b-c-a) + (2c-a-b)] \left[\frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} + \frac{1}{a+b} \right] = 0 \end{aligned}$$

Suy ra điều phải chứng minh. $\square$

Cách 20. Không mất tính tổng quát giả sử $a+b+c=3$. Ta có

$$\begin{aligned} 3(a-1)^2 \geq 0 &\Leftrightarrow 4a \geq 10a - 3a^2 - 3 = (3-a)(3a-1) \\ &\Leftrightarrow \frac{a}{3-a} \geq \frac{3a-1}{4} \quad (3) \end{aligned}$$

Trong (3) thay a bởi b, c rồi cộng lại theo vế ta được

$$P = \frac{a}{3-a} + \frac{b}{3-b} + \frac{c}{3-c} \geq \frac{3a-1}{4} + \frac{3b-1}{4} + \frac{3c-1}{4} = \frac{3}{2}. \quad \square$$

Cách 21. Đặt $\frac{b}{c} = x, \frac{c}{a} = y, \frac{a}{b} = z$ ta có $x, y, z > 0$ và $xyz = 1$. Bất đẳng thức trở thành

$$\begin{aligned} \frac{x}{1+zx} + \frac{y}{1+xy} + \frac{z}{1+yz} &\geq \frac{3}{2} \\ \Leftrightarrow 2\left(\frac{x}{z} + \frac{y}{x} + \frac{z}{y}\right) &\geq x + y + z + xy + yz + zx \end{aligned}$$

Sử dụng bất đẳng thức **AM – GM** cho ba số ta có

$$\frac{x}{z} + \frac{x}{z} + \frac{z}{y} \geq 3 \sqrt[3]{\frac{x^2}{yz}} = 3x$$

Từ đó dễ dàng suy ra

$$\frac{x}{z} + \frac{y}{x} + \frac{z}{y} \geq x + y + z$$

Chứng minh tương tự cho

$$\frac{x}{z} + \frac{y}{x} + \frac{z}{y} \geq xy + yz + zx$$

Suy ra điều phải chứng minh. $\square$

Cách 22. Đặt $x = \frac{a}{b+c}, y = \frac{b}{c+a}, z = \frac{c}{a+b}$ thì $\frac{1}{1+x} + \frac{1}{1+y} + \frac{1}{1+z} = 2$ (4)

Ta sẽ chứng minh $x + y + z \geq \frac{3}{2}$.

Thật vậy, giả sử $x + y + z < \frac{3}{2}$, thế thì theo bất đẳng thức **AM – GM** ta có

$$\frac{1}{1+x} + \frac{1}{1+y} + \frac{1}{1+z} \geq \frac{9}{3+x+y+z} > \frac{9}{3+\frac{3}{2}} = 2 \quad (\text{mâu thuẫn với (4)})$$

Vậy $x + y + z \geq \frac{3}{2}$, đó là điều phải chứng minh. $\square$

Cách 23. Đặt $x = \frac{a}{b+c}, y = \frac{b}{c+a}, z = \frac{c}{a+b}$ thì $P = x + y + z$.

Suy ra $\frac{1}{1+x} + \frac{1}{1+y} + \frac{1}{1+z} = 2$ hay $xy + yz + zx + 2xyz = 1$.

Áp dụng bất đẳng thức **AM – GM** ta có

$$xy + yz + zx + 2xyz \leq \frac{1}{3}P^2 + \frac{2}{27}P^3$$

Nên $1 \leq \frac{1}{3}P^2 + \frac{2}{27}P^3 \Leftrightarrow (2P-3)(P+3)^2 \geq 0 \Leftrightarrow P \geq \frac{3}{2}. \square$

Cách 24. Đặt $x = \frac{a}{b+c}, y = \frac{b}{c+a}, z = \frac{c}{a+b}$. Xét hàm $f(t) = \frac{t}{t+1}$ với $t > 0$ ta có

$$f'(t) = \frac{1}{(t+1)^2} > 0 \text{ và } f''(t) = -\frac{2}{(t+1)^3} < 0 \text{ với mọi } t \in (0; +\infty)$$

