Lời giải (1).
Ta có:

$$(1+i)^n = \left[1 - \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \cdots\right] + i\left[\binom{n}{1} - \binom{n}{3} + \binom{n}{5} + \cdots\right]$$

Lại có:

$$(1+i)^n = \sqrt{2^n}\left(\cos\frac{n\pi}{4} + \sin\frac{n\pi}{4}\right) = \sqrt{2^n}\cos\frac{n\pi}{4} + \sqrt{2^n}\sin\frac{n\pi}{4}$$

Do đó:

$$\begin{aligned}\left[1 - \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \cdots\right]^2 &= 2^n\left(\cos\frac{n\pi}{4}\right)^2\\ \left[\binom{n}{1} - \binom{n}{3} + \binom{n}{5} - \cdots\right]^2 &= 2^n\left(\sin\frac{n\pi}{4}\right)^2\end{aligned}$$

Cộng 2 đẳng thức trên, ta có đẳng thức cần chứng minh. ■

Lời giải (2).
Xét số phức $z = 1+i$. Khi đó

$$\begin{aligned}z^n = (1+i)^n &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}i^k\\ &= \left[1 - \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \cdots\right] + i\left[\binom{n}{1} - \binom{n}{3} + \binom{n}{5} - \cdots\right]\end{aligned}$$

Suy ra

$$|z^n|^2 = \left[1 - \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \cdots\right]^2 + \left[\binom{n}{1} - \binom{n}{3} + \binom{n}{5} - \cdots\right]^2$$

Mà $|z^n| = |z|^n = \left(\sqrt{2}\right)^n$. Từ đó ta có được đpcm. ■

Ví dụ 2.10. *Tính tổng*

$$A = 3^n\binom{2n}{0} - 3^{n-1}\binom{2n}{2} + ... + (-1)^{n-1}3\binom{2n}{2n-2} + (-1)^n\binom{2n}{2n}$$

$$B = 3^{2m}\binom{4m}{0} + 3^{2m-2}\binom{4m}{4} + 3^{2m-4}\binom{4m}{8} + ... + 3^2\binom{4m}{4m-4} + \binom{4m}{4m}$$

△

Chuyên đề

ĐẲNG THỨC TỔ HỢP

Vol.1

Chế bản

Hoàng Xuân Thanh [hxthanh]
Trần Quốc Nhật Hân [perfectstrong]
Trần Trung Kiên [Ispectorgadget]
Nguyễn Bảo Phúc [dark templar]

Cộng vế theo vế với (2.8), ta sẽ có:

$$2^{12n-1}+\mathrm{Re}\left[(1+i)^{12n}\right]=2\sum_{k=0}^{3n}\binom{12n}{4k}=2S$$

Việc còn lại ta chỉ phải tìm $\mathrm{Re}\left[(1+i)^{12n}\right]$.
Ta có:

$$\begin{aligned}(1+i)^{12n}&=\left[\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)\right]^{12n}\\&=2^{6n}\left(\cos(3n\pi)+i\sin(3n\pi)\right)\\&=(-1)^n2^{6n}\end{aligned}$$

Từ đó ta có:

$$S=\sum_{k=0}^{3n}\binom{12n}{4k}=2^{12n-2}+(-1)^n2^{6n-1}$$

■

Nhận xét. Ngoài ra ta còn thu được đẳng thức:

$$\mathrm{Im}\left[(1+i)^{12n}\right]=\sum_{k=0}^{3n-1}\binom{12n}{4k+1}-\sum_{k=0}^{3n-1}\binom{12n}{4k+3}=0$$

hay

$$\sum_{k=0}^{3n-1}\binom{12n}{4k+1}=\sum_{k=0}^{3n-1}\binom{12n}{4k+3}\tag{2.9}$$

Thêm một câu hỏi cho các bạn: Tổng (2.9) bằng bao nhiêu?

Ví dụ 2.9. *Cho $n\in\mathbb{N}$. Chứng minh rằng*

$$\left[1-\binom{n}{2}+\binom{n}{4}-\cdots\right]^2+\left[\binom{n}{1}-\binom{n}{3}+\binom{n}{5}+\cdots\right]^2=2^n$$

△

Không vấn đề gì, trở lại với số thực ta xét khai triển:

$$\begin{aligned}(1+x)^{12n} &= \sum_{k=0}^{12n}\binom{12n}{k}x^k\\ &= \sum_{k=0}^{3n}\binom{12n}{4k}x^{4k}+\sum_{k=0}^{3n-1}\binom{12n}{4k+1}x^{4k+1}\\ &\quad+\sum_{k=0}^{3n-1}\binom{12n}{4k+2}x^{4k+2}+\sum_{k=0}^{3n-1}\binom{12n}{4k+3}x^{4k+3}\end{aligned}$$

và

$$\begin{aligned}(1-x)^{12n} &= \sum_{k=0}^{12n}\binom{12n}{k}(-1)^kx^k\\ &= \sum_{k=0}^{3n}\binom{12n}{4k}x^{4k}-\sum_{k=0}^{3n-1}\binom{12n}{4k+1}x^{4k+1}\\ &\quad+\sum_{k=0}^{3n-1}\binom{12n}{4k+2}x^{4k+2}-\sum_{k=0}^{3n-1}\binom{12n}{4k+3}x^{4k+3}\end{aligned}$$

Cộng 2 đẳng thức trên theo từng vế ta được:

$$(1+x)^{12n}+(1-x)^{12n}=2\sum_{k=0}^{3n}\binom{12n}{4k}x^{4k}+2\sum_{k=0}^{3n-1}\binom{12n}{4k+2}x^{4k+2}$$

Cho $x=1$, thì ta được:

$$2^{12n}=2\sum_{k=0}^{3n}\binom{12n}{4k}+2\sum_{k=0}^{3n-1}\binom{12n}{4k+2}$$

hay

$$2^{12n-1}=\sum_{k=0}^{3n}\binom{12n}{4k}+\sum_{k=0}^{3n-1}\binom{12n}{4k+2}$$

Lời giới thiệu

Bạn đọc thân mến!

