Lời giải.

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}(x-k)^{n+2}\\
&=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\sum_{r=0}^{n+2}\binom{n+2}{r}x^{n+2-r}(-1)^r k^r\\
&=\sum_{r=0}^{n+2}\binom{n+2}{r}x^{n+2-r}(-1)^r\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}k^r\\
&=\binom{n+2}{n}x^2\left\{{n \atop n}\right\}n!-\binom{n+2}{n+1}x\left\{{n+1 \atop n}\right\}n!+\binom{n+2}{n+2}\left\{{n+2 \atop n}\right\}n!\\
&=\frac{x^2}{2}(n+2)!-\frac{xn}{2}(n+2)!+\frac{3n+1}{24}n(n+2)!\\
&=\frac{3n^2+n+12x^2-12nx}{24}(n+2)!
\end{aligned}$$

■

Nhận xét.

Bằng việc sử dụng định lý: $G\left(k^p\right)=\sum_{k=0}^{p}\left\{{p \atop k}\right\}\frac{k!t^k}{(1-t)^{k+1}}$. các bạn có thể tự luyện tập bằng bài toán sau:

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2k^r=\sum_{k=0}^{r}\binom{n}{k}\binom{2n-k}{n}\left\{{r \atop k}\right\}k!$$

Ví dụ 4.19. *Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n, ta có:*

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{4n}{2n-2k}\binom{k+n}{n}=\frac{2}{3}\cdot 4^n\binom{3n}{n}$$

△

Như vậy đẳng thức cần chứng minh tương đương với:

$$S=\sum_{k=0}^{n}\frac{\binom{n}{k}(2k-1)!!(2n-2k-1)!!}{2k+1}=\frac{2^{3n}.(n!)^3}{(2n+1)!}$$

Ta có:

$$\begin{aligned}
&\Delta\left[\binom{n-1}{k-1}(2k-3)!!(2n-2k+1)!!\right]=\\
&=\binom{n-1}{k}(2k-1)!!(2n-2k-1)!!-\binom{n-1}{k-1}(2k-3)!!(2n-2k+1)!!\\
&=-\binom{n}{k}(2k-3)!!(2n-2k-1)!!
\end{aligned}$$

Như vậy thừa số còn "sót" lại là $\left(-\frac{2k-1}{2k+1}\right)$

với:

$$\Delta\left(-\frac{2k-1}{2k+1}\right)=-\frac{2k+1}{2k+3}+\frac{2k-1}{2k+1}=-\frac{4}{(2k+1)(2k+3)}$$

Áp dụng SPTP 3.2, ta được:

$$\begin{aligned}
S&=\sum_{k=0}^{n}\frac{\binom{n}{k}(2k-1)!!(2n-2k-1)!!}{2k+1}\\
&=\binom{n-1}{k-1}(2k-3)!!(2n-2k+1)!!\left(-\frac{2k-1}{2k+1}\right)\Bigg|_{k=0}^{n+1}\\
&\quad-\sum_{k=0}^{n}\frac{\binom{n-1}{k}(2k-1)!!(2n-2k-1)!!(-4)}{(2k+1)(2k+3)}\\
&=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{4\binom{n-1}{k}(2k-1)!!(2n-2k-1)!!}{(2k+1)(2k+3)}
\end{aligned}$$

Quan sát sự thay đổi của tổng thu được, sau một lần áp dụng SPTP, ta nhận thấy dạng tổng quát của tổng cần tính là:

$$S_{(p,n)} = \sum_{k=0}^{n-p} \frac{[(2p)!!]^2 \binom{n-p}{k} (2k-1)!!(2n-2k-1)!!}{(2p-1)!! \prod\limits_{j=0}^{p} (2k+1+2j)}$$

Thật vậy:

$$\begin{aligned}
&\Delta \left[\binom{n-p-1}{k-1} (2k-3-2p)!!(2n-2k+1)!! \right] = \\
&= \binom{n-p-1}{k} (2k-1-2p)!!(2n-2k-1)!! \\
&\quad - \binom{n-p-1}{k-1} (2k-3-2p)!!(2n-2k+1)!! \\
&= (2k-3-2p)!!(2n-2k-1)!! \left[\binom{n-p-1}{k} (2k-1-2p) \right. \\
&\qquad\qquad \left. - \binom{n-p-1}{k-1} (2n-2k+1) \right] \\
&= -(2p+1) \binom{n-p}{k} (2k-3-2p)!!(2n-2k-1)!!
\end{aligned}$$

Còn lại:

$$\begin{aligned}
\Delta \left[\prod_{j=0}^{p} \frac{2k-1-2j}{2k+1+2j} \right] &= \prod_{j=0}^{p} \frac{2k+1-2j}{2k+3+2j} - \prod_{j=0}^{p} \frac{2k-1-2j}{2k+1+2j} \\
&= \frac{(2p+2)^2 \prod\limits_{j=0}^{p-1} (2k-1-2j)}{\prod\limits_{j=0}^{p+1} (2k+1+2j)}
\end{aligned}$$

Trở lại với vấn đề chính. Ta có:

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} (x-k)^{n+1} \\
&= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \sum_{r=0}^{n+1} \binom{n=1}{r} x^{n+1-r} (-1)^r k^r \\
&= \sum_{r=0}^{n+1} \binom{n+1}{r} x^{n+1-r} (-1)^r \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} k^r \\
&= \binom{n+1}{n} x (-1)^n \left\{ {n \atop n} \right\} (-1)^n n! \\
&\quad + \binom{n+1}{n+1} (-1)^{n+1} \left\{ {n+1 \atop n} \right\} (-1)^n n! \\
&= x(n+1)! - \frac{n(n+1)}{2} n! \\
&= \frac{2x-n}{2} (n+1)!
\end{aligned}$$

Nên từ đây suy ra điều phải chứng minh. ■

Ví dụ 4.18. *Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n, ta có:*

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} (x-k)^{n+2} \equiv \frac{3n^2+n+12x^2-12nx}{24} (n+2)!$$ △

Lời giải.
Ta có:

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{p-k}{p-n}\binom{q+k+1}{m}=\sum_{k=0}^{n}\binom{p-k}{n-k}\binom{q+k+1}{m}$$

$$\overset{B}{=}[t^n]\,(1+t)^p\left[\frac{u^{m-q-1}}{(1-u)^{m+1}}\,\middle|\,u=\frac{t}{1+t}\right]$$

$$=[t^n]\,(1+t)^p\frac{t^{m-q-1}}{(1+t)^{m-q-1}}(1+t)^{m+1}$$

$$=\left[t^{n-m+q+1}\right](1+t)^{p+q+2}$$

$$=\binom{p+q+2}{n-m+1+q}$$

Đẳng thức còn lại chứng minh hoàn toàn tương tự.
Nên từ đây suy ra điều phải chứng minh. ■

Ví dụ 4.17. *Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n, ta có:*

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}(x-k)^{n+1}\equiv\frac{2x-n}{2}(n+1)!$$
△

Lời giải.
Trước tiên ta cần điểm qua bổ đề sau:

Bổ đề 4.1–

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}k^j=\left\{{j\atop n}\right\}(-1)^n n!$$
□

Chứng minh.