Suy ra $f(t)$ là hàm lõm nên theo bất đẳng thức **Jensen** thì

$$f\left(\frac{x+y+z}{3}\right) \geq \frac{f(x) + f(y) + f(z)}{3} = \frac{1}{3} = f\left(\frac{1}{2}\right)$$

Mà hàm f tăng ngặt trên $(0; +\infty)$ nên ta có

$$\frac{x+y+z}{3} \geq \frac{1}{2} \Leftrightarrow P = x + y + z \geq \frac{3}{2}. \square$$

Cách 25. Không mất tính tổng quát giả sử $a \geq b \geq c$. Đặt $f(a) = \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b}$.

Ta có $f'(a) = \frac{1}{b+c} - \frac{b}{(c+a)^2} - \frac{c}{(a+b)^2} \geq \frac{1}{b+c} - \frac{b}{(c+b)^2} - \frac{c}{(c+b)^2} = 0$

Suy ra $f(a) \geq f(b) = \frac{2b}{b+c} + \frac{c}{2b} = g(b)$

Lại có $g'(b) = \frac{2c}{(b+c)^2} - \frac{c}{2b^2} \geq \frac{2c}{(b+b)^2} - \frac{c}{2b^2} = 0$

Suy ra $g(b) \geq g(c) = \frac{2c}{c+c} + \frac{c}{2c} = \frac{3}{2}$.

Vậy $P = f(a) \geq g(b) \geq g(c) = \frac{3}{2}. \square$

Cách 26. Đặt $x = \frac{a}{c}, y = \frac{b}{c}$. Không mất tính tổng quát giả sử $a \geq b \geq c$, ta có $x \geq y \geq 1$

Bất đẳng thức cần chứng minh trở thành

$$\frac{x}{y+1} + \frac{y}{x+1} + \frac{1}{x+y} \geq \frac{3}{2}$$

Theo bất đẳng thức **AM – GM** thì

$$\frac{x+1}{y+1} + \frac{y+1}{x+1} \geq 2 \Leftrightarrow \frac{x}{y+1} + \frac{y}{x+1} \geq 2 - \frac{1}{x+1} - \frac{1}{y+1}$$

Ta chỉ cần chứng minh

$$2 - \frac{1}{x+1} - \frac{1}{y+1} + \frac{1}{x+y} \geq \frac{3}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{2} - \frac{1}{y+1} \geq \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+y} \Leftrightarrow \frac{y-1}{2(y+1)} \geq \frac{y-1}{(x+1)(x+y)}$$

Bất đẳng thức cuối cùng luôn đúng vì $x \geq y \geq 1$ nên $y-1 \geq 0$ và $2(y+1) \leq (x+1)(x+y)$. $\square$

Cách 27. Làm như **cách 24**, ta cần chứng minh

$$\frac{x}{y+1} + \frac{y}{x+1} + \frac{1}{x+y} \geq \frac{3}{2} \text{ với } x \geq y \geq 1.$$

Đặt $A = x + y$ và $B = xy$, bất đẳng thức tương đương với

$$\frac{x^2 + y^2 + x + y}{(x+1)(y+1)} + \frac{1}{x+y} \geq \frac{3}{2}$$

Hay

$$\frac{A^2 - 2B + A}{A + B + 1} + \frac{1}{A} \geq \frac{3}{2} \Leftrightarrow 2A^3 - A^2 - A + 2 \geq B(7A - 2)$$

Đề ý rằng $7A - 2 > 0$ và $A^2 \geq 4B$, suy ra ta chỉ cần chứng minh

$$4(2A^3 - A^2 - A + 2) \geq A^2(7A - 2) \Leftrightarrow (A - 2)^2(A + 2) \geq 0$$

