

CHUYÊN ĐỀ: ELIP

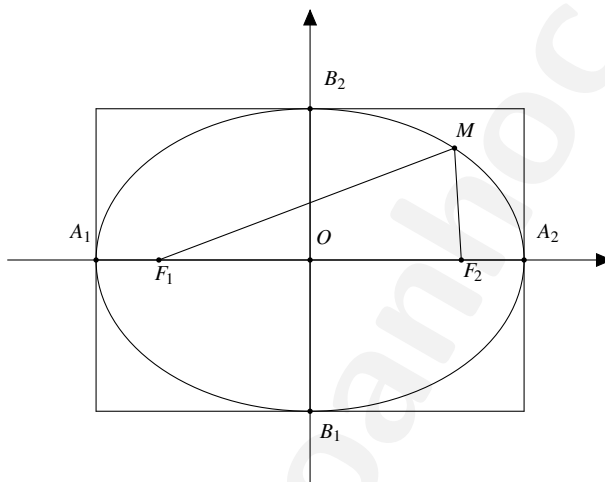
A - TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Định nghĩa:

Cho hai điểm cố định F_1, F_2 với $F_1F_2 = 2c$ và một độ dài không đổi $2a(a > c)$. Elip là tập hợp những điểm M sao cho:

$$F_1M + F_2M = 2a$$

Ta gọi: F_1, F_2 : Tiêu điểm, $F_1F_2 = 2c$: Tiêu cự, F_1M, F_2M : Bán kính qua tiêu.



2. Phương trình chính tắc của Elip

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy với $F_1(-c; 0), F_2(c; 0)$:

$$M(x; y) \in (E) \Leftrightarrow \boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1} \quad (1).$$

Trong đó: $b^2 = a^2 - c^2$

(1) được gọi là phương trình chính tắc của (E)

3. Hình dạng và tính chất của Elip

Elip có phương trình (1) nhận các trục tọa độ là trục đối xứng và gốc tọa độ làm tâm đối xứng.

+ Tiêu điểm: Tiêu điểm trái $F_1(-c; 0)$, tiêu điểm phải $F_2(c; 0)$

+ Các đỉnh: $A_1(-a; 0), A_2(a; 0), B_1(0; -b), B_2(0; b)$

+ Trục lớn: $A_1A_2 = 2a$, nằm trên trục Ox ; Trục nhỏ: $B_1B_2 = 2b$, nằm trên trục Oy

+ Hình chữ nhật cơ sở: Là hình chữ nhật tạo bởi các đường thẳng $x = \pm a, y = \pm b$

Từ đó ta thấy hình chữ nhật cơ sở có chiều dài là $2a$ và chiều rộng là $2b$

+ Tâm sai: $\boxed{e = \frac{c}{a} < 1}$

+ Bán kính qua tiêu của điểm $M(x_M, y_M) \in (E)$ là:

$$MF_1 = a + ex_M = a + \frac{cx_M}{a}, \quad MF_2 = a - ex_M = a - \frac{ax_M}{c}$$

+ Đường chuẩn của Elip:

Đường thẳng $\Delta_1: x + \frac{a}{e} = 0$ được gọi là đường chuẩn của elip, ứng với tiêu điểm $F_1(-c; 0)$

Đường thẳng $\Delta_2: x - \frac{a}{e} = 0$ được gọi là đường chuẩn của elip, ứng với tiêu điểm $F_2(c; 0)$

Tính chất của đường chuẩn:

$$\frac{MF_1}{d(M; \Delta_1)} = \frac{MF_2}{d(M; \Delta_2)} = e < 1, \quad \forall M \in (E)$$

B - GIẢI TOÁN

I - VIẾT PHƯƠNG TRÌNH CHÍNH TẮC CỦA ELIP

Các bước thực hiện:

Bước 1: Giả sử phương trình chính tắc của elip là: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) (E)

Bước 2: Sử dụng các dữ kiện bài toán thiết lập các phương trình để tìm a, b

Chú ý các kiến thức liên quan đến a, b , chẳng hạn: tọa độ tiêu điểm, tọa độ đỉnh, tâm sai, $b^2 = a^2 - c^2 \dots$

Ví dụ 1.1: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho điểm $M(-\sqrt{3}; 1)$, đường elip (E) đi qua điểm M và khoảng cách giữa hai đường chuẩn của (E) là 6. Lập phương trình chính tắc của (E).

