Vậy ta có:

$$S = \frac{(2n)!}{2^n.m!(n-m)!}\cdot A = \frac{(2n)!2^m.n(n+1)...(n+m-1)}{2^n.m!(n-m)!(2m-1)!!(2n-1)!!}$$
$$= \frac{2^{2m}.n(n+m-1)!}{(2m)!(n-m)!} \qquad \blacksquare$$

Bài toán 3.4. *Chứng minh đẳng thức:*

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{\binom{n}{k}^2}{(2k+1)\binom{2n}{2k}} = \frac{2^{4n}(n!)^4}{(2n)!(2n+1)!} \qquad \triangle$$

Nhận xét. Đây là một bài toán rất khó! Tưởng như ngoài cách giải bằng hàm sinh và kiến thức về chuỗi hàm luỹ thừa, thì không có một phương pháp sơ cấp nào có thể tiếp cận được bài này!
Tác giả đã khá "may mắn" khi tìm được một lời giải bằng SPTP 3.2 sau đây:

Lời giải.
Trước hết ta đưa tổng cần tính về dạng:

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{\binom{n}{k}^2}{(2k+1)\binom{2n}{2k}} = \sum_{k=0}^{n}\frac{\binom{n}{k}n!(2k)!(2n-2k)!}{k!(n-k)!(2n)!(2k+1)}$$
$$= \sum_{k=0}^{n}\frac{\binom{n}{k}n!2^k k!(2k-1)!!2^{n-k}(n-k)!(2n-2k-1)!!}{k!(n-k)!(2n)!(2k+1)}$$
$$= \frac{2^n.n!}{(2n)!}\sum_{k=0}^{n}\frac{\binom{n}{k}(2k-1)!!(2n-2k-1)!!}{2k+1}$$

Lời giải.
Xét các khai triển

$$(\sqrt{3}+x)^{2n} = \sum_{k=0}^{2n}\binom{2n}{k}(\sqrt{3})^{2n-k}x^k$$
$$(\sqrt{3}-x)^{2n} = \sum_{k=0}^{2n}\binom{2n}{k}(\sqrt{3})^{2n-k}(-1)^k x^k$$

Vậy

$$T = 3^n\binom{2n}{0} + 3^{n-1}x^2\binom{2n}{2} + 3^{n-2}x^4\binom{2n}{4} + ... + +x^{2n}\binom{2n}{2n}$$
$$= \frac{1}{2}\left[(\sqrt{3}+x)^{2n} + (\sqrt{3}-x)^{2n}\right]$$

Chọn $x = i$ thì
$(\sqrt{3}+i)^{2n} = 2^{2n}\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)^{2n} = 2^{2n}\left(\cos\frac{n\pi}{3} + i\sin\frac{n\pi}{3}\right)$
$(\sqrt{3}-i)^{2n} = 2^{2n}\left[\cos\left(\frac{-\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{-\pi}{6}\right)\right]^{2n} = 2^{2n}\left(\cos\frac{n\pi}{3} - i\sin\frac{n\pi}{3}\right)$
Suy ra $A = 2^{2n}\cos\frac{n\pi}{3}$.
Với $n = 2m$, chọn $x = 1$ thì

$$A' = 3^{2m}\binom{4m}{0} + 3^{2m-1}\binom{4m}{2} + 3^{3m-2}\binom{4m}{4} + ... + 3\binom{4m}{4m-2} + \binom{4m}{4m}$$
$$= 2^{2m-1}[(2+\sqrt{3})^{2m} + (2-\sqrt{3})^{2m}]$$
$$A = 3^{2m}\binom{4m}{0} - 3^{2m-1}\binom{4m}{2} + 3^{2m-2}\binom{4m}{4} + ... + \binom{4m}{4m} = 2^{4m}\cos\frac{2m\pi}{3}$$

Do đó

$$B = \frac{A+A'}{2} = 2^{2m-2}[(2+\sqrt{3})^{2m} + (2-\sqrt{3})^{2m}] + 4^{4m-1}\cos\frac{2m\pi}{3} \qquad \blacksquare$$

Ví dụ 2.11. *Chứng minh*

$$\binom{n}{0}+\binom{n}{3}+\binom{n}{6}+\binom{n}{9}+...=\frac{1}{3}\left(2^n+2\cos\frac{\pi n}{3}\right)$$
$$\binom{n}{1}+\binom{n}{4}+\binom{n}{7}+\binom{n}{10}+...=\frac{1}{3}\left(2^n+2\cos\frac{n-2}{3}\pi\right)$$
$$\binom{n}{2}+\binom{n}{5}+\binom{n}{8}+\binom{n}{11}+...=\frac{1}{3}\left(2^n+2\cos\frac{n-4}{3}\pi\right)\qquad\triangle$$

Lời giải.
Ta có:
$$1+\cos\varphi+i\sin\varphi=2\cos\frac{\varphi}{2}\left(\cos\frac{\varphi}{2}+i\sin\frac{\varphi}{2}\right)$$
Đặt $\varepsilon=\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}$, ta có $\varepsilon^k=1\Leftrightarrow k=3m$ và
$$1+\varepsilon^k+\varepsilon^{2k}=\frac{1-\varepsilon^{3k}}{1-\varepsilon^k}=0$$
với mọi k không là bội của 3.
Xét các khai triển
$$\begin{aligned}2^n&=(1+1)^n=\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+...+\binom{n}{n-1}+\binom{n}{n}\\(1+\varepsilon)^n&=\binom{n}{0}+\varepsilon\binom{n}{1}+...+\varepsilon^{n-1}\binom{n}{n-1}+\varepsilon^n\binom{n}{n}\\(1+\varepsilon)^{2n}&=\binom{n}{0}+\varepsilon^2\binom{n}{1}+...+\varepsilon^{2n-2}\binom{n}{n-1}+\varepsilon^{2n}\binom{n}{n}\end{aligned}$$
Ta có:
$$\begin{aligned}(1+\varepsilon)^n&=\left(1+\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)^n=2^n\cos^n\frac{\pi}{3}\left(\cos\frac{n\pi}{3}+i\sin\frac{n\pi}{3}\right)\\(1+\varepsilon^2)^n&=\left(1+\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}\right)^n=2^n\cos^n\frac{2\pi}{3}\left(\cos\frac{2n\pi}{3}+i\sin\frac{2n\pi}{3}\right)\\&=2^n\cos^n\frac{\pi}{3}\left(\cos\frac{\pi n}{3}-i\sin\frac{n\pi}{3}\right)\end{aligned}$$

Tương tự
$$\begin{cases}(-1)^k\binom{m-1}{k}=\Delta\left[(-1)^{k-1}\binom{m-2}{k-1}\right]\\ \Delta\left[\dfrac{(-1)^k}{(2k+1)!!(2n-2k-1)!!}\right]=\\ \qquad=\dfrac{(-1)^{k+1}}{(2k+3)!!(2n-2k-3)!!}-\dfrac{(-1)^k}{(2k+1)!!(2n-2k-1)!!}\\ \qquad=\dfrac{(-1)^{k+1}(2n+2)}{(2k+3)!!(2n-2k-1)!!}\end{cases}$$