Bất đẳng thức cuối luôn đúng và ta có điều phải chứng minh. $\square$

Cách 28. Sử dụng bất đẳng thức **AM - GM** ta có

$$a + \frac{b+c}{2} + \frac{b+c}{2} \geq 3\sqrt[3]{a \frac{(b+c)^2}{4}}$$

$$\Leftrightarrow (a+b+c)^3 \geq \frac{27}{4}a(b+c)^2 \Leftrightarrow \sqrt{(a+b+c)^3} \geq \frac{3\sqrt{3}}{2}a\sqrt{a} \cdot \frac{b+c}{a}$$

$$\text{Suy ra } \frac{a}{b+c} \geq \frac{3\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{a\sqrt{a}}{\sqrt{(a+b+c)^3}}.$$

$$\text{Từ đó ta chứng minh được } \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{a\sqrt{a} + b\sqrt{b} + c\sqrt{c}}{\sqrt{(a+b+c)^3}}$$

Không mất tính tổng quát giả sử $a+b+c=3$. Ta chỉ cần chứng minh $a\sqrt{a} + b\sqrt{b} + c\sqrt{c} \geq 3$.

Thật vậy, theo bất đẳng thức **AM - GM** thì

$$\begin{cases} a\sqrt{a} + a\sqrt{a} + 1 \geq 3a \\ b\sqrt{b} + b\sqrt{b} + 1 \geq 3b \\ c\sqrt{c} + c\sqrt{c} + 1 \geq 3c \end{cases}$$

$$\text{Suy ra } 2(a\sqrt{a} + b\sqrt{b} + c\sqrt{c}) + 3 \geq 3(a+b+c) = 9, \text{ hay } a\sqrt{a} + b\sqrt{b} + c\sqrt{c} \geq 3. \square$$

Cách 29. Sử dụng bất đẳng thức **AM - GM** ta có

$$2a + (b+c) \geq 2\sqrt{2a(b+c)}$$

$$\Leftrightarrow (2a+b+c)^2 \geq 8a^2 \cdot \frac{b+c}{a} \Leftrightarrow \frac{a}{b+c} \geq \frac{8a^2}{(2a+b+c)^2}$$

$$\text{Từ đó ta chứng minh được } P \geq \frac{8a^2}{(2a+b+c)^2} + \frac{8b^2}{(2b+c+a)^2} + \frac{8c^2}{(2c+a+b)^2}$$

Không mất tính tổng quát giả sử $a+b+c=3$, ta chỉ cần chứng minh

$$\frac{a^2}{(a+3)^2} + \frac{b^2}{(b+3)^2} + \frac{c^2}{(c+3)^2} \geq \frac{3}{16}$$

$$\text{Đề ý rằng } \frac{a^2}{(a+3)^2} \geq \frac{1}{16} + \frac{3}{32}(a-1) \quad (5)$$

Thật vậy, $(5) \Leftrightarrow \frac{3}{2}(a-1)^2(a-3) \leq 0$ luôn đúng vì $0 < a < 3$.

Trong (5) thay a lần lượt bởi b, c rồi cộng theo vế các bất đẳng thức ta được

$$\frac{a^2}{(a+3)^2} + \frac{b^2}{(b+3)^2} + \frac{c^2}{(c+3)^2} \geq \frac{3}{16} + \frac{3}{32}(a+b+c-3) = \frac{3}{16}. \square$$

Cách 30. Trước hết ta sẽ chứng minh rằng

$$\frac{a}{b+c} \geq \frac{3}{2} \frac{\sqrt{a^3}}{\sqrt{a^3} + \sqrt{b^3} + \sqrt{c^3}} \quad (6)$$

Thật vậy, (6) $\Leftrightarrow 2(\sqrt{a^3} + \sqrt{b^3} + \sqrt{c^3}) \geq 3\sqrt{a}(b+c)$ (7)

Sử dụng bất đẳng thức **AM – GM** ta có

$$\begin{cases} \sqrt{a^3} + \sqrt{b^3} + \sqrt{b^3} \geq 3b\sqrt{a} \\ \sqrt{a^3} + \sqrt{c^3} + \sqrt{c^3} \geq 3c\sqrt{a} \end{cases}$$

Cộng theo vế hai bất đẳng thức này cho ta (7).