Nhận xét: Đây là bài tập cơ bản với các yếu tố đã được cho khá rõ ràng, để làm được bài toán chỉ yêu cầu thuộc các khái niệm và kĩ năng biến đổi giải hệ phương trình cơ bản.

Lời giải:

Giả sử phương trình chính tắc của (E) là: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$)

$\Rightarrow$ Hai đường chuẩn của (E) có phương trình là: $\Delta_1 : x + \frac{a}{e} = 0$; $\Delta_2 : x - \frac{a}{e} = 0$

Do đó khoảng cách giữa hai đường chuẩn là: $2\frac{a}{e} = \frac{2a^2}{c}$

$\Rightarrow \frac{2a^2}{c} = 6 \Leftrightarrow a^4 = 9c^2 = 9(a^2 - b^2) \Leftrightarrow b^2 = \frac{9a^2 - a^4}{9}$ (1)

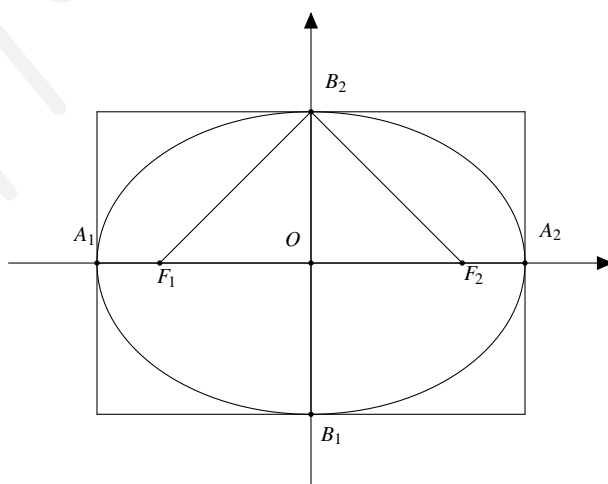
Mặt khác: $M(-\sqrt{3}; 1) \in (E) \Rightarrow \frac{3}{a^2} + \frac{1}{b^2} = 1$ (2)

Thế (1) vào (2) và rút gọn ta được: $a^4 - 12a^2 + 36 = 0 \Leftrightarrow (a^2 - 6) = 0 \Leftrightarrow a^2 = 6 \Rightarrow b^2 = 2$.

Đáp số: (E) : $\frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{2} = 1$.

Ví dụ 1.2: Thi thử lần 1 - THPT Bỉm Sơn - Thanh Hóa

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , lập phương trình chính tắc của elip (E) biết nó có một đỉnh và hai tiêu điểm tạo thành một tam giác đều và chu vi của hình chữ nhật cơ sở của (E) là $12(2 + \sqrt{3})$.



Nhận định:

Dữ kiện: **chu vi** hình chữ nhật cơ sở và **tam giác đều** sẽ thiết lập được hai phương trình tìm a và b

+ Chu vi của hình chữ nhật cơ sở là: $2(2a + 2b)$

+ Các đỉnh là $A_1(-1;0), A_2(1;0), B_1(0;-b), B_2(0;b)$ và các tiêu điểm là $F_1(-c;0), F_2(c;0)$

$\rightarrow \Delta B_1 F_1 F_2$ và $\Delta B_2 F_1 F_2$ đều $\rightarrow F_2 B_2 = F_1 F_2$

+ $a^2 - c^2 = b^2$

Lời giải:

Gọi phương trình chính tắc của elip (E) là: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$)

Khi đó chu vi của hình chữ nhật cơ sở là $2(2a + 2b)$

$$\Rightarrow 2(2a + 2b) = 12(2 + \sqrt{3}) \Leftrightarrow a + b = 3(2 + \sqrt{3}) \quad (1)$$

Do các đỉnh $A_1(-a;0), A_2(a;0)$ và $F_1(-c;0), F_2(c;0)$ cùng nằm trên Ox nên theo giả thiết F_1, F_2 cùng với đỉnh $B_2(0;b)$ trên Oy tạo thành một tam giác đều $\Leftrightarrow B_2 F_2 = F_1 F_2 = B_2 F_1$ (*)

Ta thấy: F_1, F_2 đối xứng nhau qua Oy nên $\Delta B_2 F_1 F_2$ luôn là tam giác cân tại B_2