Áp dụng SPTP 3.2 cho A_1, ta được:
$$\begin{aligned}A_1&=(-1)^{k-1}\binom{m-2}{k-1}\cdot\frac{(-1)^k}{(2k+1)!!(2n-2k-1)!!}\Bigg|_{k=0}^{m}\\&\quad-\sum_{k=0}^{m-1}\left[(-1)^k\binom{m-2}{k}\cdot\frac{(-1)^{k+1}(2n+2)}{(2k+3)!!(2n-2k-1)!!}\right]\\&=(2n+2)\sum_{k=0}^{m-2}\frac{\binom{m-2}{k}}{(2k+3)!!(2n-2k-1)!!}\\&=(2n+2)A_2\end{aligned}$$

...Tiếp tục quá trình trên cho đến khi, ta được:
$$A_m=\sum_{k=0}^{m-m}\frac{\binom{m-m}{k}}{(2k+2m-1)!!(2n-2k-1)!!}=\frac{1}{(2m-1)!!(2n-1)!!}$$

Từ các đẳng thức trên suy ra:
$$A=(2n)(2n+2)...(2n+2m-2).A_m=\frac{2^m.n(n+1)...(n+m-1)}{(2m-1)!!(2n-1)!!}$$

Xét tổng:

$$A=\sum_{k=0}^{m}\frac{\binom{m}{k}}{(2k-1)!!(2n-2k-1)!!}$$

Ta có:

$$\begin{cases}(-1)^k\binom{m}{k}=\Delta\left[(-1)^{k-1}\binom{m-1}{k-1}\right]\\[2ex] \Delta\left[\dfrac{(-1)^k}{(2k-1)!!(2n-2k-1)!!}\right]=\\ \qquad =\dfrac{(-1)^{k+1}}{(2k+1)!!(2n-2k-3)!!}-\dfrac{(-1)^k}{(2k-1)!!(2n-2k-1)!!}\\ \qquad =\dfrac{(-1)^{k+1}(2n)}{(2k+1)!!(2n-2k-1)!!}\end{cases}$$

Áp dụng SPTP 3.2 cho A, ta được:

$$\begin{aligned}A&=(-1)^{k-1}\binom{m-1}{k-1}\cdot\frac{(-1)^k}{(2k-1)!!(2n-2k-1)!!}\Bigg|_{k=0}^{m+1}\\ &\quad-\sum_{k=0}^{m}\left[(-1)^k\binom{m-1}{k}\cdot\frac{(-1)^{k+1}(2n)}{(2k+1)!!(2n-2k-1)!!}\right]\\ &=(2n)\sum_{k=0}^{m-1}\frac{\binom{m-1}{k}}{(2k+1)!!(2n-2k-1)!!}\\ &=(2n)A_1\end{aligned}$$

Gọi vế trái các đẳng thức cần chứng minh lần lượt là S_1,S_2,S_3 thì

$$3S_1=(1+1)^n+(1+\varepsilon)^n+(1+\varepsilon^2)^n=2^n+2.2^n\cos^n\frac{\pi}{3}\cos\frac{n\pi}{3}$$

Hay

$$\binom{n}{0}+\binom{n}{3}+\binom{n}{9}+...=\frac{1}{3}\left(2^n+2\cos\frac{n\pi}{3}\right)$$

$$\begin{aligned}3S_1&=(1+1)^n+\varepsilon^2(1+\varepsilon)^n+\varepsilon(1+\varepsilon^2)^n\\ &=2^n+\varepsilon^2\left(\cos\frac{n\pi}{2}+i\sin\frac{n\pi}{3}\right)+\varepsilon\left(\cos\frac{2n\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi n}{3}\right)\end{aligned}$$

Suy ra

$$\begin{aligned}\binom{n}{1}+\binom{n}{4}+\binom{n}{7}+...&=\frac{1}{3}\left(2^n+2\cos\frac{n-2}{3}\pi\right)\\ &=2^n\varepsilon^2\left(\cos\frac{n\pi}{3}+i\sin\frac{n\pi}{3}\right)+\varepsilon\left(\cos\frac{2n\pi}{3}+i\sin\frac{2n\pi}{3}\right)\end{aligned}$$

Suy ra

$$\binom{n}{2}+\binom{n}{5}+\binom{n}{8}+\binom{n}{11}+...=\frac{1}{3}\left(2^n+2\cos\frac{n-4}{3}\pi\right)$$ ■

Nhận xét. Điểm mấu chốt của lời giải là sử dụng tính chất căn bậc 3 của đơn vị và công thức Moivre. Chúng ta xét thêm một ví dụ nữa để làm rõ hơn nữa cách giải dạng toán này (Hoàn toàn tương tự cho lời giải bài toán tổng quát).

Ví dụ 2.12. *Tính tổng*

$$S=\binom{n}{0}+\binom{n}{6}+\binom{n}{12}+\binom{n}{18}+...$$ △

Lời giải.
Khoảng cách của hai chỉ số trên liên tiếp là 6 nên xét số phức

$$\varepsilon=\cos\frac{2\pi}{6}+i\sin\frac{2\pi}{6}=\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}$$

Ta thấy $\varepsilon^k = 1$ khi và chỉ khi k là bội của 6, và với mọi k không chia hết cho 6 thì

$$1+\varepsilon^k+\varepsilon^{2k}+\varepsilon^{3k}+\varepsilon^{4k}+\varepsilon^{5k}=\frac{1-\varepsilon^{6k}}{1-\varepsilon^k}=0$$

Ta có:

$$(1+1)^n+(1+\varepsilon)^n+(1+\varepsilon^2)^n+(1+\varepsilon^3)^n+(1+\varepsilon^4)^n+(1+\varepsilon^5)^n=6S$$

Rõ ràng $\overline{\varepsilon}=\cos\frac{\pi}{3}-i\sin\frac{\pi}{3}, \varepsilon^3=-1$ và $\varepsilon^6=1=\varepsilon.\overline{\varepsilon}$ nên $\varepsilon^{6-p}=\overline{\varepsilon^p}$

Do đó:

$$(1+\varepsilon^5)^n=(1+\overline{\varepsilon})^n,\ (1+\varepsilon^4)^n=(1+\overline{\varepsilon}^2)^n$$

$$\begin{aligned}1+\varepsilon &= \sqrt{3}\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)\\ 1+\overline{\varepsilon} &= \sqrt{3}\left(\cos\frac{\pi}{6}-i\sin\frac{\pi}{6}\right)\\ 1+\varepsilon^2 &= \cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\\ 1+\overline{\varepsilon}^2 &= \cos\frac{\pi}{3}-i\sin\frac{\pi}{3}\end{aligned}$$

Suy ra

$$\begin{aligned}6S &= 2^n+(1+\varepsilon)^n+(1+\overline{\varepsilon})^n+(1+\varepsilon^2)^n+(1+\overline{\varepsilon}^2)^n\\ &= 2^n+(\sqrt{3})^n\left(\cos\frac{n\pi}{6}+i\sin\frac{n\pi}{6}\right)+(\sqrt{3})^n\left(\cos\frac{n\pi}{6}+i\sin\frac{n\pi}{6}\right)\\ &= 2^n+2(\sqrt{3})^n\cos\frac{n\pi}{6}+2\cos\frac{n\pi}{3}\end{aligned}$$

Vậy ta có:

$$S=\frac{1}{3}\left[2^{n-1}+(\sqrt{3})^n\cos\frac{n\pi}{6}+\cos\frac{n\pi}{3}\right] \quad \blacksquare$$

Ví dụ 2.13. *Tính tổng*

$$T_2=1\binom{8n}{1}-3\binom{8n}{3}+\ldots-(8n-1)\binom{8n}{8n-1} \quad \triangle$$