Đại Số Tổ Hợp ngày nay đã trở thành một môn học không thể thiếu trong chương trình trung học phổ thông. Khi nói về các bài toán Tổ hợp, chúng ta không thể không nhắc tới một dạng toán rất hay và quen thuộc đó là: Đẳng thức tổ hợp.

Đẳng thức tổ hợp (ĐTTH) là những đẳng thức có chứa các hệ số nhị thức thường được phát biểu dưới dạng tính tổng. Có thể nói ĐTTH là một trong những đề tài khó nhất và hấp dẫn nhất của Đại Số Tổ Hợp. Việc ĐTTH xuất hiện thường xuyên trong các kỳ thi Đại Học, học sinh giỏi những năm gần đây, cũng là một dấu hiệu cho thấy sự quan tâm và đầu tư một cách tích cực hơn về vấn đề này.

Nhân sự kiện đón xuân Quý Tỵ và kỷ niệm tròn một năm Diễn đàn Toán học khai trương trang chủ mới (16/01/2012 - 16/01/2013), nhóm biên tập chúng tôi cùng nhiều thành viên tích cực của diễn đàn đã chung tay biên soạn một chuyên đề gửi đến bạn đọc.

Với một số phương pháp từ cơ bản đến nâng cao về Đại Số Tổ Hợp nói chung và ĐTTH nói riêng, chúng tôi, những người thực hiện chuyên đề này, mong muốn đem đến cho bạn đọc một chút gì đó mới mẻ trong các bài toán về ĐTTH, chẳng hạn như phương pháp Sai Phân, Sai phân từng phần, v.v... Bạn đọc sẽ tìm thấy trong chuyên đề này một số dạng bài toán quen thuộc được nhìn nhận và tiếp cận theo phong cách hoàn toàn mới, qua những ví dụ và bài tập điển hình.

Chuyên đề là tập hợp các bài viết của các tác giả: Trần Quốc Nhật Hân (perfectstrong), Bùi Đức Lộc (supermember), Hoàng Xuân Thanh (hxthanh), Lê Kim Nhã (gogo123), Nguyễn Bảo Phúc (Dark Templar), Trần Trung Kiên (Ispectorgadget), Lưu Giang Nam (namheo1996), Hoàng Minh Quân (batigoal), Nguyễn Hiền Trang (tranghieu95) ... cùng sự góp sức của nhiều thành viên tích cực khác trên DIỄN ĐÀN TOÁN HỌC như thầy Châu Ngọc Hùng (hungchng), Lê Hữu Điền Khuê (Nesbit), Đinh Ngọc Thạch (T*genie*), HeilHittler, trungpbc, ...

Chuyên đề gồm 6 chương. Chương 1 tóm tắt **Tổng quan về hệ số nhị thức**. **Phương pháp cân bằng hệ số của khai triển nhị thức** quen thuộc sẽ được nghiên cứu ở chương 2. **Tính tổng bằng Sai Phân và Sai Phân Từng Phần** chiếm vị trí ở chương 3. Chương 4 viết về **Hàm Sinh và những ứng dụng** mạnh mẽ trong chứng minh ĐTTH. Chương 5 là **Một số ứng dụng của nhị thức trong các bài toán Số Học**. Khép lại chuyên đề là chương 6 **Phương pháp đếm bằng hai cách**.

Những phương pháp và bài tập được giới thiệu trong chuyên đề này có thể chưa phải là hay nhất, chưa phải là tổng quát nhất. Nhưng hy vọng bạn đọc hãy tiếp tục nghiên cứu, sáng tạo. Đó mới là tinh thần học toán mà chuyên đề muốn mang tới.

Tài liệu này cũng thay cho lời chúc mừng năm mới của DIỄN ĐÀN TOÁN HỌC gửi đến quý bạn đọc!

Do thời gian chuẩn bị gấp rút, một số nội dung chưa được đầu tư một cách tỉ mỉ và không thể tránh khỏi sai sót, chúng tôi mong bạn đọc thông cảm. Mọi sự ủng hộ, đóng góp, phê bình của độc giả sẽ là nguồn động viên tinh thần to lớn cho ban biên tập cũng như các tác giả để những phiên bản cập nhật sau của chuyên đề được tốt hơn. Mọi trao đổi góp ý xin gửi về địa chỉ email : contact@diendantoanhoc.net.

Trân trọng!
Nhóm biên tập Chuyên đề Đẳng Thức Tổ Hợp.

Ví dụ 2.8. *Tính tổng*

$$S=\sum_{k=0}^{3n}\binom{12n}{4k}$$

△

Lời giải.
Nhìn vào đề bài, gợi ý cho ta liên hệ ngay đến khai triển $(1+i)^{12n}$? Nhưng liệu có ra được kết quả cuối cùng không? Ta hãy tính thử xem!

$$(1+i)^{12n}=\sum_{k=0}^{12n}\binom{12n}{k}i^k$$

Các số hạng của ta "cách đều" một khoảng bội của 4, như vậy một cách tự nhiên ta sẽ tách khai triển trên thành 4 tổng theo phân đoạn module 4 (theo $k \mod 4$)

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{12n}\binom{12n}{k}i^k &= \sum_{k=0}^{3n}\binom{12n}{4k}i^{4k}+\sum_{k=0}^{3n-1}\binom{12n}{4k+1}i^{4k+1}\\ &+\sum_{k=0}^{3n-1}\binom{12n}{4k+2}i^{4k+2}+\sum_{k=0}^{3n-1}\binom{12n}{4k+3}i^{4k+3}\\ &=\sum_{k=0}^{3n}\binom{12n}{4k}+i\sum_{k=0}^{3n-1}\binom{12n}{4k+1}\\ &-\sum_{k=0}^{3n-1}\binom{12n}{4k+2}-i\sum_{k=0}^{3n-1}\binom{12n}{4k+3}\end{aligned}$$

Đến đây, ta gặp một "vướng mắc nhỏ", đó là:

$$\operatorname{Re}\left[(1+i)^{12n}\right]=\sum_{k=0}^{3n}\binom{12n}{4k}-\sum_{k=0}^{3n-1}\binom{12n}{4k+2} \tag{2.8}$$

Như vậy là so với tổng cần tính giá trị của ta "thừa ra" một tổng ... tương tự.