Xây dựng thêm hai bất đẳng thức tương tự dạng (6) rồi cộng chúng theo vế ta được

$$P \geq \frac{3}{2} \left(\frac{\sqrt{a^3}}{\sqrt{a^3} + \sqrt{b^3} + \sqrt{c^3}} + \frac{\sqrt{b^3}}{\sqrt{a^3} + \sqrt{b^3} + \sqrt{c^3}} + \frac{\sqrt{c^3}}{\sqrt{a^3} + \sqrt{b^3} + \sqrt{c^3}} \right) = \frac{3}{2}. \quad \square$$

Cách 31. Ta có

$$\begin{aligned} 2P &= \frac{2a}{b+c} + \frac{2b}{c+a} + \frac{2c}{a+b} \\ &= \frac{(a+b) + (a+c)}{b+c} + \frac{(b+c) + (b+a)}{c+a} + \frac{(c+a) + (c+b)}{a+b} - 3 \\ &= \frac{a+b}{b+c} + \frac{b+c}{c+a} + \frac{c+a}{a+b} + \frac{b+c}{a+b} + \frac{c+a}{b+c} + \frac{a+b}{c+a} - 3 \\ &\geq 6 - 3 = 3 \quad (\text{AM – GM cho 6 số}) \end{aligned}$$

Suy ra điều phải chứng minh. $\square$

Cách 32. Không mất tính tổng quát giả sử $a \geq b \geq c$. Thế thì

$$\frac{1}{b+c} \geq \frac{1}{c+a} \geq \frac{1}{a+b}$$

Áp dụng bất đẳng thức **hoán vị** ta có

$$\begin{cases} \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a} + \frac{a}{a+b} \\ \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{c}{b+c} + \frac{a}{c+a} + \frac{b}{a+b} \end{cases}$$

Cộng theo vế hai bất đẳng thức trên ta được

$$2P \geq \frac{b}{b+c} + \frac{c}{b+c} + \frac{c}{c+a} + \frac{a}{c+a} + \frac{a}{a+b} + \frac{b}{a+b} = 3$$

Suy ra điều phải chứng minh. $\square$

Cách 33. Bất đẳng thức đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} \frac{a(a+b+c)}{b+c} + \frac{a(a+b+c)}{b+c} + \frac{a(a+b+c)}{b+c} &\geq \frac{3(a+b+c)}{2} \\ \Leftrightarrow \frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b} &\geq \frac{a+b+c}{2} \end{aligned}$$

Không mất tính tổng quát giả sử $a \geq b \geq c$. Suy ra

$$a^2 \geq b^2 \geq c^2 \quad \text{và} \quad \frac{1}{b+c} \geq \frac{1}{c+a} \geq \frac{1}{a+b}$$

Áp dụng bất đẳng thức **hoán vị** ta có

$$\begin{cases} \frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b} \geq \frac{b^2}{b+c} + \frac{c^2}{c+a} + \frac{a^2}{a+b} \\ \frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b} \geq \frac{c^2}{b+c} + \frac{a^2}{c+a} + \frac{b^2}{a+b} \end{cases}$$

Cộng theo vế hai bất đẳng thức trên ta được

$$\begin{aligned}\frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b} &\geq \frac{1}{2} \left(\frac{a^2+b^2}{a+b} + \frac{b^2+c^2}{b+c} + \frac{c^2+a^2}{c+a} \right) \\ &\geq \frac{1}{4} \left[\frac{(a+b)^2}{a+b} + \frac{(b+c)^2}{b+c} + \frac{(c+a)^2}{c+a} \right] \\ &= \frac{a+b+c}{2}\end{aligned}$$

Suy ra điều phải chứng minh. $\square$

Cách 34. Không mất tính tổng quát giả sử $a \geq b \geq c$ và $a+b+c=1$. Khi đó

$a \geq \frac{1}{3}$, $c \leq \frac{1}{3}$ suy ra $a+b=1-c \geq \frac{2}{3}$, nên $(a,b,c) \succ \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$. Áp dụng bất đẳng thức **Karamata**

cho hàm $y = f(x) = \frac{x}{1-x}$, lồi trên $(0,1)$, đối với bộ trội $(a,b,c) \succ \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$, ta có

$$P = f(a) + f(b) + f(c) = f\left(\frac{1}{3}\right) + f\left(\frac{1}{3}\right) + f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{3}{2}$$