...Tiếp tục quá trình trên cho đến khi, ta được:

$$A_n=\sum_{k=0}^{n-n}\binom{n-n}{k}(2k-1)!!(2n-2k-(2n+1))!!=1$$

Từ các đẳng thức trên suy ra:

$$A=(2n)(2n-2)...2.A_n=2^n.n!$$

Vậy ta có:

$$S=\frac{2^n}{n!}\cdot A=4^n \quad \blacksquare$$

Bài toán 3.3. *Với các số tự nhiên m,n thoả mãn $n\geq m$*
Chứng minh rằng:

$$\sum_{k=0}^{m}\binom{2n}{2k}\binom{n-k}{m-k}=\frac{2^{2m}.n(n+m-1)!}{(2m)!(n-m)!} \quad \triangle$$

Lời giải.
Tư tưởng bài này hoàn toàn tương tự bài toán trên.
Ta phân tích đề bài dưới dạng:

$$\begin{aligned}S &= \sum_{k=0}^{m}\binom{2n}{2k}\binom{n-k}{m-k}\\ &= \sum_{k=0}^{m}\frac{(2n)!(n-k)!}{(2k)!(2n-2k)!(n-m)!(m-k)!}\\ &= \sum_{k=0}^{m}\frac{(2n)!(n-k)!m!}{2^k.k!(2k-1)!!2^{n-k}.(n-k)!(2n-2k-1)!!(n-m)!(m-k)!m!}\\ &= \frac{(2n)!}{2^n.m!(n-m)!}\sum_{k=0}^{m}\frac{\binom{m}{k}}{(2k-1)!!(2n-2k-1)!!}\\ &= \frac{(2n)!}{2^n.m!(n-m)!}\cdot A\end{aligned}$$

Ta có:

$$\begin{cases} (-1)^k\binom{n}{k} = \Delta\left[(-1)^{k-1}\binom{n-1}{k-1}\right] \\ \Delta\left[(-1)^k(2k–1)!!(2n– 2k– 1)!!\right] = (2n)(-1)^{k+1}(2k– 1)!!(2n– 2k– 3)!! \end{cases}$$

Áp dụng SPTP 3.2 cho A, ta được:

$$\begin{aligned} A &= (-1)^{k-1}\binom{n-1}{k-1}(-1)^k(2k-1)!!(2n-2k-1)!!\Big|_{k=0}^{n+1} \\ &\quad - \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n-1}{k}(2n)(-1)^{k+1}(2k-1)!!(2n-2k-3)!! \\ &= (2n)\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}(2k-1)!!(2n-2k-3)!! \\ &= (2n)A_1 \end{aligned}$$

Tương tự:

$$\begin{cases} (-1)^k\binom{n-1}{k} = \Delta\left[(-1)^{k-1}\binom{n-2}{k-1}\right] \\ \Delta\left[(-1)^k(2k-1)!!(2n-2k-3)!!\right] = \\ \qquad\qquad = (2n-2)(-1)^{k+1}(2k-1)!!(2n-2k-5)!! \end{cases}$$

Áp dụng SPTP 3.2 cho A_1, ta được:

$$\begin{aligned} A_1 &= (-1)^{k-1}\binom{n-2}{k-1}(-1)^k(2k-1)!!(2n-2k-3)!!\Big|_{k=0}^{n} \\ &\quad - \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\binom{n-2}{k}(2n-2)(-1)^{k+1}(2k-1)!!(2n-2k-5)!! \\ &= (2n-2)\sum_{k=0}^{n-2}\binom{n-2}{k}(2k-1)!!(2n-2k-5)!! \\ &= (2n-2)A_2 \end{aligned}$$

Lời giải.
Trước tiên ta phải dùng đạo hàm để có được hệ số đứng trước tổ hợp.
Xét đa thức

$$f(x) = (1+x)^{8n} = \binom{8n}{0} + \sum_{k=1}^{8n}\binom{n}{k}x^k$$

$$\Rightarrow f'(x) = 8n(1+x)^{8n-1} = \sum_{k=0}^{8n}k\binom{n}{k}x^{k-1}$$

Lại nhân với x ta được $g(x) = 8nx(1+x)^{8n-1} = \sum_{k=0}^{8n}k\binom{n}{k}x^k$ Nhận thấy T_2 chính là phần ảo của

$$g(i) = 8ni(1+i)^{8n-1} = 4n.16^n + 4n.16^n i$$

Do đó $T_2 = 4n.16^n$
Tương tự ta dùng đạo hàm 2 lần để tính tổng

$$2^2\binom{8n}{2} - 4^2\binom{8n}{4} + 6^2\binom{8n}{6} - ... - (8n)^2\binom{8n}{8n}$$

$$\begin{aligned} (1+x)^{8n} &= \binom{8n}{0} + \sum_{k=1}^{8n}\binom{8n}{k}x^k \\ \Rightarrow \quad 8n(1+x)^{8n-1} &= \sum_{k=1}^{8n}k\binom{8n}{k}x^{k-1} \\ \Leftrightarrow \quad 8nx(1+x)^{8n-1} &= \sum_{k=1}^{8n}k\binom{8n}{k}x^k \\ \Rightarrow \quad 8n(1+x)^{8n-2}(1+8nx) &= \sum_{k=1}^{8n}k^2\binom{8n}{k}x^{k-1} \\ \Leftrightarrow \quad 8nx(1+x)^{8n-2}(1+8nx) &= \sum_{k=1}^{8n}k^2\binom{8n}{k}x^k = f(x) \end{aligned}$$

Tổng cần tìm chính là phần thực của

$$f(i) = 8nf(1+i)^{8n-2}(1+8ni) = 16^{n-1} + 128n^2.16^{n-2}i. \quad \blacksquare$$

Ví dụ 2.14 (T7/248-THTT).
Chứng minh đẳng thức sau với n là số nguyên dương:

$$\left[\sum_{0\le 2k\le n}(-1)^k\binom{n}{2k}\right]^2 + \left[\sum_{0\le 2k+1\le n}(-1)^k\binom{n}{2k+1}\right]^2 = 2^n \quad \triangle$$

Lời giải.
Xét số phức $z = 1+i$, sử dụng khai triển nhị thức Newton ta có

$$\begin{aligned} z^n = (1+i)^n &= \sum_{k=0}^{n} i^k\binom{n}{k} \\ &= \sum_{0\le 2k\le n}(-1)^k\binom{n}{2k} + i.\sum_{0\le 2k+1\le n}(-1)^k\binom{n}{2k+1} \end{aligned}$$

Lấy module hai vế

$$|z^n| = \sqrt{\left[\sum_{0\le 2k\le n}(-1)^k\binom{n}{2k}\right]^2 + \left[\sum_{0\le 2k\le n}(-1)^k\binom{n}{2k+1}\right]^2}$$

Mặt khác:

$$z^n = \left[\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)\right]^n = \sqrt{2}^n\left(\cos\frac{n\pi}{4} + i\sin\frac{n\pi}{4}\right)$$

Từ đó ta có $|z^n|^2 = 2^n$, là điều phải chứng minh
Chú ý: Nếu số phức $z = \cos\varphi + i\sin\varphi$ thì:

$$z^n = (\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi$$

Nhận xét. Bài này ta không thể đem cả biểu thức lấy tổng mà sai phân được, khi đó tổng thu được còn phức tạp hơn nhiều!
Điều tương tự cũng xảy ra khi ta đem sai phân các thành phần.
Vậy ta phải làm thế nào?
Ý tưởng là ta sẽ biến đổi đề bài để làm xuất hiện một biểu thức sai phân quen thuộc: $(-1)^k\binom{n}{k}$