Lời giải.
Xét khai triển $(1+i)^{2n}$, ta có:

$$\begin{aligned}(1+i)^n &= \sum_{k=0}^{2n}\binom{2n}{k}i^k \\ &= \sum_{k=0}^{n}\binom{2n}{2k}i^{2k} + \sum_{k=1}^{n}\binom{2n}{2k-1}i^{2k-1} \\ &= \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{2n}{2k} + \sum_{k=1}^{n}i.(-1)^{k-1}\binom{2n}{2k-1}\end{aligned}$$

Như vậy ta dễ dàng nhận ra được:

$$S = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{2n}{2k} = \mathrm{Re}[(1+i)^{2n}]$$

Và nhân tiện ta cũng có luôn:

$$\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\binom{2n}{2k-1} = \mathrm{Im}[(1+i)^{2n}]$$

Mặt khác:

$$(1+i)^{2n} = \left[\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)\right]^{2n} = 2^n\left(\cos\frac{n\pi}{2} + i\sin\frac{n\pi}{2}\right)$$

Từ đó suy ra:

$$S = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{2n}{2k} = 2^n\cos\frac{n\pi}{2}$$

và:

$$\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\binom{2n}{2k-1} = 2^n\sin\frac{n\pi}{2}$$

■

Nhận xét. Liệu bài toán này có phải bắt buộc phải dùng công cụ số phức? Các bạn thử tìm cách khác xem nhé!

Mục lục

Thay lần lượt các giá trị nghiệm vào (2.7), ta được:

$$\begin{gathered}\varepsilon^{n-1}+\varepsilon^{n-2}+\ldots+\varepsilon+1=0\\ \varepsilon^{2(n-1)}+\varepsilon^{2(n-2)}+\ldots+\varepsilon^{2}+1=0\\ \cdots\end{gathered}$$

Một cách tổng quát ta có

Định lý 2.1 (Định lý RUF - Root of Unity Filter)–

$$\frac{1}{n}\sum_{\varepsilon^n=1}\varepsilon^k=\begin{cases}1 & \text{nếu} \quad n\mid k\\ 0 & \text{nếu} \quad n\nmid k\end{cases}$$ □

Hiểu một cách đơn giản là: Trung bình cộng với luỹ thừa bậc k của n giá trị căn phức bậc n của 1 bằng 1 nếu k là bội của n, ngược lại giá trị này bằng 0.

Ngoài ra một tính chất rất cơ bản đó là:

$$z_1=z_2\Leftrightarrow\begin{cases}\mathrm{Re}(z_1)=\mathrm{Re}(z_2)\\ \mathrm{Im}(z_1)=\mathrm{Im}(z_2)\end{cases}$$

Để tìm hiệu cách sử dụng các tính chất trên như thế nào, ta hãy xét một số ví dụ sau:

Ví dụ 2.7. *Tính tổng*

$$S=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{2n}{2k}$$ △

2.2 Ứng dụng số phức

Việc tính tổng hoặc chứng minh đẳng thức chứa các hệ số nhị thức, đôi khi ta cũng cần dùng đến công cụ *số phức*. Vậy khi nào ta cần dùng đến số phức?

Đó là những tổng có dạng $\sum_{k=0}^{n} f(m,pk)$ hoặc $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k.f(m,pk)$ với $p>1$

Ý nghĩa của những tổng dạng trên đó là "khoảng cách" giữa hai số hạng liên tiếp là một bội của biến chạy k.

Ví dụ:

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{2n}{2k}; \quad \sum_{k=0}^{n} \binom{3n}{3k}; \quad \text{v.v...}$$

Tại sao ta cần dùng số phức? Ta cần đến tính chất gì của số phức? Để trả lời cho câu hỏi trên, chúng ta hãy cùng tìm hiểu một số vấn đề sau:

Ta có $i^2=-1$; $i^{2n}=(-1)^n$; .... Xét phương trình

$$x^n - 1 = 0 \tag{2.6}$$

Phương trình (2.6) có nghiệm $x=\sqrt[n]{1}$. Những nghiệm này (cả nghiệm phức) bao gồm n giá trị $\{1;\varepsilon;\varepsilon^2;...;\varepsilon^{n-1}\}$ trong đó:

$$\varepsilon = \cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)$$

Mặt khác: $x^n-1=(x-1)(x^{n-1}+x^{n-2}+...+x+1)$

Như vậy ngoại trừ nghiệm $x=1$ thì $n-1$ nghiệm phức còn lại đều thoả mãn phương trình:

$$x^{n-1}+x^{n-2}+...+x+1=0 \tag{2.7}$$

Bài tập

BÀI 1. Cho các số tự nhiên m, n thoả mãn $m \leq 2n$
Chứng minh đẳng thức

$$\sum_{k=0}^{m} \binom{2n}{2k}\binom{2n-2k}{m-k}4^k = \binom{4n}{2m}$$

BÀI 2. Cho các số tự nhiên m, n thoả mãn $2m+1 \leq 3n$
Chứng minh đẳng thức

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\binom{n+2m-4k}{n-1} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\binom{n}{2m+1-2k}$$

BÀI 3. Chứng minh đẳng thức

$$\sum_{k=0}^{n}(-3)^k\binom{2n}{k}\binom{2n-k}{n-k} = (-2)^n\binom{2n}{n}$$

BÀI 4. Chứng minh đẳng thức

$$\sum_{k=0}^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor}\binom{n}{k}\binom{n-k}{k} = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\binom{2n-2k}{n-k}$$