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k k^j\overset{E}{=}[t^n]\,\frac{1}{1-t}\left[\sum_{k=0}^{j}\left\{{j\atop k}\right\}\frac{k!(-u)^k}{(1+u)^{k+1}}\,\middle|\,u=\frac{t}{1-t}\right]$$

$$=[t^n]\sum_{k=0}^{j}\left\{{j\atop k}\right\}k!(-1)^k t^k$$

$$=\left\{{j\atop n}\right\}(-1)^n n!$$
■

Áp dụng SPTP 3.2, ta được:

$$S_{(n,p)}=\left[-\frac{[(2p)!!]^2\binom{n-p-1}{k-1}}{(2p-1)!!(2p+1)}(2k-3-2p)!!(2n-2k+1)!!\cdot\prod_{j=0}^{p}\frac{2k-1-2j}{2k+1+2j}\right]\Bigg|_{k=0}^{n-p+1}$$

$$-\sum_{k=0}^{n-p}\left[\frac{[(2p)!!]^2(-1)\binom{n-p-1}{k}(2k-1-2p)!!(2n-2k-1)!!}{(2p-1)!!(2p+1)}\cdot\frac{(2p+2)^2\prod_{j=0}^{p-1}(2k-1-2j)}{\prod_{j=0}^{p+1}(2k+1+2j)}\right]$$

$$=\sum_{k=0}^{n-p-1}\frac{[(2p+2)!!]^2\binom{n-p-1}{k}(2k-1)!!(2n-2k-1)!!}{(2p+1)!!\prod_{j=0}^{p+1}(2k+1+2j)}$$

$$=S_{(p+1,n)}$$

Từ đó suy ra:

$$S=S_{(0,n)}=S_{(1,n)}=\ldots=S_{(n,n)}=$$

$$=\sum_{k=0}^{n-n}\frac{[(2n)!!]^2\binom{n-n}{k}(2k-1)!!(2n-2k-1)!!}{(2n-1)!!\prod_{j=0}^{n}(2k+1+2j)}$$

$$=\frac{[(2n)!!]^2}{(2n+1)!!}$$

$$=\frac{[(2n)!!]^3}{(2n+1)!!(2n)!!}$$

$$=\frac{2^{3n}(n!)^3}{(2n+1)!}$$
■

Nhận xét. Luyện tập sử dụng phương pháp Sai Phân Từng Phần giúp cho bạn có nhiều kỹ năng biến đổi Đại Số và mỗi khi nhìn thấy biểu thức tổng bạn sẽ tự tin và đỡ choáng ngợp hơn!
Bên cạnh đó SPTP cũng như tương tự như Tích Phân Từng Phần vậy, đều có những ưu nhược điểm của nó! Nếu không tinh ý, bạn dễ rơi vào vòng "luẩn quẩn" của tổng sau khi lấy SPTP, hoặc sau khi lấy SPTP tổng thu được còn khó hơn!
Nhược điểm lớn nhất của phương pháp này là bạn phải "nhìn thấy" được Sai Phân trong biểu thức lấy tổng đã cho, giống như kiểu bạn phải tìm được nguyên hàm của $v(x)$ để cho $\mathrm{d}(V(x)) = v(x)\mathrm{d}x$ sau đó mới áp dụng được công thức Tích Phân Từng Phần. Việc làm này không phải lúc nào cũng thực hiện được!
Để kết thúc phần này, mời các bạn cùng luyện tập với các bài tập sau:

3.4 Bài tập tự luyện

Bài 1. Cho n là số nguyên dương. Chứng minh đẳng thức:

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k \binom{n}{k}}{n+k} = \left[n \binom{2n}{n} \right]^{-1}$$

Bài 2. Tính tổng:

$$S = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k \binom{n}{k}}{(k+1)(k+3)}$$

Bài 3. (dark templar) Tính tổng:

$$S = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k \binom{n}{k}}{4k^2-1}$$

Ta có:

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (-1)^k \binom{n-k}{k} \frac{4^{n-k}}{k+1} \\
&= 4^n \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n-k}{k} \frac{(-1/4)^k}{k+1} \\
&\overset{A}{=} 4^n \left[t^n\right] \frac{1}{1-t} \left[\frac{-1}{\frac{u}{4}} \ln \frac{1}{1+\frac{u}{4}} \middle| \, u = \frac{t^2}{1-t} \right] \\
&= 4^n \left[t^n\right] \frac{1}{1-t} \cdot \frac{-4(1-t)}{t^2} \ln \frac{(1-t)}{\frac{t^2}{4} - t + 1} \\
&= 4^{n+1} \left[t^{n+2}\right] \left(\ln \left(\frac{1}{1-t} \right) - 2 \ln \left(\frac{1}{1-\frac{t}{2}} \right) \right) \\
&= 4^{n+1} \left(\frac{1}{n+2} - \frac{2}{2^{n+2}(n+2)} \right) \\
&= \frac{4^{n+1} - 2^{n+1}}{n+2}
\end{aligned}$$

Nên từ đây suy ra điều phải chứng minh. ■

Ví dụ 4.16. *Cho trước các số nguyên dương p, m, q.*
Chứng minh rằng $\forall n \in \mathbb{N}^*$*:*

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{p-k}{p-n} \binom{q+k+1}{m} = \sum_{k=0}^{m} \binom{q-k}{q-n} \binom{p+k+1}{n} = \binom{p+q+2}{n-m+q+1}$$

△

Lời giải.
Ta có:

$$4^n\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\binom{2k}{k}\overset{E}{=}4^n\,[t^n]\,\frac{1}{1-t}\left[\frac{1}{\sqrt{1+4u}}\,\middle|\,u=\frac{t}{1-t}\right]$$
$$=4^n\,[t^n]\,\frac{1}{\sqrt{(1-t)(1+3t)}}$$
$$=[t^n]\,\frac{1}{\sqrt{(1-4t)(1+12t)}}$$

Đồng thời ta cũng có:

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{2n-2k}{n-k}\binom{2k}{k}(-3)^k\overset{conv}{=}[t^n]\,\frac{1}{\sqrt{1-4t}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+12t}}$$
$$=[t^n]\,\frac{1}{\sqrt{(1-4t)(1+12t)}}$$

Từ đây suy ra điều phải chứng minh. ■

Ví dụ 4.15. *Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n, ta có:*

$$\sum_{k=0}^{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor}(-1)^k\binom{n-k}{k}\frac{4^{n-k}}{k+1}=\frac{4^{n+1}-2^{n+1}}{n+2}$$ △

Lời giải.