Lời giải.
Để ý rằng:

$$(2n)! = [1.3...(2n-1)].[2.4...(2n)] = 2^n.n!(2n-1)!! \quad (n>0)$$

Còn nếu $n=0$ thì: $1 = 0! = (2.0)! = 2^0.0!(2.0-1)!! = (-1)!!$
Ta viết lại tổng đã cho dưới dạng:

$$\begin{aligned} S &= \sum_{k=0}^{n}\binom{2k}{k}\binom{2n-2k}{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^{n}\frac{(2n)!(2n-2k)!}{k!k!(n-k)!(n-k)!} \\ &= \sum_{k=0}^{n}\frac{2^n.n!(2n-1)!!2^{n-k}.(n-k)!(2n-2k-1)!!}{k!k!(n-k)!(n-k)!} \\ &= \sum_{k=0}^{n}\frac{2^n(2k-1)!!(2n-2k-1)!!n!}{k!(n-k)!n!} \\ &= \frac{2^n}{n!}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(2k-1)!!(2n-2k-1)!! \\ &= \frac{2^n}{n!}A \end{aligned}$$

Với tổng:

$$A = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(2k-1)!!(2n-2k-1)!!$$

khi đó $\binom{2n}{k+1} = 0$ khi $k = 2n$ và phân thức khi đó sẽ không xác định!
Để tránh điều đó xảy ra ta cần phải tính tách riêng số hạng cuối.
Ta có:

$$S = 1 + \sum_{k=0}^{2n-1} \frac{-2k-1}{4n} \Delta \left[\frac{(-1)^k \binom{4n}{2k}}{\binom{2n}{k}} \right]$$

Dễ dàng tính được $\Delta \left(\frac{-2k-1}{4n} \right) = -\frac{1}{2n}$
Bây giờ, áp dụng SPTP 3.2 thì ta được:

$$\begin{aligned}
S &= 1 + \left[\frac{-2k-1}{4n} \cdot \frac{(-1)^k \binom{4n}{2k}}{\binom{2n}{k}} \right] \Bigg|_{k=0}^{2n} - \sum_{k=0}^{2n-1} \frac{-1}{2n} \cdot \frac{(-1)^{k+1} \binom{4n}{2k+2}}{\binom{2n}{k+1}} \\
&= 1 + \frac{-4n-1}{4n} - \frac{-1}{4n} + \frac{1}{2n} \sum_{k=0}^{2n-1} \frac{(-1)^{k+1} \binom{4n}{2k+2}}{\binom{2n}{k+1}} \\
&= \frac{1}{2n} \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^k \binom{4n}{2k}}{\binom{2n}{k}} \quad \text{(Tịnh tiến 1)} \\
&= \frac{1}{2n} \cdot S - \frac{1}{2n} \quad \text{(Thêm bớt số hạng } k = 0\text{)}
\end{aligned}$$

Từ đó suy ra

$$S = \frac{-1}{2n-1}$$

■

Bài toán 3.2. *Chứng minh đẳng thức:*

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{2k}{k} \binom{2n-2k}{n-k} = 4^n$$

△

$$\begin{aligned}
(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = &\sum_{0\le 2k\le n} (-1)^k \binom{n}{2k} . \cos^{n-2k}\varphi \sin^{2k}\varphi \\
&+ i. \sum_{0\le 2k+1\le n} (-1)^k \binom{n}{2k+1} \cos^{n-2k-1}\varphi \sin^{2k+1}\varphi
\end{aligned}$$

Do đó lấy module hai vế ta có:

$$\begin{aligned}
&\left[\sum_{0\le 2k\le n} (-1)^k \binom{n}{2k} . \cos^{n-2k}\varphi \sin^{2k}\varphi \right]^2 \\
&\quad + \left[\sum_{0\le 2k\le n} (-1)^k \binom{n}{2k+1} . \cos^{n-2k-1}\varphi \sin^{2k+1}\varphi \right]^2 = 1
\end{aligned}$$

Xét $\varphi = \frac{\pi}{4}$ ta có kết quả bài toán trên.
Xét $\varphi = \frac{\pi}{3}$ thì $\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}, \quad \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ nên ta có đẳng thức:

$$\left[\sum_{0\le 2k\le n} (-3)^k \binom{n}{2k} \right]^2 + 3 \left[\sum_{0\le 2k+1\le n} (-3)^k \binom{n}{2k+1} \right]^2 = 4^n$$

■

Ví dụ 2.15. *Chứng minh rằng*

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 \cos kx = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2k} \binom{2k}{k} \left(2\cos\frac{x}{2} \right)^{n-2k} \cos\frac{nx}{2}, \quad x \in [0; \pi]$$

△

Lời giải.
Đặt

$$A_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 \cos kx, \quad B_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 \sin kx$$

Ta có:

$$A_n + iB_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 (\cos kx + i\sin kx) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 (\cos x + i\sin x)^k$$

Xét hệ số y^n từ hằng đẳng thức $(1+y)^n(1+zy)^n = [1+(1+z)y+zy^2]^n$ ta có

$$\sum_{\substack{k+l=n\\0\le k,l\le n}} \binom{n}{k}\cdot\binom{n}{l} z^l = \sum_{\substack{k+l+s=n\\0\le k,l,s\le n}} \frac{n!}{k!l!s!}(z+1)^l z^s$$

Hay viết lại dưới dạng

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 z^k = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2}\rfloor} \binom{n}{2k}\binom{2k}{k}(z+1)^{n-2k} z^k$$

Xét $z = \cos x + i\sin x$ thì
$1 + z = 1 + \cos x + i\sin x = 2\cos\frac{x}{2}\left(\cos\frac{x}{2} + i\sin\frac{x}{2}\right)$ nên với $x \in [0;\pi]$
ta có

$$\begin{aligned}
A_n + iB_n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 (\cos x + i\sin x)^k \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 z^k \\
&= \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2}\rfloor} \binom{n}{2k}\binom{2k}{k}(z+1)^{n-2k} z^k \\
&= \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2}\rfloor} \binom{n}{2k}\binom{2k}{k}\left(2\cos\frac{x}{2}\right)^{n-2k}\left[\cos\frac{x(n-2k)}{2}\right. \\
&\qquad\qquad \left. + i\sin\frac{x(n-2k)}{2}\right](\cos kx + i\sin kx) \\
&= \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2}\rfloor} \binom{n}{2k}\cdot\binom{2k}{k}\left(2.\cos\frac{x}{2}\right)^{n-2k}\left(\cos\frac{nx}{2} + i\sin\frac{nx}{2}\right)
\end{aligned}$$

Nhận xét. Đối với bài toán này ta rất khó đoán biết được đâu sẽ là $\Delta f(k)$ đâu sẽ là $g(k)$ trong biểu thức lấy tổng.
Trong đa số trường hợp như vậy, ta phải tiếp cận bài toán bằng cách giả tính sai phân $\Delta f(k)$ trước!
$f(k)$ có thể là một thành phần (phức tạp nhất) hoặc toàn bộ biểu thức lấy tổng.
Trong trường hợp này ta sẽ tính Sai phân của cả biểu thức lấy tổng.