Do đó: (*) $\Leftrightarrow B_2 F_2 = F_1 F_2 \Leftrightarrow \sqrt{c^2 + b^2} = 2c \Leftrightarrow b^2 = 3c^2$

Lại có: $a^2 - c^2 = b^2 \Rightarrow 3a^2 = 4b^2 \quad (2)$

Từ (1) và (2) suy ra: $a = 6$ và $b = 3\sqrt{3}$

Đáp số: $(E): \frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{27} = 1$

Ví dụ 1.3:(B-2012) Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hình thoi $ABCD$ có $AC = 2BD$ và đường tròn tiếp xúc với các cạnh của hình thoi có phương trình $x^2 + y^2 = 4$. Viết phương trình chính tắc của elip (E) đi qua các đỉnh A, B, C, D của hình thoi. Biết điểm A nằm trên trục Ox

Nhận định:

- Các đặc điểm của hình thoi:

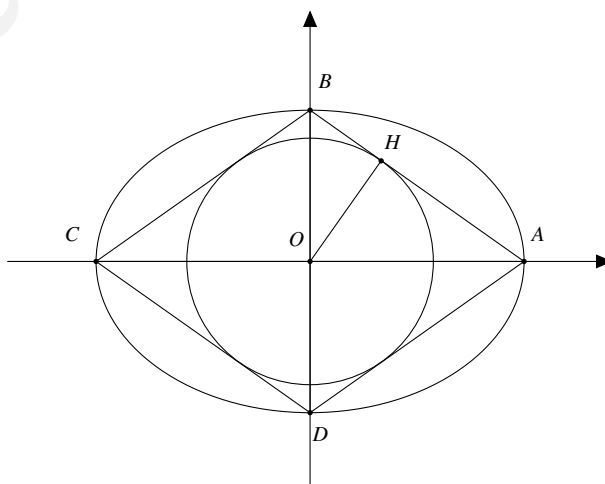
Đường tròn nội tiếp có phương trình: $x^2 + y^2 = 4$. (Tâm $O(0;0)$, bán kính $R = 2$)

Tâm đường tròn nội tiếp là tâm của hình thoi $\rightarrow$ Gốc tọa độ $O(0;0)$ là tâm của hình thoi.

$A \in Ox \rightarrow C \in Ox, BD \perp AC \rightarrow B, D \in Oy$

- $A, B, C, D \in (E)$ nên A, B, C, D là các đỉnh của (E) !

- Như vậy ta đã xác định được mối liên hệ giữa đỉnh của elip với hình thoi, với hai điều kiện $AC = 2BD$ và đường tròn nội tiếp hình thoi có bán kính $R = 2$ ta sẽ thiết lập được hai phương trình để xác định tọa độ các đỉnh của elip.



Lời giải:

Giả sử phương trình của elip (E) là: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$

Ta có: Đường tròn $(C): x^2 + y^2 = 4$ là đường tròn nội tiếp hình thoi ABCD, có tâm $O(0;0)$, bán kính $R = 2$

Vì tâm của (C) là tâm của hình thoi nên AC và BD vuông góc với nhau tại trung điểm O của mỗi đường

Mà $A \in Ox \Rightarrow C \in Ox$ và $B, D \in Oy$

Lại có: $A, B, C, D \in (E) \Rightarrow A, B, C, D$ là bốn đỉnh của (E)

Nếu đổi chỗ A và C cho nhau hoặc B và D cho nhau thì Elip không thay đổi nên ta có thể giả sử A, B lần lượt nằm ở nửa trục dương của Ox và Oy , khi đó tọa độ của chúng là $A(a;0), B(0;b)$

$\Rightarrow OA = a, OB = b$. Vì $AC = 2BD$ nên $OA = 2OB \Rightarrow a = 2b$

Kẻ OH vuông góc với AB tại $H \Rightarrow OH = R = 2$

Vì tam giác ABO vuông tại $O \Rightarrow \frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} \Leftrightarrow \frac{1}{4} = \frac{1}{a^2} + \frac{4}{a^2} \Leftrightarrow a^2 = 20 \Rightarrow b^2 = 5$

Vậy phương trình (E) là: $\frac{x^2}{20} + \frac{y^2}{5} = 1$

II - TÌM ĐIỂM THUỘC ELIP

Các bước thực hiện:

Bước 1: Xác định các "từ khóa" liên quan đến điểm cần tìm, cố gắng chuyển chúng thành công thức tương ứng.