Bài 4. Tính tổng:

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k\binom{n}{k}(2k^2+5k+2)}{k+3}$$

Bài 5. Chứng minh đẳng thức:

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k\binom{n}{k}}{(2k+1)(2k+3)}=\frac{4^n}{(2n+3)\binom{2n+1}{n}}$$

Bài 6. Tính tổng:

$$S=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k(n-k)\binom{2n}{k}$$

Bài 7. Tính tổng:

$$S=\sum_{k=0}^{n}\binom{2n}{n+k}\frac{2k^2+k}{n+k+1}$$

Bài 8. Tính tổng:

$$S=\sum_{k=0}^{2n}(-2)^k\binom{2n+k}{2k}$$

Bài 9. Với số nguyên dương n và số thực α. Tính tổng:

$$S=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k+\alpha}$$

Bài 10. Chứng minh đẳng thức:

$$\sum_{k=0}^{2n}\left(-\frac{1}{2}\right)^k\binom{2k}{k}\binom{2n+1}{k+1}=\frac{(2n+1)!!}{(2n)!!}$$

BÀI 11. Chứng minh đẳng thức

$$\sum_{k=0}^{2n}(-1)^k\binom{2k}{k}\binom{4n-2k}{2n-k}=2^{2n}\binom{2n}{n}$$

BÀI 12. Tính tổng:

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\sin(x+2k)$$

BÀI 13. Chứng minh đẳng thức:

$$\sum_{k=0}^{2n}\binom{2n}{k}\cos[2(n-k)x]=4^n\cos^{2n}(x)$$

BÀI 14. Cho dãy Fibonacci

$$\begin{cases}F_0=0; \quad F_1=1\\ F_{n+2}=F_{n+1}+F_n \quad (n\geq 0)\end{cases}$$

Chứng minh đẳng thức:

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}F_{3k}=2^nF_{2n}$$

Ví dụ 4.13. *Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n, ta có:*

$$4^n\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\binom{2k}{k}=\sum_{k=0}^{n}\binom{2n-2k}{n-k}\binom{2k}{k}5^k$$

△

Lời giải.
Ta có:

$$\begin{aligned}4^n\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\binom{2k}{k} &\overset{E}{=} 4^n\left[t^n\right]\frac{1}{1-t}\left[\frac{1}{\sqrt{1-4u}}\bigg| u=\frac{t}{1-t}\right]\\ &= 4^n\left[t^n\right]\frac{1}{\sqrt{(1-t)(1-5t)}}\\ &= \left[t^n\right]\frac{1}{\sqrt{(1-4t)(1-20t)}}\end{aligned}$$

Đồng thời ta cũng có:

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}\binom{2n-2k}{n-k}\binom{2k}{k}5^k &\overset{conv}{=} \left[t^n\right]\frac{1}{\sqrt{1-4t}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-20t}}\\ &= \left[t^n\right]\frac{1}{\sqrt{(1-4t)(1-20t)}}\end{aligned}$$

Nên từ đây suy ra điều phải chứng minh. ■

Nhận xét. Có thể nói, trong tổng tổ hợp có chứa $\binom{n}{k}$ là dấu hiệu hay để áp dụng phép chuyển đổi Euler. Đồng thời, cách biến đổi hàm sinh để làm mất đi số 4^n cũng là một kỹ thuật đẹp cần lưu ý.

Ví dụ 4.14. *Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n, ta có:*

$$4^n\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\binom{2k}{k}=\sum_{k=0}^{n}\binom{2n-2k}{n-k}\binom{2k}{k}(-3)^k$$

△

Thật vậy, nếu tinh ý 1 chút ta sẽ nhận ra:

$$\frac{1}{(1+x)^{3/2}} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1/4)^k (2k+1) \binom{2k}{k} x^k$$

Hoặc nếu viết theo ngôn ngữ hàm sinh :

$$G\left((-1/4)^k (2k+1)\binom{2k}{k}\right) = \frac{1}{(1+x)^{3/2}}$$

Tức là hệ số của x^k trong khai triển thành chuỗi luỹ thừa hình thức của $\frac{1}{(1+x)^{3/2}}$ là $(-1/4)^k (2k+1)\binom{2k}{k}$

Ta có:

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} (-1)^{k+1}\binom{n}{k}\binom{2k}{k}\frac{2k+1}{4^k} &\overset{E}{=} -[t^n]\frac{1}{1-t}\left[\frac{1}{(1+u)^{3/2}}\Big| u=\frac{t}{1-t}\right]\\ &= -[t^n]\sqrt{1-t}\\ &= -\binom{\frac{1}{2}}{n}(-1)^n\\ &= \frac{(-1)^n(-1)^n(2n-1)!!}{2^n n!}\\ &= \binom{2n}{n}\frac{1}{4^n(2n-1)}\end{aligned}$$

Nên từ đây suy ra điều phải chứng minh. ■

Nhận xét. Theo quan điểm chủ quan của tác giả, bạn đọc chỉ cần nhớ thật kỹ dạng khai triển luỹ thừa hình thức của hàm $\frac{1}{\sqrt{1-4x}}$, và tất cả những dãy số có liên quan như:

$$G\left(k\binom{2k}{k}\right); G\left(\frac{1}{2k+1}\binom{2k}{k}\right); G\left((2k+1)\binom{2k}{k}\right), \ldots$$

Khi cần thiết, ta có thể tự thiết lập hàm sinh tương ứng thông qua các phép biến đổi, lấy đạo hàm tương đối đơn giản.

Chương 4

Sử dụng hàm sinh chứng minh đẳng thức tổ hợp

Bùi Đức Lộc (supermember)
Lê Kim Nhã (gogo123)

Tóm tắt nội dung

Hàm sinh (General Funtion), được biến đến như là một công cụ rất mạnh trong các bài toán Tổ Hợp và Rời Rạc. Rất nhiều bài toán tổ hợp, rời rạc khó, khi đưa về ngôn ngữ hàm sinh thì được giải quyết một cách nhanh chóng và sáng tỏ. Hàm sinh có rất nhiều ứng dụng, đặc biệt dùng để tính tổng. Để bạn đọc hiểu rõ phương pháp và vai trò của hàm sinh trong các bài toán chứng minh ĐTTH, người viết sẽ từng bước nêu lên các bài toán, ví dụ, từ đơn giản đến phức tạp. Qua

mỗi ví dụ sẽ là những đúc kết ngắn gọn về đặc điểm và tính chất của từng bài toán...

4.1 Thay lời mở đầu

Câu chuyện số 1

Cách đây khoảng hơn 2 tháng (tháng 11/2012), trên VMF xuất hiện bài toán sau:

Bài toán 4.1. *Chứng minh rằng:*

$$\forall n \in \mathbb{N}^* : \quad \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k \binom{2n}{k}^2 = (-1)^n \binom{2n}{n}$$ △

Bài Toán này được người gửi đưa vào box THPT và nó đã được một số thành viên VMF dành cho sự quan tâm đặc biệt. Tuy nhiên, hơn 1 tuần sau đó thì bài này mới có lời giải đầu tiên sử dụng so sánh hệ số trong khai triển đa thức và sau đó; thành viên perfectstrong có đưa thêm 1 lời giải nữa sử dụng nội suy Lagrange. Cả 2 lời giải này đều không làm hài lòng người viết chuyên đề.

Thực ra; nếu bạn là một học sinh học Toán ở mức độ bình thường; có thể có một giờ rảnh rỗi ở nhà thì sẽ không khó để tìm ra 1 lời giải rất *"sơ cấp-cơ bản-ngắn gọn"* dựa vào khai triển đa thức: $\left(1-x^2\right)^{2n} = (1-x)^{2n}(1+x)^{2n}$. Tuy nhiên, có khi nào bạn tự đặt mình vào hoàn cảnh đối diện bài toán trên trong kỳ thi kiểu như Đại Học: chỉ có 20 phút để làm bài này thì sẽ ra sao? Bài toán này đâu khó đến mức chiếm được vị trí chốt điểm trong đề của bài BĐT? Không lẽ các bạn chấp nhận quan điểm: "Tìm ra đa thức để có khai triển phù hợp là sự may mắn"? Thực sự thì đa thức $\left(1-x^2\right)^{2n}$ có được là do may mắn hay là từ đâu? Suy nghĩ thêm về bài này thì có thể thấy nó có nét hao hao giống bài toán rất quen thuộc: $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$ với lời giải dựa vào khai triển $(1+x)^{2n} = (1+x)^n(1+x)^n$.