Lời giải.
Ta có:

$$\begin{aligned}
\Delta\left[\frac{(-1)^k\binom{4n}{2k}}{\binom{2n}{k}}\right] &= \frac{(-1)^{k+1}\binom{4n}{2k+2}}{\binom{2n}{k+1}} - \frac{(-1)^k\binom{4n}{2k}}{\binom{2n}{k}} \\
&= (-1)^{k+1}\left[\frac{\frac{(4n-2k)(4n-2k-1)}{(2k+2)(2k+1)}\binom{4n}{2k}}{\frac{2n-k}{k+1}\binom{2n}{k}} + \frac{\binom{4n}{2k}}{\binom{2n}{k}}\right] \\
&= \frac{(-1)^{k+1}4n\binom{4n}{2k}}{(2k+1)\binom{2n}{k}}
\end{aligned}$$

Như vậy là sau khi ta lấy sai phân của toàn bộ biểu thức lấy tổng ta được một biểu thức mới, "thừa ra" một nhân tử $\left(-\frac{4n}{2k+1}\right)$

Nhưng nếu ta viết:

$$S = \sum_{k=0}^{2n} \frac{-2k-1}{4n}\Delta\left[\frac{(-1)^k\binom{4n}{2k}}{\binom{2n}{k}}\right]$$

thì không ổn, vì sao?
Vì khi áp dụng SPTP thì biểu thức trong dấu Δ sẽ thay k bởi $k+1$,

- Như vậy ta có:

$$\begin{aligned}
S_{(m,n)} + S_{(n,m)} &= \sum_{k=0}^{n} \binom{m+n+1}{m+1+k} + \sum_{k=0}^{m} \binom{m+n+1}{n+1+k} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{m+n+1}{n-k} + \sum_{k=0}^{m} \binom{m+n+1}{n+1+k} \\
&\quad \text{(Đối xứng)} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{m+n+1}{k} + \sum_{k=n+1}^{m+n+1} \binom{m+n+1}{k} \\
&\quad \text{(Đảo chiều)} \qquad \text{(Tịnh tiến } n+1) \\
&= \sum_{k=0}^{m+n+1} \binom{m+n+1}{k} \quad \text{(Gộp lại)} \\
&= 2^{m+n+1}
\end{aligned}$$

■

Qua những ví dụ trên chắc hẳn các bạn đã được thấy việc áp dụng linh hoạt phương pháp SPTP có hiệu quả mạnh như thế nào. SPTP sẽ biến đổi được từ một tổng tổ hợp phức tạp trở thành một tổng đơn giản hơn và đương nhiên cũng dễ tính toán và tìm ra kết quả hơn.
Bên cạnh việc tính toán thông thường, một số bài toán ta có thể dễ dàng tìm được dạng khái quát hơn từ đề bài, khi quan sát được sự thay đổi của tổng mới sau một bước áp dụng SPTP.
Sau đây là một số bài toán khó, được áp dụng phương pháp SPTP 3.2 để giải.

Bài toán 3.1. *Tính tổng:*

$$S = \sum_{k=0}^{2n} \frac{(-1)^k \binom{4n}{2k}}{\binom{2n}{k}}$$

△

Vì thế

$$A_n = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2k} \binom{2k}{k} \left(2\cos\frac{x}{2}\right)^{n-2k} \cos\frac{nx}{2}$$

$$B_n = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2k} \binom{2k}{k} \left(2\cos\frac{x}{2}\right)^{n-2k} \sin\frac{nx}{2}$$

Vậy ta có đpcm. ■

Nhận xét. Theo kết quả trên thì

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 \sin kx = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2k} \binom{2k}{k} \left(2\cos\frac{x}{2}\right)^{n-2k} \sin\frac{nx}{2}$$

Nếu $x = 0$ thì

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2k} \binom{2k}{k} 2^{n-2k} = \binom{2n}{n}$$

Nếu $x = \pi$ thì

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k}^2 = \begin{cases} 0, & n = 2m+1 \\ (-1)^{\frac{n}{2}} \binom{n}{\frac{n}{2}} & n = 2m \end{cases} \qquad m \in \mathbb{N}$$

Bài tập

BÀI 1. Cho n, k là hai số nguyên dương với $n > 2k+1$, chứng minh rằng:

a) $$\sum_{j\geq 0}\binom{n}{j(2k+1)} = \frac{2^n}{2k+1}\left[1+2\sum_{m=1}^{k}\left(\cos\frac{m\pi}{2k+1}\right)^n\cos\frac{mn\pi}{2k+1}\right]$$

b) $$\sum_{j\geq 0}\binom{n}{j2k} = \frac{2^n}{2k}\left[1+2\sum_{m=1}^{k}\left(\cos\frac{m\pi}{2k+1}\right)^n\cos\frac{mn\pi}{2k+1}\right]$$

c) (Tổng quát)

$$\sum_{r\geq 0}\binom{n}{j+rk} = \frac{2^n}{k}\sum_{m=0}^{k-1}\left(\cos\frac{m\pi}{k}\right)^n\cos\frac{(n-2j)m\pi}{k}$$

BÀI 2. Cho các dãy số a_n, b_n, c_n được xác định theo công thức:

$$a_n = \binom{n}{0}+\binom{n}{3}+\binom{n}{6}+\ldots$$
$$b_n = \binom{n}{1}+\binom{n}{4}+\binom{n}{7}+\ldots$$
$$c_n = \binom{n}{2}+\binom{n}{5}+\binom{n}{8}+\ldots$$

Chứng minh rằng:

a) $a_n^3+b_n^3+c_n^3-3a_nb_nc_n = 2^n$

b) $a_n^2+b_n^2+c_n^2-a_nb_n-b_nc_n-a_nc_n = 1$

BÀI 3. Cho số nguyên dương n và các số thực x, y. Chứng minh rằng:

a) $$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cos[(n-k)x+ky] = 2^n\cos^n\frac{x-y}{2}\cos\frac{n(x+y)}{2}$$

b) $$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\sin[(n-k)x+ky] = 2^n\cos^n\frac{x-y}{2}\sin\frac{n(x+y)}{2}$$

Áp dụng SPTP 3.2 hoàn toàn tương tự cho tổng $S_{(m,n,1)}$

$$\begin{aligned}
S_{(m,n,1)} &= -2^k\binom{m+n+1-k}{m+2}\Bigg|_{k=0}^{n} + \sum_{k=0}^{n-1}2^k\binom{m+n-k}{m+2}\\
&= \binom{m+n+1}{m+2} + \sum_{k=0}^{n-2}2^k\binom{m+n-k}{m+2}\\
&= \binom{m+n+1}{m+2} + S_{(m,n,2)}
\end{aligned}$$

...Thực hiện liên tiếp quá trình trên đến khi

$$\begin{aligned}
S_{(m,n,n-1)} &= \binom{m+n+1}{m+n} + \sum_{k=0}^{n-n}2^k\binom{m+n-k}{m+n}\\
&= \binom{m+n+1}{m+n} + \binom{m+n+1}{m+n+1}
\end{aligned}$$

Từ các đẳng thức trên, suy ra:

$$\begin{aligned}
S_{(m,n)} &= \binom{m+n+1}{m+1} + \binom{m+n+1}{m+2} + \ldots + \binom{m+n+1}{m+n+1}\\
&= \sum_{k=0}^{n}\binom{m+n+1}{m+1+k}
\end{aligned}$$

Từ kết quả đó, chứng minh:

$$S_{(m,n)} + S_{(n,m)} = 2^{m+n+1} \qquad \triangle$$

Nhận xét. Bài toán này là sự kết hợp giữa các phép biến đổi tổng đại số và áp dụng SPTP 3.2.