BÀI 5. Chứng minh đẳng thức

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k 2^k\binom{n}{k}^2 = 2^n\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\binom{2n}{k}$$

Ví dụ 2.6. *Với các số nguyên n, m thoả $0 \le m \le n$.*
Chứng minh đẳng thức:

$$\sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n-m}{2} \rfloor} (-1)^k \binom{n}{k}\binom{2n-2k}{n+m} = \binom{n}{m} 2^{n-m}$$

△

Lời giải.
Quan sát vế phải của đẳng thức cần chứng minh ta thấy rằng:

$$\binom{n}{m} 2^{n-m} = \langle x^m \rangle (2+x)^n$$

Mặt khác quan sát thấy vế phải của đẳng thức có nhị thức $\binom{2n-2k}{n+m}$, điều này chứng tỏ biểu thức đó là hệ số bậc $(n+m)$ của một khai triển bậc cao hơn n
Do đó ta sẽ nhân thêm x^n vào khai triển trên

$$\begin{aligned}\langle x^m \rangle (2+x)^n &= \langle x^{n+m} \rangle (2x+x^2)^n = \langle x^{n+m} \rangle [(x+1)^2 - 1]^n \\ &= \langle x^{n+m} \rangle \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (x+1)^{2(n-k)} (-1)^k \\ &= \langle x^{n+m} \rangle \sum_{k=0}^{n} \sum_{j=0}^{2n-2k} \binom{n}{k}\binom{2n-2k}{j} (-1)^k x^j\end{aligned}$$

Suy ra $j = n+m$ và do đó ta có:

$$\binom{n}{m} 2^{n-m} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k}\binom{2n-2k}{n+m}$$

Để ý rằng với $k > \dfrac{n-m}{2}$ thì $2n-2k < n+m$ và khi đó $\binom{2n-2k}{n+m} = 0$
Từ đó ta có đẳng thức cần chứng minh ■

Chương
1
Tổng quan về hệ số nhị thức

Hoàng Xuân Thanh (hxthanh)

Tóm tắt nội dung

Đẳng thức tổ hợp (ĐTTH) được giới thiệu trong bài viết này được hiểu là các đẳng thức có chứa các hệ số nhị thức (binomial coefficient) $\binom{n}{k}$. ĐTTH là một đề tài rất hay và khó, cùng với đó là rất nhiều phương pháp tiếp cận khác nhau cho một bài toán.

Trong phần này, tác giả sẽ hệ thống cho bạn đọc một số khái niệm và những công thức thường sử dụng.

1.1 Một số khái niệm

1.1.1 Hệ số nhị thức

Định nghĩa 1.1 (Hệ số nhị thức)
Hệ số nhị thức ký hiệu $\binom{n}{k}$ *là hệ số của* x^k *trong khai triển của nhị thức*

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k.$$

$\binom{n}{k}$ *đọc là tổ hợp n chập k (n choose k).* △

Lưu ý rằng, một số quốc gia Châu Á trong đó có Việt Nam, thường ký hiệu tổ hợp n chập k là $\mathtt{C}_n^k$.
Trong toàn bộ chuyên đề này chúng ta sử dụng ký hiệu quốc tế $\binom{n}{k}$

TÍNH CHẤT 1.1 (QUY ƯỚC)–
$\binom{n}{k} = 0$ *nếu* $k > n \geq 0$ *hoặc* $k < 0 \leq n$. □

ĐỊNH LÝ 1.1 (CÔNG THỨC GIAI THỪA)–
Với mọi số nguyên không âm n và k ta có

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \tag{1.1}$$

với $n! = 1.2...n$ trong đó quy ước $0! = 1$. □

1.1.2 Luỹ thừa giảm, lũy thừa tăng

Định nghĩa 1.2 (Luỹ thừa giảm)
Lũy thừa giảm n của x là

$$x^{\underline{n}} = \underbrace{x(x-1)...(x-n+1)}_{n \text{ nhân tử}}$$

Quy ước $x^{\underline{0}} = 1$. △

Định nghĩa 1.3 (Luỹ thừa tăng)
Lũy thừa tăng n của x là

$$(x)_n = \underbrace{x(x+1)...(x+n-1)}_{n \text{ nhân tử}}$$

Ta khai triển như sau:

$$\begin{aligned}(x+x^{-1})^{8n} = (2+x^2+x^{-2})^{4n} &= \sum_{k=0}^{4n} \binom{4n}{k} 2^{4n-k}(x^2+x^{-2})^k \\ &= \sum_{k=0}^{4n}\sum_{j=0}^{k} \binom{4n}{k}\binom{k}{j} 2^{4n-k} x^{2k-2j} x^{-2j} \\ &= \sum_{k=0}^{4n}\sum_{j=0}^{k} \binom{4n}{k}\binom{k}{j} 2^{4n-k} x^{2k-4j}\end{aligned}$$

Từ đó: $2k - 4j = 4n$ hay $0 \leq k = 2n - 2j \leq 2n \Rightarrow 0 \leq j \leq n$
Do đó hệ số x^{4n} của khai triển trên sẽ là:

$$\langle x^{4n} \rangle \sum_{k=0}^{4n}\sum_{j=0}^{k} \binom{4n}{k}\binom{k}{j} 2^{4n-k} x^{2k-4j} = \sum_{j=0}^{n} \binom{4n}{2n-2j}\binom{2n-2j}{j} 4^{n+j}$$

Từ đó ta có thêm đẳng thức:

$$\binom{8n}{2n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{4n}{2n+2k}\binom{2n-2k}{k} 4^{n+k}$$

Bây giờ mà đảo chiều của tổng Vế Phải (thay k bởi $n-k$), ta có tiếp:

$$\binom{8n}{2n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{4n}{2k}\binom{2k}{n-k} 4^{2n-k}$$