Ta có :

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=0}^{n-1} \binom{4n-4k-2}{2n-2k-1}\binom{4k+2}{2k+1} \\
&= \left[t^{2n}\right]\left(\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{1-4t}} - \frac{1}{\sqrt{1+4t}}\right)\right)^2 \\
&= \frac{1}{4}\left[t^{2n}\right]\left(\frac{1}{1-4t} + \frac{1}{1+4t} - \frac{2}{\sqrt{1-4\left(4t^2\right)}}\right) \\
&= \frac{1}{4}\left[t^{2n}\right]\left(\frac{2}{1-16t^2} - \frac{2}{\sqrt{1-4\left(4t^2\right)}}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left[t^{2n}\right]\left(\frac{1}{1-16t^2} - \frac{1}{\sqrt{1-4\left(4t^2\right)}}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(16^n - 4^n\binom{2n}{n}\right)
\end{aligned}$$

Nên từ đây suy ra điều phải chứng minh. ■

Nhận xét. Cách xét $(C(x))^2$ với $C(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{1-4x}} - \frac{1}{\sqrt{1+4x}}\right)$ ở đây đã là tương đối quen thuộc. Cách này nhìn chung là hữu ích với những tổng dạng $\sum a_k a_{n-k}$; $\sum a_{2k} a_{n-2k}$; $\sum a_{2k+1} a_{n-2k-1}$....Cũng có thể để ý thêm là dãy $(a_k)_{k\geq 0}$ không nhất thiết phải có hàm sinh tương ứng là hàm $C(x)$, như trường hợp bài toán trên là một điển hình.

Ví dụ 4.12. *Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n, ta có:*

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^{k+1}\binom{n}{k}\binom{2k}{k}\frac{2k+1}{4^k} = \binom{2n}{n}\frac{1}{(2n-1)\,4^n}$$ △

Lời giải. Bài này cần một chút "gia cố - thêm thắt" từ khai triển quen thuộc của $\frac{1}{\sqrt{1-4x}}$.

Lời giải.
Ta có :

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{k}(-1)^i\binom{n}{i}\binom{n+k-i-1}{k-i} &= \sum_{i=0}^{k}\binom{n+k-i-1}{k-i}(-1)^i\binom{n}{i}\\ &\overset{B}{=}\left[t^k\right](1+t)^{n+k-1}\left[(1-u)^n\Big|u=\frac{t}{1+t}\right]\\ &=\left[t^k\right](1+t)^{n+k-1}\frac{1}{(1+t)^n}\\ &=\left[t^k\right](1+t)^{k-1}\end{aligned}$$

Với $k=0$: $\left[t^0\right](1+t)^{-1}=\left[t^0\right]\dfrac{1}{1+t}=\left[t^0\right]\left(1-t+t^2-t^3+...\right)=1.$

Còn với $k\geq 1$ thì hiển nhiên bậc lớn nhất của t trong khai triển nhị thức $(1+t)^{k-1}$ là $k-1$.

Suy ra $\left[t^k\right](1+t)^{k-1}=0.$

Nên từ đây suy thẳng ra điều phải chứng minh. ■

Ví dụ 4.11. *Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n, ta có:*

$$\sum_{k=0}^{n-1}\binom{4n-4k-2}{2n-2k-1}\binom{4k+2}{2k+1}=\frac{1}{2}\left(16^n-\binom{2n}{n}4^n\right)$$

△

Lời giải.

Câu chuyện số 2

Cách đây cũng khoảng hơn 2 tháng (tháng 11/2012), tác giả Dark Templar có đưa ra bài toán sau:

Bài toán 4.2. *Với F_n là số Fibonacci thứ n. Chứng minh rằng*

$$\sum_{k=0}^{\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor}\binom{n-k}{k}=F_{n+1}$$

△

Tác giả yêu cầu một lời giải dựa vào đại số thuần tuý, và người viết đã để mở vấn đề này trong một thời gian để có thể tiết lộ nó trong chuyên đề này. Thực ra, bài toán này cũng đã rất cũ, có thể điểm ra 1 vài vũ khí để tiêu diệt nó: tìm công thức truy hồi, sử dụng phép đặt quân domino... Tuy nhiên, nếu để ý kỹ là hàm sinh cho dãy Fibonacci sẽ là đơn giản để thiết lập. Vậy từ hàm sinh đó, tại sao ta không bước thêm một bước, đó là chứng minh $\displaystyle\sum_{k=0}^{\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor}\binom{n-k}{k}$ là hệ số của x^{n+1} trong khai triển hàm sinh đó?

Thật vậy, theo cái cách ta thường làm, khi dự đoán ra hàm sinh tương ứng để chứng minh đẳng thức tổ hợp, thường ta biến đổi hàm sinh đó theo 2 cách khác nhau - mục đích là để *mô tả* hệ số của x^k $(k\in\mathbb{N})$ theo 2 cách khác nhau. Ở đây rõ ràng ta đã có 1 số vốn khá lớn khi hàm sinh tương ứng và 1 cách mô tả thì đã tìm ra rồi. Vậy chỉ còn một bước *khá ngắn* là tìm thêm một cách để mô tả nó mà thôi.

Trên đây là những điều trăn trở đầu tiên của tác giả khi tiếp cận chuyên đề này. Tác giả muốn chia sẻ sự trăn trở đó cho những người sẽ xem, sẽ nhận xét chuyên đề này; để từ đó có những sự hứng thú nhất định trong việc mở những cánh cửa mà tác giả đặt cho các bạn trong những phần tiếp theo. Nào, tạm quên và trước hết hãy trang bị cho mình vài thứ...

4.2 Những biến đổi đại số thường gặp với $\binom{n}{k}$

Tích chéo của 2 hệ số tổ hợp

[Tập con của tập con]

$$\binom{n}{k}\binom{k}{j} = \binom{n}{j}\binom{n-j}{n-k}$$

Giảm tử-mẫu của hệ số tổ hợp

[quy tắc hút]

$$\binom{n}{k} = \frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1}$$

Hệ số tổ hợp viết ở dạng truy hồi

[Công thức Pascal]

$$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$$

Hệ số tổ hợp kèm phân số

$$\begin{aligned}\binom{n-k}{k}\frac{n}{n-k} &= \binom{n-k}{k} + \binom{n-k-1}{k-1}\\ \binom{x+k}{k}\frac{1}{x+k} &= \frac{1}{x}\left[\binom{x+k}{k} - \binom{x+k-1}{k-1}\right]\end{aligned}$$

Nhận xét. Từ nay, ta cần hiểu tổ hợp chập ở dạng suy rộng của nó:
Với x là số thực tuỳ ý thì

$$\binom{x}{k} = \begin{cases} 1 & \text{với } k = 0 \\ \dfrac{x(x-1)(x-2)...(x-k+1)}{k!} & \text{với } k \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

Ví dụ 4.9. *Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n, ta có:*

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{x}{2k}\binom{x-2k}{n-k}2^{2k} = \binom{2x}{2n}; \forall x \in \mathbb{R}$$