Bất đẳng thức được chứng minh. $\square$

Cách 35. Không mất tính tổng quát giả sử $a+b+c=1$. Sử dụng bất đẳng thức

AM – GM ta có

$$(2-2a)(1+a)(1+a) \leq \left[\frac{(2-2a)+(1+a)+(1+a)}{3} \right]^3 = \frac{64}{27}$$

Do đó $\frac{a}{1-a} \geq \frac{27}{32} a(1+a)^2$. Tương tự

$$\frac{b}{1-b} \geq \frac{27}{32} b(1+b)^2, \frac{c}{1-c} \geq \frac{27}{32} c(1+c)^2$$

Cộng theo vế ba bất đẳng thức trên và sử dụng kết quả quen biết $\frac{x^n+y^n+z^n}{3} \geq \left(\frac{x+y+z}{3}\right)^n$ với mọi $x, y, z \geq 0, n \geq 1$ ta được

$$\begin{aligned}P = \frac{a}{1-a} + \frac{b}{1-b} + \frac{c}{1-c} &\geq \frac{27}{32} \left[(a^3+b^3+c^3) + 2(a^2+b^2+c^2) + (a+b+c) \right] \\ &\geq \frac{27}{32} \left[3\left(\frac{1}{3}\right)^3 + 6\left(\frac{1}{3}\right)^2 + 1 \right] = \frac{3}{2}. \square\end{aligned}$$

Cách 36. t tính tổng quát giả sử $a+b+c=3$. Hiển nhiên là

$$\begin{aligned}(a-1)^2 \geq 0 &\Leftrightarrow a+1 \geq a(3-a) \\ \Leftrightarrow \frac{a}{3-a} &\geq \frac{a^2}{a+1} \quad (\text{vì } a, b, c \in (0,3))\end{aligned}$$

Hoàn toàn tương tự, ta có $\frac{b}{3-b} \geq \frac{b^2}{b+1}$ và $\frac{c}{3-c} \geq \frac{c^2}{c+1}$

Cộng theo vế ba bất đẳng thức trên và sử dụng bất đẳng thức **Cauchy – Schwarz** ta được

$$P = \frac{a}{3-a} + \frac{b}{3-b} + \frac{c}{3-c} \geq \frac{a^2}{a+1} + \frac{b^2}{b+1} + \frac{c^2}{c+1} \geq \frac{(a+b+c)^2}{a+b+c+3} = \frac{3}{2}. \square$$

Cách 37. Không mất tính tổng quát, giả sử $a+b+c=1$. Trước hết ta sẽ chứng minh rằng

$$\frac{a+bc}{b+c} + \frac{b+ca}{c+a} + \frac{c+ab}{a+b} \geq 2$$

Sử dụng bất đẳng thức **AM – GM** với chú ý $a+b+c=1$, ta có

$$\frac{a+bc}{b+c} + \frac{b+ca}{c+a} + \frac{c+ab}{a+b} = \frac{(a+b)(a+c)}{b+c} + \frac{(b+c)(b+a)}{c+a} + \frac{(c+a)(c+b)}{a+b} \geq (a+b) + (b+c) + (c+a) = 2.$$

Trở lại bài toán, sử dụng bất đẳng thức quen biết $\frac{xy}{x+y} \leq \frac{x+y}{4}$ với mọi $x, y \geq 0$, ta có

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq 2 - \frac{bc}{b+c} - \frac{ca}{c+a} - \frac{ab}{a+b} \geq 2 - \frac{1}{4}[(b+c) + (c+a) + (a+b)] = \frac{3}{2}$$

Đó là điều phải chứng minh. $\square$

Cách 38. Sử dụng bất đẳng thức quen biết $(x+y+z)^2 \geq 3(xy+yz+zx)$ ta có

$$P^2 \geq 3 \left[\frac{ab}{(b+c)(c+a)} + \frac{bc}{(c+a)(a+b)} + \frac{ca}{(a+b)(b+c)} \right]$$