Kết hợp với đề bài thì ta có đẳng thức

$$\sum_{k=0}^{n} 4^{n-k} \binom{4n}{2n+2k}\binom{2n+2k}{k} = \sum_{k=0}^{n} 4^{2n-k} \binom{4n}{2k}\binom{2k}{n-k}$$

Lưu ý rằng $\binom{2k}{n-k}$ chỉ $\neq 0$ khi $2k \geq n-k$ hay $k \geq \dfrac{n}{3}$
Như vậy:

$$\sum_{k=0}^{n} 4^{2n-k} \binom{4n}{2k}\binom{2k}{n-k} = \sum_{k=\lfloor \frac{n+2}{3} \rfloor}^{n} 4^{2n-k} \binom{4n}{2k}\binom{2k}{n-k}$$

Lời giải.
Biểu thức của vế phải cho ta thấy đó là hệ số của số hạng thứ $2n+1$ trong khai triển của nhị thức với bậc $8n$.
Ta có:

$$(x+y)^{8n} = \sum_{k=0}^{8n} \binom{8n}{k} x^{8n-k} y^k$$

Như vậy số hạng thứ $2n+1$ (tương ứng với $k=2n$) là $\binom{8n}{2n} x^{6n} y^{2n}$

Để cho đơn giản, ta cho $y = x^{-1}$ tức là $\binom{8n}{2n} = \langle x^{4n} \rangle (x+x^{-1})^{8n}$

Ký hiệu $\langle x^n \rangle f(x)$ ở đây nghĩa là *Hệ số của x^n trong khai triển $f(x)$*
Ta có:

$$\begin{aligned}
\binom{8n}{2n} &= \langle x^{4n} \rangle (x+x^{-1})^{8n} = \langle x^{4n} \rangle \left(x^2+x^{-2}+2\right)^{4n} \\
&= \langle x^{4n} \rangle \sum_{k=0}^{4n} \binom{4n}{k} \left(x^2+x^{-2}\right)^{4n-k} 2^k \\
&= \langle x^{4n} \rangle \sum_{k=0}^{4n} \sum_{j=0}^{4n-k} \binom{4n}{k} \binom{4n-k}{j} 2^k x^{8n-2k-2j} x^{-2j} \\
&= \langle x^{4n} \rangle \sum_{k=0}^{4n} \sum_{j=0}^{4n-k} \binom{4n}{k} \binom{4n-k}{j} 2^k x^{8n-4j-2k}
\end{aligned}$$

Như vậy các số hạng chứa x^{4n} tương ứng với k, j thoả $8n-4j-2k = 4n$ hay $k = 2n-2j$, khi đó $0 \le 2n-2j \le 2n \Rightarrow 0 \le j \le n$
Thay giá trị $k = 2n-2j$ và giới hạn của j vào biểu thức trên ta được:

$$\binom{8n}{2n} = \sum_{j=0}^{n} 2^{2n-2j} \binom{4n}{2n-2j} \binom{2n+2j}{j} = \sum_{k=0}^{n} 4^{n-k} \binom{4n}{2n+2k} \binom{2n+2k}{k} \blacksquare$$

Nhận xét. Cái hay của phương pháp này đó là: Bằng cách khai triển theo những cách khác nhau, ta có thể mở rộng được nhiều đẳng thức khác nhau từ bài toán ban đầu! Ví dụ: Từ đẳng thức:

$$\binom{8n}{2n} = \langle x^{4n} \rangle (x+x^{-1})^{8n}$$

Quy ước $\quad (x)_0 = 1$ $\triangle$

Tính chất 1.2– $\binom{n}{k} = \dfrac{n^{\underline{k}}}{k!} = \dfrac{(n-k+1)_k}{k!} = \dfrac{(-1)^k(-n)_k}{k!}$ $\square$

1.1.3 Khai triển nhị thức suy rộng với số mũ thực

Định lý 1.2– *Với mọi số thực x và s ta có*

$$\begin{aligned}
(1+x)^s &= \sum_{k=0}^{\infty} \binom{s}{k} x^k && (1.2)\\
&= 1 + \frac{s^{\underline{1}}}{1!}x + \frac{s^{\underline{2}}}{2!}x^2 + \cdots + \frac{s^{\underline{k}}}{k!}x^k + \cdots && (1.3)
\end{aligned}$$

$\square$

Chứng minh. Đặt $f(x) = (1+x)^s$, áp dụng khai triển Maclaurin cho $f(x)$, ta có lần lượt

$$\begin{aligned}
f(0) &= (1+x)^s\big|_{x=0} = s^{\underline{0}} \\
f'(0) &= s(1+x)^{s-1}\big|_{x=0} = s^{\underline{1}} \\
f''(0) &= s^{\underline{2}}(1+x)^{s-2}\big|_{x=0} = s^{\underline{2}} \\
\cdots &= \cdots \\
f^{(k)}(0) &= s^{\underline{k}}
\end{aligned}$$

Do đó

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \cdot x^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{s^{\underline{k}}}{k!} \cdot x^k$$

$\blacksquare$

Vì lý do trên nên người ta mở rộng hệ số nhị thức cho "cơ số" thực s bất kỳ như sau:

Định nghĩa 1.4 *Với $s \in \mathbb{R}$ và $k \in \mathbb{N}$*

$$\binom{s}{k} = \frac{s^{\underline{k}}}{k!} = \frac{s(s-1)\dots(s-k+1)}{k!}$$

$\binom{s}{k}$ *xác định như trên được gọi là hệ số nhị thức mở rộng.* $\triangle$

1.2 Các tính chất cơ bản

Tính chất 1.3 (Tính chất đối xứng)–
Với mọi số nguyên n, k thoả mãn $0 \le k \le n$ ta có