△

Lời giải. Ta có :

$$\begin{aligned}&\sum_{k=0}^{n}\binom{x}{2k}\binom{x-2k}{n-k}2^{2k}\\ &\overset{B}{=} [t^n]\,(1+t)^x\left[\frac{(1+2\sqrt{u})^x + (1-2\sqrt{u})^x}{2}\,\middle|\, u = \frac{t}{(1+t)^2}\right]\\ &= [t^n]\,(1+t)^x\left(\frac{\left(1+2\sqrt{t}+t\right)^x + \left(1-2\sqrt{t}+t\right)^x}{2(1+t)^x}\right)\\ &= [t^n]\,\frac{\left(1+\sqrt{t}\right)^{2x} + \left(1-\sqrt{t}\right)^{2x}}{2}\\ &= \left[t^{2n}\right](1+t)^{2x}\\ &= \binom{2x}{2n}\end{aligned}$$

Nên từ đây suy thẳng ra điều phải chứng minh. ■

Nhận xét. Với cùng cách giải trên, ta cũng giải được bài toán sau do giáo sư H.W.Gould đề xuất:

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{x+1}{2k+1}\binom{x-2k}{n-k}2^{2k+1} = \binom{2x+2}{2n+1} \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Ví dụ 4.10. *Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n, ta có:*

$$\sum_{i=0}^{k}(-1)^i\binom{n}{i}\binom{n+k-i-1}{k-i} = \begin{cases} 0 & \text{nếu } k \geq 1 \\ 1 & \text{nếu } k = 0 \end{cases}$$

△

Lời giải. Ta có:

$$
\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\binom{n}{k}^{-1}\binom{x}{k-1}\binom{y-k}{n-k}\\
&=\sum_{k=1}^{n}\frac{x!\,(y-k)!k!\,(n-k)!}{k!\,(x-k+1)!\,(n-k)!\,(y-n)!n!}\\
&=\frac{x!\,(y-x-1)!}{n!\,(y-n)!}\sum_{k=1}^{n}\binom{y-k}{x-k+1}\\
&\stackrel{B}{=}\frac{x!\,(y-x-1)!}{n!\,(y-n)!}\left[t^{x+1}\right](1+t)^y\left[\frac{u-u^{n+1}}{1-u}\middle| u=\frac{t}{1+t}\right]\\
&=\frac{x!\,(y-x-1)!}{n!\,(y-n)!}\left[t^{x+1}\right](1+t)^y\frac{\left(\frac{t}{1+t}-\frac{t^{n+1}}{(1+t)^{n+1}}\right)}{1-\frac{t}{1+t}}\\
&=\frac{x!\,(y-x-1)!}{n!\,(y-n)!}\left(\left[t^{x}\right](1+t)^y-\left[t^{x-n}\right](1+t)^{y-n}\right)\\
&=\frac{x!\,(y-x-1)!}{n!\,(y-n)!}\left(\frac{y!}{x!\,(y-x)!}-\frac{(y-n)!}{(y-x)!\,(x-n)!}\right)\\
&=\frac{1}{x-y}\left(\binom{x}{n}-\binom{y}{n}\right)
\end{aligned}
$$

Nên từ đây suy thẳng ra điều phải chứng minh. ■

Nhận xét. Cái khôn khéo của người giải toán là cần phải linh hoạt sử dụng hàm $\frac{u-u^{n+1}}{1-u}$ thay vì hàm $\frac{1}{1-u}$ quen thuộc. Các bạn hãy tự lý giải vì sao lại chọn như thế.
Ngoài ra, bằng cách làm hoàn toàn tương tự, các bạn hãy giải bài toán:

$$\sum_{k=j}^{n}\binom{z}{k}\binom{x}{k}^{-1}=\frac{x+1}{x-z+1}\left(\binom{z}{j}\binom{x+1}{j}^{-1}-\binom{z}{n+1}\binom{x+1}{n+1}^{-1}\right)$$

Gợi ý: $f(u)=\dfrac{u^j-u^{n+1}}{1-u}$

4.3 Những dạng khai triển hàm sinh cần biết

Hệ số tổ hợp đơn giản

$$G\left(\binom{s}{k}a^k\right)=(1+at)^s\quad(k\in\mathbb{N})$$

Hệ số tổ hợp với mẫu số là hằng số

$$G\left(\binom{p+k}{m}\right)=\frac{t^{m-p}}{(1-t)^{m+1}}\quad(k\in\mathbb{Z})$$

Hệ số tổ hợp tăng dần đều nhau ở tử và mẫu

$$G\left(\binom{x+k}{k}a^k\right)=\frac{1}{(1-at)^{x+1}}\quad(k\in\mathbb{N})$$

Hệ số tổ hợp trung tâm

$$G\left(\binom{2k}{k}x^k\right)=\frac{1}{\sqrt{1-4xt}}\quad(k\in\mathbb{N})$$

Dãy Fibonacci

$$G(F_n)=\frac{t}{1-t-t^2}\quad(n\in\mathbb{N})$$

Dãy Fibonacci chỉ số chẵn

$$G(F_{2n})=\frac{t}{1-3t+t^2}\quad(n\in\mathbb{N})$$

Tức là hệ số của x^n trong khai triển chuỗi luỹ thừa hình thức của hàm $\dfrac{t}{1-3t+t^2}$ bằng F_{2n}.

Dãy Fibonacci chỉ số lẻ

$$G\left(F_{2n+1}\right) = \frac{1-t}{1-3t+t^2} \quad (n \in \mathbb{N})$$

Tức là hệ số của x^n trong khai triển chuỗi luỹ thừa hình thức của hàm $\dfrac{1-t}{1-3t+t^2}$ bằng F_{2n+1}.

Số Catalan

$$G\left(\frac{1}{k+1}\binom{2k}{k}\right) = \frac{1-\sqrt{1-4t}}{2t} \quad (k \in \mathbb{N})$$

Một số dạng khác

- $G\left(\dfrac{a^n}{n}\right) = \ln\left(\dfrac{1}{1-at}\right) \quad (n \in \mathbb{N}^*)$
- $G\left(\binom{r+2k}{k}\right) = \dfrac{1}{\sqrt{1-4t}}\left(\dfrac{1-\sqrt{1-4t}}{2t}\right)^r \quad (r, k \in \mathbb{N})$
  (Chứng minh bằng quy nạp)
- $G(k^p) = \displaystyle\sum_{k=0}^{p} \left\{ {p \atop k} \right\} \frac{k!t^k}{(1-t)^{k+1}}$ (trong đó, $\left\{ {p \atop k} \right\}$ là số Stirling loại 2)
  Chứng minh đẳng thức này có thể dựa vào đẳng thức: $k^p = \displaystyle\sum_{j=1}^{k} \binom{k}{j} j! \left\{ {p \atop j} \right\}$, vốn rất quen thuộc của số Stirling loại 2. Tác giả không muốn đề cập đến chứng minh tại đây vì nó tương đối dài và không đi thẳng vào chuyên đề

4.4 Những định lý cơ bản trong tính tổng dùng hàm sinh

Quy ước: *ký hiệu $[t^n]f(t)$ được hiểu là hệ số của t^n trong khai triển chuỗi luỹ thừa hình thức của hàm số $f(t)$*

Ví dụ 4.7. *Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n, ta có:*

$$\sum_{k=j}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2k}\binom{2k}{k}\binom{k}{j} 2^{n-2k} = \binom{n}{j}\binom{2n-2j}{n}$$

