Chứng minh:

Giả sử phép biến đổi đối xứng $\mathscr{A}$ của không gian vectơ Euclide E có ma trận đối với cơ sở trực chuẩn $e_1, e_2, ..., e_n$ của E là A.

Giả sử $\lambda_\circ \in \mathbb{C}$ là một nghiệm phức của đa thức đặc trưng $D(A-\lambda I)$.

Khi đó, vì $D(A-\lambda_\circ I)=0$ nên hệ phương trình $(A-\lambda_\circ I)X=0$ có nghiệm không tầm thường $u=(z_1,z_2,...,z_n)\in\mathbb{C}^n$.

Giả sử $\lambda_\circ = u+iv\ (u,v\in\mathbb{R})$ và $\begin{cases} z_j = t_j + ik_j,\ (t_j,k_j\in\mathbb{R}) \\ \forall j=1,..,n \end{cases}$.

Như vậy, ma trận cột $U=\begin{bmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix}$ thỏa $AU=\lambda_\circ U \quad (1)$.

Khi đó

(1) $\Leftrightarrow$

$$A\begin{bmatrix} t_1+ik_1 \\ t_2+ik_2 \\ \vdots \\ t_n+ik_n \end{bmatrix} = (u+iv)\begin{bmatrix} t_1+ik_1 \\ t_2+ik_2 \\ \vdots \\ t_n+ik_n \end{bmatrix} = u\begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ \vdots \\ t_n \end{bmatrix} - v\begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_n \end{bmatrix} + i\left(v\begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ \vdots \\ t_n \end{bmatrix} + u\begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_n \end{bmatrix}\right) \quad (2)$$

Mặt khác :

$$A\begin{bmatrix} t_1+ik_1 \\ t_2+ik_2 \\ \vdots \\ t_n+ik_n \end{bmatrix} = A\begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ \vdots \\ t_n \end{bmatrix} + iA\begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_n \end{bmatrix} \quad (3)$$

Từ (2) và (3) ta được :

$$A\begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_n \end{bmatrix} = v\begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ \vdots \\ t_n \end{bmatrix} + u\begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_n \end{bmatrix} \quad (4)$$

và

$$A\begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ \vdots \\ t_n \end{bmatrix} = u\begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ \vdots \\ t_n \end{bmatrix} - v\begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_n \end{bmatrix} \quad (5)\ .$$

Khi đó trong E , ta xét hai vectơ

$\beta_1 = t_1e_1 + t_2e_2 + \cdots + t_ne_n$ và

$\beta_2 = k_1e_1 + k_2e_2 + \cdots + k_ne_n$,

ta có :

$(4) \Leftrightarrow \mathcal{A}(\beta_2) = v\beta_1 + u\beta_2$,

$(5) \Leftrightarrow \mathcal{A}(\beta_1) = u\beta_1 - v\beta_2$.

Vì $\mathcal{A}$ là phép biến đổi đối xứng nên:

$$\langle \mathcal{A}(\beta_1), \beta_2 \rangle = \langle \beta_1, \mathcal{A}(\beta_2) \rangle \Rightarrow u\langle \beta_1, \beta_2 \rangle - v\langle \beta_2, \beta_2 \rangle = v\langle \beta_1, \beta_1 \rangle + u\langle \beta_1, \beta_2 \rangle$$

$$\Rightarrow v\left(\langle \beta_1, \beta_1 \rangle + \langle \beta_2, \beta_2 \rangle\right) = 0$$

Vì $u = (z_1, z_2, ..., z_n) \neq 0$ nên $\beta_1 \neq 0$ hay $\beta_2 \neq 0$ nên từ trên suy ra $v = 0$.

Suy ra $\lambda_\circ \in \mathbb{R}$