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} \qquad \square$$

Tính chất 1.4 (Công thức Pascal)–

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1} \qquad \square$$

Chứng minh. Chứng minh trực tiếp từ công thức giai thừa. ■

Từ công thức Pascal, người ta lập được bảng số sau, được gọi là Tam giác Pascal

n	$\binom{n}{0}$	$\binom{n}{1}$	$\binom{n}{2}$	$\binom{n}{3}$	$\binom{n}{4}$	$\binom{n}{5}$
0	1					
1	1	1				
2	1	2	1			
3	1	3	3	1		
4	1	4	6	4	1	
5	1	5	10	10	5	1
$\vdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$

$$\begin{array}{ccc} \bullet & \to & \bullet \\ & & \downarrow \\ & & \bullet \end{array}$$

Tam giác Pascal cho phép ta tính dần được các hệ số nhị thức. Mỗi số trong tam giác Pascal được xác định bởi tổng của hai số hạng hàng trên gần nhất phía bên trái (theo hướng mũi tên)

Tính chất 1.5 (Tổng theo cột)–

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{k}{m} = \binom{n+1}{m+1} \qquad \square$$

Ta có tiếp:

$$\begin{aligned}[x+(1+x)]^m(1+x)^n &= \sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}x^{m-k}(1+x)^{k+n} \\ &= \sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}x^{m-k}\sum_{j=0}^{n+k}\binom{n+k}{j}x^j \\ &= \sum_{k=0}^{m}\sum_{j=0}^{n+k}\binom{m}{k}\binom{n+k}{j}x^{m-k+j}\end{aligned}$$

Hệ số của x^n bao gồm tổng các số hạng thoả: $m-k+j=n$ hay $j=n+k-m$. Đó là:

$$\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}\binom{n+k}{n+k-m} \tag{2.4}$$

Tiếp theo:

$$\begin{aligned}(-1)^m[1-2(1+x)]^m(1+x)^n &= (-1)^m\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}(-2)^k(1+x)^{k+n} \\ &= (-1)^m\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}(-2)^k\sum_{j=0}^{n+k}\binom{n+k}{j}x^j \\ &= (-1)^m\sum_{k=0}^{m}\sum_{j=0}^{n+k}\binom{m}{k}\binom{n+k}{j}(-2)^kx^j\end{aligned}$$

Như vậy hệ số của x^n tương ứng với $j=n$. Đó là:

$$(-1)^m\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}\binom{n+k}{n}(-2)^k \tag{2.5}$$

Từ (2.2), (2.3), (2.4), (2.5) ta thu được các đẳng thức cần chứng minh. ■

Ví dụ 2.5. *Chứng minh đẳng thức:*

$$\sum_{k=0}^{n}4^{n-k}\binom{4n}{2n+2k}\binom{2n+2k}{k} = \binom{8n}{2n} \qquad \triangle$$

Nhận xét.
Bằng việc khai triển đẳng thức trên theo 2 cách khác nhau, ta thu được đẳng thức sau:

$$\sum_{\substack{k+4j=m \\ k,j\in\mathbb{N}}} (-1)^j \binom{n+k-1}{k}\binom{n}{j} = \sum_{k\geq 0}\binom{n}{k}\binom{n}{m-2k}$$

Ví dụ 2.4. *Với các số tự nhiên m, n thoả $m \leq n$. Chứng minh rằng:*

$$\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}\binom{k+n}{m} = \sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}\binom{n}{k}2^k = (-1)^m\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}\binom{n+k}{k}(-2)^k$$

△

Lời giải.
Ta tìm hệ số x^n trong các khai triển:

$$(-1)^m[1-2(1+x)]^m(1+x)^n = (1+2x)^m(1+x)^n = [x+(1+x)]^m(1+x)^n \tag{2.2}$$

Ta có:

$$\begin{aligned}(1+2x)^m(1+x)^n &= \sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}2^k x^k\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}x^j \\ &= \sum_{k=0}^{m}\sum_{j=0}^{n}\binom{m}{k}\binom{n}{j}2^k x^{k+j}\end{aligned}$$

Hệ số của x^n bao gồm tổng các số hạng thoả: $k + j = n$ hay $j = n - k$. Đó là:

$$\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}\binom{n}{n-k}2^k \tag{2.3}$$

Ví dụ 1.1.

n	$\binom{n}{1}$	$\binom{n}{2}$	$\binom{n}{3}$
2		1	
3		3	
4		6	
5		10	
6		15	
7			$\boxed{35}$

$1 + 3 + 6 + 10 + 15 = 35$

△

Chứng minh.

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}\binom{k}{m} &= \sum_{k=0}^{n}\left[\binom{k+1}{m+1}-\binom{k}{m+1}\right] && \text{(Theo công thức Pascal)} \\ &= \binom{n+1}{m+1}-\binom{0}{m+1} && \text{(Sai phân)} \\ &= \binom{n+1}{m+1}\end{aligned}$$

■

Tính chất 1.6 (Tổng theo đường chéo chính)–

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{m+k}{k} = \binom{m+n+1}{n}$$

□

Ví dụ 1.2.

n	$\binom{n}{0}$	$\binom{n}{1}$	$\binom{n}{2}$	$\binom{n}{3}$	$\binom{n}{4}$
2	1				
3		3			
4			6		
5				10	
6					15
7					$\boxed{35}$

$$1+3+6+10+15=35$$

△

Chứng minh.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n}\binom{m+k}{k} &= \sum_{k=0}^{n}\binom{m+k}{m} && \text{(Đối xứng)}\\
&= \binom{m+n+1}{m+1} && \text{(Tổng theo cột)}\\
&= \binom{m+n+1}{n} && \text{(Đối xứng)}
\end{aligned}$$

■

Tính chất 1.7 (Tổng theo đường chéo phụ (số Fibonacci))–

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n-k}{k}=F_{n+1}$$

□

Suy ra $(j,k)\in\{(0,10);\ (1,6);\ (2,2)\}$
Hệ số cần tìm có tất cả 3 số hạng tương ứng với (j,k) như trên là:

$$\binom{14+10}{10}\binom{15}{0}-\binom{14+6}{6}\binom{15}{1}+\binom{14+2}{2}\binom{15}{2}=1\,392\,456$$