△

Lời giải. Ta có :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=j}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2k}\binom{2k}{k}\binom{k}{j} &= \sum_{k=j}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{k}\binom{n-k}{k}\binom{k}{j} 2^{n-2k} \\
&= \binom{n}{j} \sum_{k=j}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n-j}{k-j}\binom{n-k}{n-2k} 2^{n-2k} \\
&\overset{B}{=} \binom{n}{j} [t^n]\ (1+2t)^n \left[u^j (1+u)^{n-j} \middle| u = \frac{t^2}{1+2t} \right] \\
&= \binom{n}{j} [t^n]\ (1+2t)^n \frac{t^j}{(1+2t)^j} \frac{(1+2t+t^2)^{n-j}}{(1+2t)^{n-j}} \\
&= \binom{n}{j} \left[t^{n-2j}\right] (1+2t)^{2n-2j} \\
&= \binom{n}{j}\binom{2n-2j}{n}
\end{aligned}$$

Nên từ đây suy ra đpcm. ■

Ví dụ 4.8. *Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n, ta có:*

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\binom{n}{k}^{-1}\binom{x}{k-1}\binom{y-k}{n-k} &= \frac{1}{x+1}\sum_{k=1}^{n}\binom{x+1}{k}\binom{y}{k}^{-1} \\
&= \frac{1}{x-y}\left(\binom{x}{n} - \binom{y}{n}\right)
\end{aligned}$$

(x, y là 2 số nguyên và $y \geq x+1 > n$). △

Lời giải.

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}\binom{4n+1}{2n-2k}\binom{k+n}{n} &= \sum_{k=0}^{n}\binom{4n+1}{2n+2k+1}\binom{k+n}{k}\\
&\overset{A}{=} \left[t^{4n+1}\right]\frac{t^{2n+1}}{(1-t)^{2n+2}}\left[\frac{1}{(1-u)^{n+1}}\middle| u=\frac{t^2}{(1-t)^2}\right]\\
&= \left[t^{2n}\right]\frac{1}{(1-t)^{2n+2}}\left[\frac{1}{(1-u)^{n+1}}\middle| u=\frac{t^2}{(1-t)^2}\right]\\
&= \left[t^{2n}\right]\frac{1}{(1-t)^{2n+2}}\frac{(1-t)^{2n+2}}{(1-2t)^{n+1}}\\
&= \left[t^{2n}\right]\frac{1}{(1-2t)^{n+1}}\\
&= 2^{2n}\binom{n+1+2n-1}{2n}\\
&= 4^n\binom{3n}{2n} = 4^n\binom{3n}{n}\end{aligned}$$

Nên từ đây suy ra điều phải chứng minh. ■

Nhận xét. Không phải lúc nào tổng tổ hợp cũng ở ngay dấu hiệu để ta áp dụng định lý. Đôi khi ta cần phải thực hiện một vài biến đổi, như ở trong trường hợp này:

$$\binom{4n+1}{2n-2k}\to\binom{4n+1}{2n+2k+1} \text{ và } \binom{n+k}{n}\to\binom{n+k}{k}$$

Với bài này, ta thấy được đầy đủ sức mạnh của định lý A (4.2). Vì nếu theo cách làm dự đoán hàm sinh mà đa số người dùng thường chọn, thì dù có dự đoán đúng hàm sinh: $\dfrac{1}{(1-2t)^{n+1}}$ cũng rất khó để hoàn thành bài toán, do những bước biến đổi đòi hỏi là tương đối lòng vòng, thiếu tự nhiên.

Định lý 4.1 (Định lý so sánh hệ số (Convolution))–

$$\left[t^n\right] f(t)\, g(t) = \sum_{k=0}^{n}\left[t^k\right] f(t)\,.\left[y^{n-k}\right] g(y)$$

□

Đây là định lý ứng dụng nhiều nhất trong giải bài toán ĐTTH dùng hàm sinh. Chẳng hạn như sau:

$$\left[t^n\right]\frac{1}{(1+rt)(1+st)} = \frac{r^{n+1}-s^{n+1}}{r-s}(-1)^n$$

Công thức này đôi khi rất hữu ích khi tránh cho ta khỏi phải tính toán quá phức tạp.

Định lý 4.2 (Định lý A)–

$$\sum_k\binom{n+ak}{m+bk} z^{n-m+(a-b)k} f_k = \left[t^n\right]\frac{t^m}{(1-zt)^{m+1}} f\left(\frac{t^{b-a}}{(1-zt)^b}\right) \quad (b>a)$$

(f_k là hệ số của x^k trong khai triển thành luỹ thừa hình thức của hàm f)
Do trong đa số các trường hợp thì xét với $z=1$ nên ta thường dùng định lý ở dạng:

$$\sum_k\binom{n+ak}{m+bk} f_k = \left[t^n\right]\frac{t^m}{(1-t)^{m+1}} f\left(\frac{t^{b-a}}{(1-zt)^b}\right) \quad (b>a)$$

□

Chứng minh.

Ta sẽ chứng minh định lý 4.2 ở dạng tổng quát.

$$\begin{aligned}
&\binom{n+ak}{m+bk} z^{n-m+(a-b)k} \\
&= \binom{n+ak}{n+ak-m-bk} z^{n-m+(a-b)k} \\
&= \binom{-n-ak+n+ak-m-bk-1}{n+ak-m-bk} (-z)^{n-m+(a-b)k} \\
&= \binom{-m-bk-1}{n+ak-m-bk} (-z)^{(n-m)+(a-b)k} \\
&= \left[t^{(n-m)+(a-b)k}\right] \frac{1}{(1-zt)^{m+bk+1}} \\
&= [t^n] \frac{t^m}{(1-zt)^{m+1}} \left(\frac{t^{b-a}}{(1-zt)^b}\right)^k
\end{aligned}$$

■

Nhận xét. Bây giờ thử dùng viên kim cương này để cắt cái bánh số 2 nhé.

Bài toán 4.3 (Bài toán 4.2). *Chứng minh rằng* $\forall n \geq 1$:

$$\sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n-k}{k} = F_{n+1}$$

△

Lời giải.
Ta có:

$$\sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n-k}{k} \overset{A}{=} [t^n] \frac{1}{1-t} \left[\frac{1}{1-u}\middle| u = \frac{t^2}{1-t}\right]$$

$$= [t^n] \frac{1}{1-t-t^2} = \left[t^{n+1}\right] \frac{t}{1-t-t^2} = F_{n+1}$$

■

Còn gì để nói ngoài 2 từ "không tưởng" cho lời giải trên ?

$$\begin{aligned}
&= \binom{2n-1}{n}^{-1} [t^n] (1+t)^{2n-1} \frac{t}{1+t} (1+t)^2 \\
&= \binom{2n-1}{n}^{-1} [t^n] (1+t)^{2n} t \\
&= \binom{2n-1}{n}^{-1} \left[t^{n-1}\right] (1+t)^{2n} \\
&= \binom{2n-1}{n}^{-1} \binom{2n}{n-1} = \frac{2n}{n+1}
\end{aligned}$$

Nên từ đây suy ra điều phải chứng minh. ■

Nhận xét. Thông thường những bài tính tổng có tổ hợp chập ở mẫu số sẽ đòi hỏi kỹ năng biến đổi, vì ta thường không có hàm sinh tương ứng cho dạng phân thức có tổ hợp chập ở mẫu số.