Lời giải.

- Từ đề bài ta có: (đảo chiều lấy tổng)

$$S_{(m,n)} = \sum_{k=0}^{n} 2^k \binom{m+n-k}{n-k} = \sum_{k=0}^{n} 2^k \binom{m+n-k}{m}$$

Phân tích sai phân:

$$\begin{cases} \binom{m+n-k}{m} = \binom{m+n+1-k}{m+1} - \binom{m+n-k}{m+1} \\ \qquad\qquad\quad = -\Delta\left[\binom{m+n+1-k}{m+1}\right] \\ \Delta(2^k) = 2^k \end{cases}$$

Áp dụng SPTP 3.2, ta được

$$\begin{aligned} S_{(m,n)} &= -2^k \binom{m+n+1-k}{m+1}\Bigg|_{k=0}^{n+1} + \sum_{k=0}^{n} 2^k \binom{m+n-k}{m+1} \\ &= \binom{m+n+1}{m+1} + \sum_{k=0}^{n-1} 2^k \binom{m+n-k}{m+1} \\ &= \binom{m+n+1}{m+1} + S_{(m,n,1)} \end{aligned}$$

Bài 4. Cho khai triển $(x^2 + 3x + 1)^{10} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_{20}x^{20}$. Tính tổng

a) $T_1 = a_0 + a_4 + a_8 + ... + a_{20}$

b) $T_2 = a_1 + a_5 + a_9 + ... + a_{17}$

Lời giải.
Một cách quen thuộc, ta phân tích:

$$\begin{cases} (-1)^k\dbinom{n}{k} = \Delta\left[(-1)^{k-1}\dbinom{n-1}{k-1}\right] \\ \Delta\left[(-1)^k\cos(x+2k)\right] = (-1)^{k+1}\cos(x+2+2k) - (-1)^k\cos(x+2k) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\quad = (-1)^{k+1}2\cos(1)\cos(x+1+2k) \end{cases}$$

Áp dụng SPTP 3.2, ta được

$$\begin{aligned} S_{(n,x)} &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cos(x+2k) \\ &= (-1)^{k-1}\binom{n-1}{k-1}\cos(x+2k)\Big|_{k=0}^{n+1} \\ &\quad - \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n-1}{k}(-1)^{k+1}2\cos(1)\cos(x+1+2k) \\ &= 2\cos(1)\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}cos(x+1+2k) \\ &= 2\cos(1)S_{(n-1,x+1)} \end{aligned}$$

Do đó:

$$\begin{aligned} S_{(n,x)} &= 2\cos(1)S_{(n-1,x+1)} = 2^2\cos^2(1)S_{(n-2,x+2)} = ... = 2^n\cos^n(1)S_{(0,x+n)} \\ &= 2^n\cos^n(1)\cos(x+n) \end{aligned}$$

■

Ví dụ 3.9. *Với các số nguyên dương m, n*
Đặt:

$$S_{(m,n)} = \sum_{k=0}^{n}2^{n-k}\binom{m+k}{k}$$

Chứng minh rằng:

$$S_{(m,n)} = \sum_{k=0}^{n}\binom{m+n+1}{m+1+k}$$

Lời giải.
Ta viết lại tổng đã cho dưới dạng:

$$S = \sum_{k=0}^{n} \frac{k(-1)^k \binom{n}{k}}{(k+1)(k+2)} = \sum_{k=0}^{n} \frac{k(-1)^k \binom{n+2}{k+2}}{(n+1)(n+2)}$$

Do đó ta có:

$$\begin{cases} (-1)^k \binom{n+2}{k+2} = \Delta \left[(-1)^{k-1} \binom{n+1}{k+1} \right] \\ \Delta(k) = k+1-k = 1 \end{cases}$$

Áp dụng SPTP 3.2, ta được

$$\begin{aligned}(n+1)(n+2)S &= \sum_{k=0}^{n} k(-1)^k \binom{n+2}{k+2} \\ &= (-1)^{k-1}\binom{n+1}{k+1} k \Big|_{k=0}^{n+1} - \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n+1}{k+2} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \binom{n+1}{k+2} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \Delta \left[(-1)^{k-1} \binom{n}{k+1} \right] \\ &= (-1)^{k-1} \binom{n}{k+1} \Big|_{k=0}^{n} \\ &= -n \end{aligned}$$

Từ đó ta có:

$$S = \frac{-n}{(n+1)(n+2)}$$

■

Ví dụ 3.8. *Chứng minh rằng:*

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos(x+2k) = 2^n \cos^n(1) \cos(x+n)$$

△

Chương

3 Tính tổng, chứng minh ĐTTH bằng phương pháp Sai phân từng phần

Nguyễn Bảo Phúc (dark templar)
Trần Quốc Nhật Hân (perfectstrong)
Hoàng Xuân Thanh (hxthanh)

Tóm tắt nội dung

Sai Phân Từng Phần (tên gọi do tác giả tự đặt) còn được biết đến với cái tên *Summation by Parts*. Đây là một phương pháp tính tổng có cấu trúc gần giống với phương pháp Tích Phân Từng Phần *(Integration by Parts)*. Sai phân từng phần (SPTP) là một trong những công cụ sơ cấp khá hiệu quả trong các bài toán tính tổng hữu hạn. Trong khuôn khổ bài viết này, tác giả muốn giới thiệu đến bạn đọc một trong những ứng dụng của SPTP đó là:
Sử dụng phương pháp SPTP trong các bài toán tính tổng hoặc chứng minh đẳng thức Tổ Hợp.

3.1 Sai Phân (Difference)

Định nghĩa 3.1 (Sai Phân)

Cho dãy $f(k) : \{f(1), f(2), ..., f(k), f(k+1), ...\}$
Khi đó dãy $\Delta f(k) : \{f(2) - f(1), f(3) - f(2), ..., f(k+1) - f(k), ...\}$

được gọi là Dãy Sai Phân của $f(k)$
Một cách đơn giản, ta gọi:

$$\Delta f(k) = f(k+1) - f(k)$$

là Sai Phân (cấp 1) của $f(k)$ △

Tính chất 3.1 (cơ bản)–

$$\Delta(C) = 0 \quad (C = const) \tag{3.1}$$
$$\Delta\left[Cf(k)\right] = C\Delta f(k) \quad (C = const) \tag{3.2}$$
$$\Delta\left[f(k) + g(k)\right] = \Delta f(k) + \Delta g(k) \tag{3.3}$$

□

Định lý 3.1 (Tổng Sai Phân)–

$$\sum_{k=a}^{b} \Delta f(k) = f(k)\Big|_{k=a}^{b+1} = f(b+1) - f(a)$$

□

Chứng minh.

$$\begin{aligned}\sum_{k=a}^{b} \Delta f(k) &= [f(a+1) - f(a)] + [f(a+2) - f(a+1)] + ... \\ &\quad + [f(b+1) - f(b)] \\ &= f(b+1) - f(a)\end{aligned}$$

■

Áp dụng SPTP 3.2 cho S, ta được

$$\begin{aligned}S &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} F_k \\ &= (-1)^{k-1}\binom{n-1}{k-1}(-1)^k F_k\Big|_{k=0}^{n+1} - \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n-1}{k}(-1)^{k+1}F_{k+2} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}F_{k+2} \\ &= S_1\end{aligned}$$