■

Lời giải (2). - Khai triển trực tiếp
Một cách tổng quát:

$$\begin{aligned}
P(x)=(1+x+x^2+x^3)^n &= (1+x)^n(1+x^2)^n\\
&= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}x^{2j}\\
&= \sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{k}\binom{n}{j}x^{k+2j}
\end{aligned}$$

Hệ số của x^m trong khai triển trên sẽ tương ứng với các số hạng thoả $k+2j=m$ hay $k=m-2j$. Nghĩa là:

$$\langle x^m\rangle\,(1+x+x^2+x^3)^n=\sum_{j\ge 0}\binom{n}{j}\binom{n}{m-2j}$$

Ký hiệu: $\langle x^m\rangle\,f(x)$ nghĩa là hệ số của x^m trong khai triển $f(x)$
Với $n=15$ và $m=10$, ta có:

$$\begin{aligned}
\left\langle x^{10}\right\rangle(1+x+x^2+x^3)^{15} &= \sum_{j\ge 0}\binom{15}{j}\binom{15}{10-2j}\\
&= \binom{15}{0}\binom{15}{10}+\binom{15}{1}\binom{15}{8}+\binom{15}{2}\binom{15}{6}\\
&\quad+\binom{15}{3}\binom{15}{4}+\binom{15}{4}\binom{15}{2}+\binom{15}{5}\binom{15}{0}\\
&= 1\,392\,456
\end{aligned}$$

■

$$\Rightarrow S_{2m} = \frac{(2m)!(6m)!}{(4m)!(4m)!} \sum_{k+j=2m} (-1)^k \binom{4m}{k}\binom{4m}{j}$$

Xét đẳng thức:

$$(1-x^2)^{4m} = (1-x)^{4m}(1+x)^{4m}$$
$$\Leftrightarrow \sum_{k=0}^{4m} (-1)^k \binom{4m}{k} x^{2k} = \sum_{k=0}^{4m}\sum_{j=0}^{4m} (-1)^k \binom{4m}{k}\binom{4m}{j} x^{k+j}$$

Cân bằng hệ số x^{2m} ở đẳng thức trên ta có:

$$(-1)^m \binom{4m}{m} = \sum_{k+j=2m} (-1)^k \binom{4m}{k}\binom{4m}{j}$$

Từ đó suy ra:

$$S_{2m} = \frac{(2m)!(6m)!}{(4m)!(4m)!} \cdot \frac{(-1)^m (4m)!}{m!(3m)!} = \frac{(-1)^m (2m)!(6m)!}{m!(3m)!(4m)!} \qquad \blacksquare$$

Ví dụ 2.3. *Tìm hệ số x^{10} trong khai triển*

$$P(x) = (1+x+x^2+x^3)^{15} \qquad \triangle$$

Lời giải (1). - Dùng hệ số nhị thức mở rộng

$$\begin{aligned} P(x) &= \frac{(1-x^4)^{15}}{(1-x)^{15}} \\ &= (1-x)^{-15}(1-x^4)^{15} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-15}{k} (-1)^k x^k \sum_{j=0}^{15} \binom{15}{j} (-1)^j x^{4j} \\ &= \sum_{\substack{0\le j\le 15 \\ k\ge 0}} (-1)^j \binom{14+k}{k}\binom{15}{j} x^{k+4j} \end{aligned}$$

Ta cần tìm hệ số x^{10}, nghĩa là phải tìm tất cả nghiệm nguyên không âm của $k+4j=10$.

Ví dụ 1.3.

n	$\binom{n}{0}$	$\binom{n}{1}$	$\binom{n}{2}$	$\binom{n}{3}$	$\binom{n}{4}$	
2				F_6	F_7	$1+4+3=8=F_6$
3			3	1	F_8	$1+5+6+1=13=F_7$
4		4	6	4		$1+6+10+4=21=F_8$
5	1	5	10			
6	1	6				
7	1					

$\triangle$

Chứng minh.
Ta chứng minh đẳng thức trên bằng quy nạp theo n
Với $n=1$ và $n=2$ dễ thấy các tổng là: $\binom{0}{0} = 1 = F_1$ và

$$\binom{1}{0} + \binom{0}{1} = 1 = F_2$$

Giả sử đẳng thức đúng đến $n-1$.
Khi đó ta có:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n} \binom{n-k}{k} &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n-1-k}{k-1} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n-1-k}{k} \quad \text{(Pascal)} \\ &= \sum_{k=0}^{n-2} \binom{n-2-k}{k} + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1-k}{k} \\ &= F_{n-2} + F_{n-1} \quad \text{(giả thiết quy nạp)} \\ &= F_n \quad \text{(Công thức truy hồi dãy Fibonacci)} \qquad \blacksquare \end{aligned}$$

Tính chất 1.8 (Quy tắc "hút" (absorption))–
Với $0 < k \le n$, ta có:

$$\binom{n}{k} = \frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1} \qquad \square$$

Chứng minh. Chứng minh trực tiếp từ công thức giai thừa ■

TÍNH CHẤT 1.9 (CÔNG THỨC LÙI "CƠ SỐ")–
Với $0 \leq k < n$*, ta có:*

$$\binom{n}{k} = \frac{n}{n-k}\binom{n-1}{k}$$ □

Chứng minh. Chứng minh trực tiếp từ công thức giai thừa. ■

TÍNH CHẤT 1.10– *Tập con của tập con*
Với $0 \leq k \leq m \leq n$*, ta có:*

$$\binom{n}{m}\binom{m}{k} = \binom{n}{k}\binom{n-k}{m-k}$$ □

Chứng minh. Chứng minh trực tiếp từ công thức giai thừa ■

Một đẳng thức cũng hay được dùng đến là đẳng thức *Vandermonde*

TÍNH CHẤT 1.11 (ĐẲNG THỨC VANDERMONDE (2 THỪA SỐ))–
Cho các số nguyên không âm n, m, r*. Ta có:*