Chú ý là trong 2 công thức A, B thì hệ số cần xét là khác nhau, cần chú ý để tránh nhầm lẫn. Ngoài ra, từ bài toán trên, các bạn hãy tự giải bài tương tự sau:

Chứng minh rằng: $\forall n \in \mathbb{N}^* : \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \binom{2n-1}{k}^{-1} = 2$

Ví dụ 4.6. *Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n, ta có:*

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{4n+1}{2n-2k} \binom{k+n}{n} = 4^n \binom{3n}{n}$$

△

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{4}\left[t^{2n}\right]\left(\frac{2}{1-(4t)^2}+\frac{2}{\sqrt{1-(4t)^2}}\right)\\
&= \frac{1}{2}\left[t^{2n}\right]\left(\frac{1}{1-(4t)^2}+\frac{1}{\sqrt{1-4.\left(4t^2\right)}}\right)\\
&= \frac{1}{2}\left(4^{2n}+4^n\binom{2n}{n}\right)\\
&= \frac{1}{2}\left(16^n+4^n\binom{2n}{n}\right)
\end{aligned}
$$

Nên từ đây suy ra đpcm. ■

Nhận xét. Một lần nữa, ta lại sử dụng khai triển $\dfrac{1}{\sqrt{1-4x}}$ quen thuộc.
Tuy có phức tạp hơn một chút nhưng bản chất thì vẫn là tổ hợp chập trung tâm (central binomial); xét phần mẫu số để định hướng: $2k+(2n-2k)=2n$. Bài này còn đòi hỏi một chút khôn khéo để "loại" ra những phần tử không cần thiết trong khai triển.

Ví dụ 4.5. *Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n, ta có:*

$$\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}\binom{2n-1}{k}^{-1}=\frac{2n}{n+1}$$ △

Lời giải.

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}\binom{2n-1}{k}^{-1} &= \sum_{k=0}^{n} k\frac{n!k!\,(2n-1-k)!}{k!\,(n-k)!\,(2n-1)!}\\
&= \binom{2n-1}{n}^{-1}\sum_{k=0}^{n}\binom{2n-1-k}{n-k}k\\
&\overset{B}{=} \binom{2n-1}{n}^{-1}\left[t^n\right](1+t)^{2n-1}\left[\frac{u}{(1-u)^2}\bigg|u=\frac{t}{1+t}\right]
\end{aligned}
$$

Tuy nhiên, ngay đến tác giả cũng không thích phải chứng minh lại định lý A (4.2). Nên nếu cần dùng, các bạn hãy dùng tư tưởng lời giải trên để lách qua quá trình chứng minh lại định lý, cụ thể như sau:

$$
\begin{aligned}
F_{n+1} &= \left[t^{n+1}\right]\frac{t}{1-t-t^2}=\left[t^n\right]\frac{1}{1-t-t^2}=\left[t^n\right]\frac{1}{1-t}\,\frac{1}{1-\dfrac{t^2}{1-t}}\\
&= \left[t^n\right]\frac{1}{1-t}\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^{2k}}{(1-t)^k}=\left[t^n\right]\sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^{2k}}{(1-t)^{k+1}}\\
&= \left[t^n\right]\sum_{k=0}^{\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor}\frac{t^{2k}}{(1-t)^{k+1}}=\sum_{k=0}^{\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor}\binom{n-2k+k+1-1}{n-2k}\\
&= \sum_{k=0}^{\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor}\binom{n-k}{n-2k}=\sum_{k=0}^{\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor}\binom{n-k}{k}
\end{aligned}
$$

(Hơi dài hơn 1 chút nhưng xem ra sơ cấp hơn 1 chút, dù bản chất là như nhau)
Rõ ràng: ở đây ta đã tận dụng tối đa được lợi thế ban đầu là có sẵn hàm sinh tương ứng của dãy Fibonacci. Định lý A (4.2) này còn chỉ ra cách *mô tả* một vế của ĐTTH

Định lý 4.3 (Định lý B)–

$$\sum_{k}\binom{n+ak}{m+bk}f_k=\left[t^m\right](1+zt)^n f\left(t^{-b}(1+zt)^a\right)\quad (b<0)$$

Do trong đa số các trường hợp thì xét với $z=1$ nên ta thường dùng định lý ở dạng:

$$\sum_{k}\binom{n+ak}{m+bk}f_k=\left[t^m\right](1+t)^n f\left(t^{-b}(1+t)^a\right)\quad (b<0)$$ □

Chứng minh.

$$\binom{n+ak}{m+bk}z^{m+bk}=\left[t^{m+bk}\right](1+zt)^{n+ak}=\left[t^m\right](1+zt)^n\left(t^{-b}(1+zt)^a\right)^k$$ ■

Nhận xét. Đôi khi ta cần cân nhắc lựa chọn giữa 2 định lý A (4.2), B (4.3) , vì đôi khi cả 2 điều kiện áp dụng đều thoả mãn.
Hãy xem con dao này cắt cái bánh đầu tiên thế nào nhé!

Bài toán 4.4 (Bài toán 4.1). *Chứng minh rằng:*$\forall n \in \mathbb{N}^*$:

$$\sum_{k=0}^{2n} (-1)^k \binom{2n}{k}^2 = (-1)^n \binom{2n}{n}$$

△

Chứng minh.

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{2n} (-1)^k \binom{2n}{k}^2 &= \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{2n-k} (-1)^k \binom{2n}{k} \\ &\overset{B}{=} \left[t^{2n}\right] (1+t)^{2n} \left[(1-u)^{2n} \middle| u = t\right] \\ &= \left[t^{2n}\right] \left(1-t^2\right)^{2n} = (-1)^n \binom{2n}{n}\end{aligned}$$

■

Nhận xét. Rất ấn tượng với cũng chỉ hơn một dòng!
Quan trọng hơn là từ lời giải không sơ cấp trên, ta lại được gợi ý về lời giải rất sơ cấp. Để ý kỹ lời giải trên thì rõ ràng là khai triển

$$(1-x^2)^{2n} = (1-x)^{2n}(1+x)^{2n}$$

đã ở ngay trước mắt ta. Rõ ràng không có gì là may mắn cả!
Tất nhiên là với một công cụ mạnh như định lý trên thì ta đã được tiếp sức rất nhiều, nhưng điều đó không có nghĩa là không cần sự khéo léo và xoay sở. Chẳng hạn: nếu áp dụng thẳng định lý A cho bài toán trên thì bài toán lại đi ngay vào ngõ cụt!
Các bạn hãy sử dụng định lý này để làm luôn bài toán rất quen thuộc:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$$

Lời giải.
Sử dụng công thức $\binom{n}{k} = \frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1}$, ta có:

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}\binom{m}{k} &= n\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1}\binom{m}{k} \\ &\overset{E}{=} n\left[t^m\right]\frac{1}{1-t}\left[u(1+u)^{n-1} \middle| u = \frac{t}{1-t}\right] \\ &= n\left[t^m\right]\frac{1}{1-t}\cdot\frac{t}{1-t}\cdot\frac{1}{(1-t)^{n-1}} \\ &= n\left[t^{m-1}\right]\frac{1}{(1-t)^{n+1}} \\ &= n\binom{n+1+m-1-1}{m-1} \\ &= n\binom{n+m-1}{n}\end{aligned}$$

Nên từ đây suy ra điều phải chứng minh. ■

Ví dụ 4.4. *Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n, ta có:*

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{4n-4k}{2n-2k}\binom{4k}{2k} = \frac{1}{2}\left(\binom{2n}{n}4^n + 16^n\right)$$

△

Lời giải.