Suy ra bất đẳng thức đã cho là đúng nếu ta chứng minh được bất đẳng thức mạnh hơn là

$$\frac{ab}{(b+c)(c+a)} + \frac{bc}{(c+a)(a+b)} + \frac{ca}{(a+b)(b+c)} \geq \frac{3}{4}$$

$$\Leftrightarrow 4[ab(a+b) + bc(b+c) + ca(c+a)] \geq 3(a+b)(b+c)(c+a)$$

Không mất tính tổng quát giả sử $a+b+c=1$, bất đẳng thức trở thành

$$4[ab(1-c) + bc(1-a) + ca(1-b)] \geq 3(1-a)(1-b)(1-c)$$

$$\Leftrightarrow ab+bc+ca \geq 9abc \Leftrightarrow \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq \frac{9}{a+b+c}$$

Bất đẳng thức cuối luôn đúng theo **AM – GM** và ta có điều phải chứng minh. $\square$

Cách 39. Sử dụng bất đẳng thức **AM – GM** ta có

$$\frac{a}{b+c} + \frac{a}{b+c} + \frac{1}{2} \geq 3 \sqrt[3]{\frac{a^2}{2(b+c)^2}} = \frac{9a}{3 \sqrt[3]{2a(b+c)(b+c)}} \geq \frac{9a}{2(a+b+c)}$$

Tương tự ta chứng minh được

$$\frac{b}{c+a} + \frac{b}{c+a} + \frac{1}{2} \geq \frac{9b}{2(a+b+c)} \quad \text{và} \quad \frac{c}{a+b} + \frac{c}{a+b} + \frac{1}{2} \geq \frac{9c}{2(a+b+c)}$$

Cộng theo về ba bất đẳng thức trên cho ta

$$2P + \frac{3}{2} \geq \frac{9}{2} \Leftrightarrow P \geq \frac{3}{2}. \square$$

Cách 40. Không mất tính tổng quát, giả sử $a+b+c=3$. Sử dụng bất đẳng thức

AM – GM ta có

$$\frac{a^2}{(3-a)^2} = \frac{2a^3}{2a(3-a)(3-a)} \geq \frac{2a^3}{\left[\frac{2a+(3-a)+(3-a)}{3} \right]^3} = \frac{a^3}{4} \Rightarrow \frac{a}{3-a} \geq \frac{a\sqrt{a}}{2}$$

Chứng minh tương tự

$$\frac{b}{3-b} \geq \frac{b\sqrt{b}}{2} \quad \text{và} \quad \frac{c}{3-c} \geq \frac{c\sqrt{c}}{2}$$

Cộng theo về ba bất đẳng thức trên ta được

$$\frac{a}{3-a} + \frac{b}{3-b} + \frac{c}{3-c} \geq \frac{a\sqrt{a} + b\sqrt{b} + c\sqrt{c}}{2} \geq \frac{3}{2}. \square$$

Cách 41. Ta có

$$P - \frac{3}{2} =$$

$$= \frac{2[a(a-b)(a-c) + b(b-a)(b-c) + c(c-a)(c-b)] + (a+b+c)[(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2]}{4(a+b)(b+c)(c+a)}$$

Theo bất đẳng thức **Schur** thì $a(a-b)(a-c) + b(b-a)(b-c) + c(c-a)(c-b) \geq 0$

và hiển nhiên $(a+b+c)\left[(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2\right] \geq 0$

suy ra điều phải chứng minh. $\square$

Cách 42. Ta có

$$P - \frac{3}{2} = \frac{(2a+b+c)(a-b)(a-c) + (2b+c+a)(b-a)(b-c) + (2c+a+b)(c-a)(c-b)}{2(a+b)(b+c)(c+a)}$$

Không mất tính tổng quát, giả sử $a \geq b \geq c$, thế thì

$$2a+b+c \geq 2b+c+a \geq 2c+a+b$$

Sử dụng bất đẳng thức **Vornicu – Schur** (hay bất đẳng thức **Schur** suy rộng) ta được

$$(2a+b+c)(a-b)(a-c) + (2b+c+a)(b-a)(b-c) + (2c+a+b)(c-a)(c-b) \geq 0$$

Suy ra điều phải chứng minh. $\square$

Cách 43. Sử dụng bất đẳng thức **Cauchy – Schwarz** ta có

$$P = \frac{a^4}{a^3b+a^3c} + \frac{b^4}{b^3c+b^3a} + \frac{c^4}{c^3a+c^3b} \geq \frac{(a^2+b^2+c^2)^2}{(a^3b+b^3c+c^3a) + (ab^3+bc^3+ca^3)}$$