Hoàn toàn tương tự áp dụng SPTP 3.2 cho S_1, ta được

$$\begin{aligned}S_1 &= \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} F_{k+2} \\ &= (-1)^{k-1}\binom{n-2}{k-1}(-1)^k F_{k+2}\Big|_{k=0}^{n} - \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\binom{n-2}{k}(-1)^{k+1}F_{k+4} \\ &= \sum_{k=0}^{n-2}\binom{n-2}{k}F_{k+4} \\ &= S_2\end{aligned}$$

Sau n bước áp dụng SPTP 3.2, cuối cùng ta thu được:

$$S = S_1 = ... = S_n = \sum_{k=0}^{n-n}\binom{n-n}{k}F_{k+2n} = F_{2n}$$

■

Ví dụ 3.7 (dark templar). *Tính tổng:*

$$S = \sum_{k=1}^{n} \frac{k(-1)^k\binom{n}{k}}{k^2+3k+2}$$

△

Áp dụng SPTP 3.2 cho S_1, ta được

$$\begin{aligned}S_1 &= \frac{2(-1)^{k-1}}{(2k+3)(2k+1)}\binom{n-2}{k-1}\Big|_{k=0}^{n} \\ &\quad - \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\binom{n-2}{k}\frac{-2.4}{(2k+5)(2k+3)(2k+1)} \\ &= \sum_{k=0}^{n-2}(-1)^k\binom{n-2}{k}\frac{2.4}{(2k+5)(2k+3)(2k+1)} \\ &= S_2\end{aligned}$$

$\cdots$ Tiếp tục quá trình trên, cuối cùng ta thu được:

$$\begin{aligned}S = S_1 = ... = S_n &= \sum_{k=0}^{n-n}(-1)^k\binom{n-n}{k}\frac{2.4...(2n)}{(2k+2n+1)(2k+2n-1)...(2k+1)} \\ &= \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}\end{aligned}$$

■

Ví dụ 3.6. *Cho dãy Fibonacci*

$$\begin{cases}F_0 = 0; \quad F_1 = 1 \\ F_{n+2} = F_{n+1} + F_n, \quad (n \geq 0)\end{cases}$$

Chứng minh đẳng thức:

$$S = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}F_k = F_{2n}$$

△

Lời giải.
Để ý rằng: $(-1)^k.(-1)^k = 1$ nên ta có:

$$\begin{cases}(-1)^k\binom{n}{k} = \Delta\left[(-1)^{k-1}\binom{n-1}{k-1}\right] \\ \Delta\left[(-1)^k F_k\right] = (-1)^{k+1}F_{k+1} - (-1)^k F_k = (-1)^{k+1}F_{k+2}\end{cases}$$

Ví dụ 3.1.

$$\sum_{k=0}^{n}2^k = \sum_{k=0}^{n}(2^{k+1} - 2^k) = \sum_{k=0}^{n}\Delta 2^k$$

Theo 3.1 ta có

$$\sum_{k=0}^{n}\Delta 2^k = 2^{n+1} - 2^0 = 2^{n+1} - 1$$

△

Ví dụ 3.2. *Với số n là số nguyên dương*

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k} &= \sum_{k=0}^{n}\left[(-1)^k\binom{n-1}{k} - (-1)^{k-1}\binom{n-1}{k-1}\right] \\ &= \sum_{k=0}^{n}\Delta\left[(-1)^{k-1}\binom{n-1}{k-1}\right]\end{aligned}$$

Theo 3.1 ta có

$$\sum_{k=0}^{n}\Delta\left[(-1)^{k-1}\binom{n-1}{k-1}\right] = (-1)^{k-1}\binom{n-1}{k-1}\Big|_{k=0}^{n+1} = 0$$

△

3.2 Sai Phân Từng Phần

Định lý 3.2 (SPTP)–

$$\sum_{k=a}^{b}g(k).\Delta f(k) = g(k)f(k)\Big|_{k=a}^{b+1} - \sum_{k=a}^{b}f(k+1).\Delta g(k)$$

□

Chứng minh.
Đặt $h(k) = g(k).f(k)$
Ta có:

$$\begin{aligned}\Delta h(k) &= g(k+1).f(k+1) - g(k).f(k) \\ &= g(k+1).f(k+1) - g(k).f(k+1) + g(k).f(k+1) - g(k)f(k) \\ &= f(k+1)\Delta g(k) + g(k)\Delta f(k)\end{aligned}$$

Lấy tổng hai vế từ a đến b, ta được:

$$\begin{aligned}\sum_{k=a}^{b} g(k).\Delta f(k) &= \sum_{k=a}^{b}\Delta h(k) - \sum_{k=a}^{b} f(k+1).\Delta g(k)\\ &= g(k)f(k)\Big|_{k=a}^{b+1} - \sum_{k=a}^{b} f(k+1).\Delta g(k)\end{aligned}$$ ■

Trường hợp $g(k) \equiv 1$ ta có được hệ quả là công thức 3.1
Vấn đề của việc tính tổng bằng phương pháp SPTP 3.2 là phải "nhìn thấy" sai phân $\Delta f(k)$ trong biểu thức lấy tổng mà đề bài cho. Đó quả thực là một điều không hề đơn giản và hết sức thú vị của phương pháp này!

3.2.1 Một số sai phân thường dùng

$$2^k = \Delta(2^k) \tag{3.4}$$

$$a^k = \Delta\left[\frac{a^k}{a-1}\right] \quad (a \neq 1) \tag{3.5}$$

$$mk^{\underline{m-1}} = \Delta\left(k^{\underline{m}}\right) \tag{3.6}$$

$$(-1)^k\binom{n}{k} = \Delta\left[(-1)^{k-1}\binom{n-1}{k-1}\right] \tag{3.7}$$

$$\binom{n+k}{n} = \Delta\left[\binom{n+k}{n+1}\right] \tag{3.8}$$

3.3 Một số bài toán và Ví dụ minh hoạ

Ví dụ 3.3. *Tính tổng:*

$$S = \sum_{k=1}^{n} k\binom{n+k}{k}$$ △

Nhận xét. Phải nói là ta đã gặp may mắn khi tiếp cận bài này theo cách thứ hai. Trong đa số trường hợp, việc "nhìn thấy" sai phân từ biểu thức lấy tổng mang yếu tố quyết định xem có thể giải bài toán theo phương pháp SPTP được không!