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}\binom{4n-4k}{2n-2k}\binom{4k}{2k} &\overset{conv}{=} \left[t^{2n}\right]\left(\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{1-4t}}+\frac{1}{\sqrt{1+4t}}\right)\right)^2 \\ &= \frac{1}{4}\left[t^{2n}\right]\left(\frac{1}{1-4t}+\frac{2}{\sqrt{1-(4t)^2}}+\frac{1}{1+4t}\right)\end{aligned}$$

nhất hệ số x^n như sau:

$$\begin{aligned} 1 &= \sum_{k=0}^{n} a_k a_{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{4^k}\binom{2k}{k}\frac{1}{4^{n-k}}\binom{2n-2k}{n-k} \\ &= \frac{1}{4^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{2k}{k}\binom{2n-2k}{n-k} \\ \Rightarrow 4^n &= \sum_{k=0}^{n}\binom{2k}{k}\binom{2n-2k}{n-k} \end{aligned}$$

Và ta có điều phải chứng minh. ■

Nhận xét. Đây là bài Toán rất cơ bản - đẹp và tiêu biểu cho việc áp dụng hàm sinh chứng minh ĐTTH. Lời giải dùng hàm sinh dựa trên khai triển liên quan đến $\binom{2k}{k}$ của hàm số $\frac{1}{\sqrt{1-x}}$ (hoặc có thể là $\frac{1}{\sqrt{1-4x}}$); đồng thời phần "mẫu số" với $k, n-k$ thoả : $k+n-k=n$ cũng góp phần định hướng lời giải cho ta.
Đẳng thức trên đóng vai trò là bổ đề trong nhiều bài toán khác. Chẳng hạn: dùng đẳng thức này có thể tính tổng:

$$\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}(2i-1)!!\,(2\,(n-i)-1)!!$$

(Coi $(-1)!!=1$). *Gợi ý:* $=(2n)!!$
Trong đường link trên, còn có 1 lời giải rất sáng tạo - đẹp, sử dụng đếm 2 cách với ý tưởng là tô màu n đoạn thẳng liên tiếp bởi 4 màu khác nhau. Lời giải này đẹp và sử dụng được 1 trong những phương pháp truyền thống của đếm 2 cách: tô màu, chia thẻ,... nhưng xét về khía cạnh hiệu quả thì lời giải bằng hàm sinh chỉ đòi hỏi một lượng kiến thức tối thiểu.

Ví dụ 4.3. *Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n, m, ta có:*

$$\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}\binom{m}{k} = n\binom{m+n-1}{n} \qquad \triangle$$

Định lý 4.4 (Định lý E (Phép chuyển đổi Euler))–

$$\sum_{k}\binom{n}{k} z^{n-k} f_k = [t^n]\,\frac{1}{1-zt} f\left(\frac{t}{1-zt}\right) \qquad \square$$

Định lý 4.5 (Định lý P (Formula of Partial sums))–

$$\sum_{k=0}^{n} f_k = [t^n]\,\frac{f(t)}{1-t} \qquad \square$$

4.5 Bài tập minh họa

Ví dụ 4.1. *Chứng minh rằng $\forall n \in \mathbb{N}^*$:*

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\binom{2k}{k} = \sum_{k=0}^{\left\lfloor \frac{n}{2}\right\rfloor}\binom{n}{2k}\binom{2k}{k}3^{n-2k} \qquad \triangle$$

Lời giải.

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\binom{2k}{k} &\overset{E}{=} [t^n]\,\frac{1}{1-t}\left[\frac{1}{\sqrt{1-4u}} \mid u=\frac{t}{1-t}\right] \\ &= [t^n]\,\frac{1}{\sqrt{(1-t)\,(1-5t)}} \\ &= [t^n]\,\frac{1}{\sqrt{1-6t+5t^2}} \\ &= [t^n]\,\frac{1}{1-3t}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-4\frac{t^2}{(1-3t)^2}}} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= [t^n]\frac{1}{1-3t}\sum_{k=0}^{\infty}\binom{2k}{k}\frac{t^{2k}}{(1-3t)^{2k}}\\
&= [t^n]\sum_{k=0}^{\infty}\binom{2k}{k}\frac{t^{2k}}{(1-3t)^{2k+1}}\\
&= [t^n]\sum_{k=0}^{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor}\binom{2k}{k}\frac{t^{2k}}{(1-3t)^{2k+1}}\\
&= \sum_{k=0}^{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor}\binom{2k}{k}3^{n-2k}\binom{2k+1+n-2k-1}{n-2k}\\
&= \sum_{k=0}^{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor}\binom{2k}{k}3^{n-2k}\binom{n}{n-2k}\\
&= \sum_{k=0}^{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor}\binom{2k}{k}3^{n-2k}\binom{n}{2k}
\end{aligned}
$$

Nên từ đây suy ra điều phải chứng minh. ■

Nhận xét. Bài này có thể có cách làm khác dựa trên hàm sinh đa thức. Đó là cách xét đa thức $(x^2+3x+1)^n$. Chú ý là ta có 2 cách để khai triển đa thức này thông qua nhị thức Newton: $\left(x^2+3x+1\right)^n = \left((x+1)^2+x\right)^n = \left(\left(x^2+1\right)+3x\right)^n$. Cụ thể xét hệ số nào, xin được nhường cho bạn đọc. Đây cũng là 1 cách thú vị, tuy nhiên theo quan điểm tác giả, thì lời giải ban đầu như trên là tự nhiên hơn. Ngoài ra, với cách giải hoàn toàn tương tự, ta còn giải được bài toán sau:

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\binom{2k}{k} = (-1)^n\sum_{k=0}^{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor}\binom{n}{2k}\binom{2k}{k} \quad (n\geq 1)$$

Ví dụ 4.2. *Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n, ta có :*

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{2k}{k}\binom{2(n-k)}{n-k} = 4^n$$

△

Lời giải.
Tham khảo lời giải tại địa chỉ

http://diendantoanhoc.net/forum/index.php?/topic/65986-cm-sum-k0n-c-2kkc-2n-2kn-k4n/

(Bài viết số 2-3)
Xét khai triển hàm:

$$\mathcal{A}(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}} = (1+(-x))^{-1/2} = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{\frac{-1}{2}}{n}(-x)^n \text{ với } |x|<1$$

Trong đó

- $\binom{\frac{-1}{2}}{n} = 1$ nếu $n = 0$
- $$\begin{aligned}\binom{\frac{-1}{2}}{n} &= \frac{-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}-1\right)\left(-\frac{1}{2}-2\right)\ldots\left(-\frac{1}{2}-n+1\right)}{n!} = \frac{(-1)^n(2n-1)!!}{2^n n!}\\ &= \frac{(-1)^n n! 2^n(2n-1)!!}{4^n(n!)^2} = \frac{(-1)^n(2n)!!(2n-1)!!}{4^n(n!)^2}\\ &= \frac{(-1)^n(2n)!}{4^n(n!)^2} = \frac{(-1)^n}{4^n}\binom{2n}{n} \text{ nếu } n\geq 1\end{aligned}$$

Suy ra $\mathcal{A}(x) = \sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$ với $a_n = \frac{1}{4^n}\binom{2n}{n}$

Ta có

$$(\mathcal{A}(x))^2 = \left(\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n\right)^2 = \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty}x^n \quad (|x|<1)$$

Nên nếu vận dụng tính chất của 2 chuỗi số bằng nhau, ta có thể đồng