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\binom{m}{r-k} = \binom{n+m}{r}$$ □

Chứng minh.
Dựa vào đẳng thức: $(1+x)^n(1+x)^m = (1+x)^{n+m}$
Khai triển ra ta có:

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k\sum_{j=0}^{m}\binom{m}{j}x^j = \sum_{k=0}^{n+m}\binom{n+m}{k}x^k$$

$$\Leftrightarrow \sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\binom{n}{k}\binom{m}{j}x^{j+k} = \sum_{k=0}^{n+m}\binom{n+m}{k}x^k$$

Ví dụ 2.2.
a) Chứng minh đẳng thức:

$$S_n = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\binom{2n}{2k} = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\binom{3n}{n+k}$$

b) Tính S_{2m} $(m \in \mathbb{N})$ △

Lời giải.
Ta có đẳng thức: $(1-x^2)^n(1+x)^{2n} = (1-x)^n(1+x)^{3n}$.
Khai triển ra ta được:

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}x^{2k}\sum_{j=0}^{2n}\binom{2n}{j}x^j = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}x^k\sum_{j=0}^{2n}\binom{3n}{j}x^j$$

$$\Leftrightarrow \sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{2n}(-1)^k\binom{n}{k}\binom{2n}{j}x^{2k+j} = \sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{2n}(-1)^k\binom{n}{k}\binom{3n}{j}x^{i+j}$$

Tìm hệ số của x^{2n} trong cả hai khai triển trên ta có:

$$\sum_{2k+j=2n}(-1)^k\binom{n}{k}\binom{2n}{2n-2k} = \sum_{k+j=2n}(-1)^k\binom{n}{k}\binom{3n}{2n-k}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\binom{2n}{2k} = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\binom{3n}{n+k}$$

Đẳng thức $a)$ được chứng minh. Ta tiếp tục chứng minh đẳng thức $b)$.
Ta có:

$$\begin{aligned}
S_n &= \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\binom{3n}{n+k}\\
&= \sum_{k=0}^{n}\frac{n!(3n)!(-1)^k}{k!(n-k)!(n+k)!(2n-k)!}\\
&= \frac{n!(3n)!}{(2n)!(2n)!}\sum_{k=0}^{n}\frac{(2n)!(2n)!(-1)^k}{k!(2n-k)!(n+k)!(n-k)!}\\
&= \frac{n!(3n)!}{(2n)!(2n)!}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{2n}{k}\binom{2n}{n-k}
\end{aligned}$$

2.1 Khai triển số thực

Ví dụ 2.1. *Chứng minh đẳng thức*

$$\sum_{k=0}^{2n}(-1)^k\binom{2n}{k}^2=(-1)^n\binom{2n}{n}$$ △

Lời giải.
Xét đẳng thức

$$(1-x^2)^{2n}=(1-x)^{2n}(1+x)^{2n} \tag{2.1}$$

Khai triển Vế Trái của (2.1), ta có:

$$(1-x^2)^{2n}=\sum_{k=0}^{2n}\binom{2n}{k}(-1)^k x^{2k}$$

Hệ số của x^{2n} trong khai triển trên tương ứng với số hạng $k=n$ là $(-1)^n\binom{2n}{n}$.
Khai triển Vế Phải của (2.1), ta được:

$$\begin{aligned}(1-x)^{2n}(1+x)^{2n}&=\sum_{k=0}^{2n}\binom{2n}{k}(-1)^k x^k\sum_{j=0}^{2n}\binom{2n}{j}x^j\\&=\sum_{k=0}^{2n}\sum_{j=0}^{2n}(-1)^k\binom{2n}{k}\binom{2n}{j}x^{j+k}\end{aligned}$$

Như vậy, hệ số của x^{2n} trong khai triển trên tương ứng với các số hạng thoả $k+j=2n$ là

$$\sum_{k+j=2n}(-1)^k\binom{2n}{k}\binom{2n}{j}=\sum_{k=0}^{2n}(-1)^k\binom{2n}{k}\binom{2n}{2n-k}=\sum_{k=0}^{2n}(-1)^k\binom{2n}{k}^2$$

Từ đó suy ra đẳng thức cần chứng minh. ■

So sánh hệ số của x^r ở hai vế ta có:

$$\begin{aligned}&\sum_{j+k=r}\binom{n}{k}\binom{m}{j}=\binom{n+m}{r}\\ \Leftrightarrow&\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\binom{m}{r-k}=\binom{n+m}{r}\end{aligned}$$ ■

Chứng minh tương tự ta có đẳng thức mở rộng sau:

Tính chất 1.12 (Đẳng thức Vandermonde (mở rộng))–
Cho các số nguyên không âm $n_1,\dots,n_r,k=k_1+k_2+...+k_r$. *Ta có:*

$$\sum_{k_1+k_2+...+k_r=k}\binom{n_1}{k_1}\binom{n_2}{k_2}\cdots\binom{n_r}{k_r}=\binom{n_1+n_2+\cdots+n_r}{k}$$ □

Chương

2

Phương pháp cân bằng hệ số chứng minh đẳng thức tổ hợp

Trần Trung Kiên (Ispectorgadget)

Trần Quốc Nhật Hân (perfectstrong)

Hoàng Xuân Thanh (hxthanh)

Lê Kim Nhã (gogo123)

Tóm tắt nội dung

Phương pháp cân bằng hệ số là một trong những phương pháp khá hay và mạnh trong các bài toán tính tổng có chứa hệ số nhị thức. Cơ sở của phương pháp là việc đồng nhất hai đa thức bằng nhau (có thể là chuỗi luỹ thừa).

Từ một hằng đẳng thức, ta khai triển thành đa thức theo 2 cách khác nhau, thì hai đa thức thu được vẫn phải là như nhau. Từ đó ta suy ra được hệ số của số hạng bậc nào đó trong 2 khai triển là bằng nhau, là điều cần chứng minh hoặc yêu cầu tính của đề bài.