Ví dụ 3.5. *Tính tổng:*

$$S = \sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k\binom{n}{k}}{2k+1}$$ △

Lời giải.
Ta có:

$$\begin{cases}(-1)^k\binom{n}{k} = (-1)^k\binom{n-1}{k} + (-1)^k\binom{n-1}{k-1} = \Delta\left[(-1)^{k-1}\binom{n-1}{k-1}\right]\\ \Delta\left(\dfrac{1}{2k+1}\right) = \dfrac{1}{2k+3} - \dfrac{1}{2k+1} = -\dfrac{2}{(2k+3)(2k+1)}\end{cases}$$

Áp dụng SPTP 3.2 cho S, ta được

$$\begin{aligned}S &= \frac{(-1)^{k-1}}{2k+1}\binom{n-1}{k-1}\Big|_{k=0}^{n+1} - \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n-1}{k}\frac{-2}{(2k+3)(2k+1)}\\ &= \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\binom{n-1}{k}\frac{2}{(2k+3)(2k+1)}\\ &= S_1\end{aligned}$$

Tương tự, ta có:

$$\begin{cases}(-1)^k\binom{n-1}{k} = (-1)^k\binom{n-2}{k} + (-1)^k\binom{n-2}{k-1} = \Delta\left[(-1)^{k-1}\binom{n-2}{k-1}\right]\\ \Delta\left(\dfrac{2}{(2k+3)(2k+1)}\right) = \dfrac{2}{(2k+5)(2k+3)} - \dfrac{2}{(2k+3)(2k+1)}\\ \qquad = -\dfrac{2.4}{(2k+5)(2k+3)(2k+1)}\end{cases}$$

Quan sát sự thay đổi của tổng sau 1 lần áp dụng SPTP thì ta thấy rằng, nếu đặt:

$$S'_{(m,n)} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{m}{n-k}\binom{m+k}{m}$$

rồi áp dụng SPTP 3.2 như trên ta sẽ có:

$$\begin{cases} \binom{m+k}{m} = \binom{m+k+1}{m+1} - \binom{m+k}{m+1} = \Delta\left[\binom{m+k}{m+1}\right] = \Delta f(k) \\ \Delta g(k) = \Delta\left[(-1)^k\binom{m}{n-k}\right] = (-1)^{k+1}\binom{m}{n-k-1} - (-1)^k\binom{m}{n-k} \\ \qquad = (-1)^{k+1}\binom{m+1}{n-k} \end{cases}$$

Theo 3.2 ta được:

$$\begin{aligned} S'_{(m,n)} &= \binom{m+k}{m+1}(-1)^k\binom{m}{n-k}\Bigg|_{k=0}^{n+1} \\ &\quad - \sum_{k=0}^{n} (-1)^{k+1}\binom{m+1}{n-k}\binom{m+1+k}{m+1} \\ &= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k\binom{m+1}{n-k}\binom{m+1+k}{m+1} \\ &= S'_{(m+1,n)} \end{aligned}$$

Từ đó ta có:

$$\begin{aligned} S &= S'_{(n,n)} = S'_{(n-1,n)} = \ldots = S'_{(0,n)} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k\binom{0}{n-k}\binom{0+k}{0} \\ &= (-1)^n \end{aligned}$$

(Chỉ có số hạng cuối cùng khác 0)

■

Lời giải.
Ta có:

$$\begin{cases} \binom{n+k}{k} = \binom{n+k}{n} = \binom{n+k+1}{n+1} - \binom{n+k}{n+1} \\ \qquad = \Delta\left[\binom{n+k}{n+1}\right] = \Delta f(k) \\ \Delta g(k) = \Delta(k) = k+1-k = 1 \end{cases}$$

Từ đó, áp dụng SPTP 3.2 ta được:

$$\begin{aligned} S &= k\binom{n+k}{n+1}\Bigg|_{k=1}^{n+1} - \sum_{k=1}^{n}\binom{n+k+1}{n+1} \\ &= (n+1)\binom{2n+1}{n+1} - 1 - \sum_{k=1}^{n}\Delta\left[\binom{n+k+1}{n+2}\right] \\ &= (n+1)\binom{2n+1}{n+1} - 1 - \left[\binom{2n+2}{n+2} - 1\right] \\ &= (n+1)\binom{2n+1}{n+2} \end{aligned}$$

■

Ví dụ 3.4. *Tính tổng:*

$$S = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k\binom{n}{k}\binom{n+k}{k}$$

△

Nhận xét. Trong biểu thức lấy tổng đã cho, cả hai thừa số đều có thể dễ dàng viết được dưới dạng sai phân. Vì vậy ta phải cân nhắc việc chọn một trong hai cách để tiếp cận.

Giả sử ta làm như sau:

Lời giải (Lời giải 1).

$$\begin{cases} (-1)^k\binom{n}{k} = (-1)^k\binom{n-1}{k} - (-1)^{k-1}\binom{n-1}{k-1} \\ \qquad\qquad = \Delta\left[(-1)^{k-1}\binom{n-1}{k-1}\right] = \Delta f(k) \\ \Delta g(k) = \Delta\left[\binom{n+k}{k}\right] = \binom{n+k+1}{k+1} - \binom{n+k}{k} = \binom{n+k}{k+1} \end{cases}$$

Từ đó, áp dụng SPTP 3.2 ta được:

$$S = (-1)^{k-1}\binom{n-1}{k-1}\binom{n+k}{k}\Big|_{k=0}^{n+1} - \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n-1}{k}\binom{n+k}{k+1}$$
$$= \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^{k+1}\binom{n-1}{k}\binom{n+k}{k+1}$$

Quan sát sự thay đổi của tổng sau 1 lần áp dụng SPTP thì ta thấy rằng, nếu đặt:

$$S_{(m,n)} = \sum_{k=0}^{n-m}(-1)^{k+m}\binom{n-m}{k}\binom{n+k}{k+m}$$

rồi áp dụng SPTP 3.2 như trên ta sẽ có:

$$\begin{cases} (-1)^{k+m}\binom{n-m}{k} = (-1)^{k+m}\binom{n-m-1}{k} - (-1)^{k+m-1}\binom{n-m-1}{k-1} \\ \qquad\qquad = \Delta\left[(-1)^{k+m-1}\binom{n-m-1}{k-1}\right] = \Delta f(k) \\ \Delta g(k) = \Delta\left[\binom{n+k}{k+m}\right] = \binom{n+k+1}{k+m+1} - \binom{n+k}{k+m} = \binom{n+k}{k+m+1} \end{cases}$$

Theo 3.2 ta được:

$$S_{(m,n)} = (-1)^{k+m-1}\binom{n-m-1}{k-1}\binom{n+k}{k+m}\Big|_{k=0}^{n-m+1}$$
$$- \sum_{k=0}^{n-m}(-1)^{k+m}\binom{n-m-1}{k}\binom{n+k}{k+m+1}$$
$$= \sum_{k=0}^{n-m-1}(-1)^{k+m+1}\binom{n-m-1}{k}\binom{n+k}{k+m+1}$$
$$= S_{(m+1,n)}$$

Từ đó ta có:

$$S = S_{(0,n)} = S_{(1,n)} = \ldots = S_{(n,n)} = \sum_{k=0}^{n-n}(-1)^{k+n}\binom{n-n}{k}\binom{n+k}{k+n}$$
$$= (-1)^n$$

■

Lời giải (2).

Ta có:

$$\begin{cases} \binom{n+k}{n} = \binom{n+k+1}{n+1} - \binom{n+k}{n+1} = \Delta\left[\binom{n+k}{n+1}\right] = \Delta f(k) \\ \Delta g(k) = \Delta\left[(-1)^k\binom{n}{k}\right] = (-1)^{k+1}\binom{n}{k+1} - (-1)^k\binom{n}{k} \\ \qquad\qquad = (-1)^{k+1}\binom{n+1}{k+1} \end{cases}$$

Từ đó, áp dụng SPTP 3.2 ta được:

$$S = \binom{n+k}{n+1}(-1)^k\binom{n}{k}\Big|_{k=0}^{n+1} - \sum_{k=0}^{n}(-1)^{k+1}\binom{n+1}{k+1}\binom{n+k+1}{n+1}$$
$$= \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n+1}{k+1}\binom{n+1+k}{n+1}$$