Ta chỉ cần chứng minh

$$2(a^2+b^2+c^2)^2 \geq 3(a^3b+b^3c+c^3a) + 3(ab^3+bc^3+ca^3)$$

Sử dụng bất đẳng thức **Vasile Cirtoaje** quen biết sau

$$(a^2+b^2+c^2)^2 \geq 3(a^3b+b^3c+c^3a)$$

Tương tự

$$(a^2+b^2+c^2)^2 \geq 3(ab^3+bc^3+ca^3)$$

Suy ra điều phải chứng minh. $\square$

Cách 44. Nhận xét rằng vế trái của bất đẳng thức là một hàm đối xứng đối với ba biến a, b, c , nếu viết nó dưới dạng đa thức thì được một đa thức có bậc không quá 3. Theo định lý **ABC** ta chỉ cần xét bất đẳng thức trong hai trường hợp:

• Trường hợp 1: Một trong ba biến a, b, c bằng 0, giả sử $c = 0$. Bất đẳng thức trở thành

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq \frac{3}{2}$$

luôn đúng theo bất đẳng thức **AM – GM**.

• Trường hợp 2: Hai trong ba biến a, b, c bằng nhau, giả sử $b = c$. Bất đẳng thức trở thành

$$\frac{a}{2b} + \frac{2b}{a+b} \geq \frac{3}{2} \Leftrightarrow \frac{(a-b)^2}{2b(a+b)} \geq 0$$

Bất đẳng thức được chứng minh. $\square$

Cách 45. Trước hết ta sẽ phát biểu và chứng minh một bổ đề.

Bổ đề. Với mọi $a, b, c > 0$ thì $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{2(ab+bc+ca)}{3} \left[\frac{1}{(a+b)^2} + \frac{1}{(b+c)^2} + \frac{1}{(c+a)^2} \right]$

Thật vậy, bổ đề tương đương với

$$\begin{aligned} \frac{3a}{b+c} + \frac{3b}{c+a} + \frac{3c}{a+b} &\geq \frac{2ab}{(a+b)^2} + \frac{2c}{a+b} + \frac{2bc}{(b+c)^2} + \frac{2a}{b+c} + \frac{2ca}{(c+a)^2} + \frac{2b}{c+a} \\ &\Leftrightarrow \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{2ab}{(a+b)^2} + \frac{2bc}{(b+c)^2} + \frac{2ca}{(c+a)^2} \\ &\Leftrightarrow \frac{ab+ac-2bc}{(b+c)^2} + \frac{bc+ba-2ca}{(c+a)^2} + \frac{ca+cb-2ab}{(a+b)^2} \geq 0 \quad (8) \end{aligned}$$

Không mất tính tổng quát, giả sử $a \geq b \geq c$, thế thì

$$\begin{cases} ab+ac-2bc \geq bc+ba-2ca \geq ca+cb-2ab \\ \frac{1}{(b+c)^2} \geq \frac{1}{(c+a)^2} \geq \frac{1}{(a+b)^2} \end{cases}$$

Sử dụng bất đẳng thức **Chebyshev** ta có

$$VT(8) \geq [(ab + ac - 2bc) + (bc + ba - 2ca) + (ca + cb - 2ab)] \left[\frac{1}{(b+c)^2} + \frac{1}{(c+a)^2} + \frac{1}{(a+b)^2} \right] = 0$$

Bổ đề được chứng minh.

Trở lại bài toán, sử dụng bổ đề và bất đẳng thức **Iran TST 1996**

$$(xy + yz + zx) \left[\frac{1}{(x+y)^2} + \frac{1}{(y+z)^2} + \frac{1}{(z+x)^2} \right] \geq \frac{9}{4}$$

ta có ngay điều phải chứng minh. $\square$