Bước 2: Từ giả thiết, thiết lập phương trình tìm tọa độ của điểm. Chú ý rằng điểm cần tìm luôn thuộc (E) nên tọa độ của nó luôn thỏa mãn phương trình (E) , đây là một phương trình.

Ví dụ 2.1: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho elip $(E): \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{1} = 1$. Tìm trên (E) những điểm t/m :

- Có bán kính qua tiêu điểm này bằng 3 lần bán kính qua tiêu điểm kia?
- Nhìn hai tiêu điểm dưới góc vuông.

Lời giải:

$$(E): \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{1} = 1 \Rightarrow a = 3, b = 1 \Rightarrow c = \sqrt{a^2 - b^2} = 2\sqrt{2}$$

1. Từ khóa cần quan tâm "bán kính qua tiêu"

Gọi $M(x_o, y_o)$ là điểm phải tìm. Khi đó bán kính qua tiêu của M là:

$$MF_1 = a + ex_o = a + \frac{cx_o}{a}, \quad MF_2 = a - ex_o = a - \frac{cx_o}{a}$$

Từ giả thiết suy ra:

$$\begin{cases} MF_1 = 3MF_2 \\ MF_2 = 3MF_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} MF_1 - 3MF_2 = 0 \\ MF_2 - 3MF_1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow (MF_1 - 3MF_2)(MF_2 - 3MF_1) = 0 \quad (1)$$

Khai triển rút gọn ta được:

$$\begin{aligned} (*) &\Leftrightarrow 16MF_1 \cdot MF_2 - 3(MF_1 + MF_2)^2 = 0 \Leftrightarrow 16(a + ex_o)(a - ex_o) - 3(2a)^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow x_o^2 = \frac{a^2}{4e^2} = \frac{a^4}{4c^2} = \frac{81}{32} \Leftrightarrow x_o = \pm \frac{9\sqrt{2}}{8} \end{aligned}$$

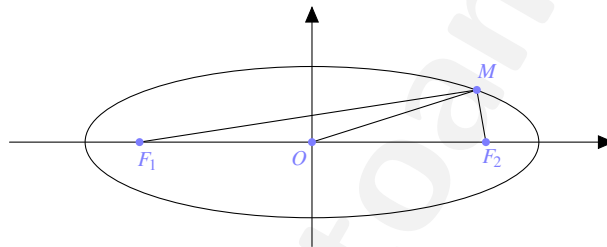
$$\text{Lại có: } M \in (E) \Rightarrow y_o^2 = 1 - \frac{x_o^2}{9} = \frac{23}{32} \Leftrightarrow y_o = \pm \frac{\sqrt{46}}{8}.$$

Đáp số: $M_1 \left(\frac{9\sqrt{2}}{8}; \frac{\sqrt{46}}{8} \right); M_2 \left(\frac{9\sqrt{2}}{8}; -\frac{\sqrt{46}}{8} \right); M_3 \left(-\frac{9\sqrt{2}}{8}; \frac{\sqrt{46}}{8} \right); M_4 \left(-\frac{9\sqrt{2}}{8}; -\frac{\sqrt{46}}{8} \right)$

Nhận xét:

- Trong giải toán, ta thường chỉ quen với chiều biến đổi $AB = 0 \Rightarrow \begin{cases} A = 0 \\ B = 0 \end{cases}$ nhưng trong nhiều trường hợp biến đổi theo chiều ngược lại sẽ giúp việc giải bài toán ngắn gọn hơn rất nhiều, mà bài toán trên là một ví dụ.
- Ở bài toán này, việc biến đổi rút gọn cũng là một công việc khá vất vả nếu không có những nhận xét tinh tế, cần chú ý rằng $MF_1 + MF_2 = 2a$
- Khi kết luận cần chú ý lấy đủ nghiệm, nhiều bạn thường nhầm lẫn chỉ lấy hai nghiệm M_1, M_4 .

2. Từ khóa "góc vuông"



Với góc $\widehat{F_1MF_2} = 90^\circ$ thì ta có các "công thức" tương đương:

1. $MF_1^2 + MF_2^2 = F_1F_2^2$; 2. $MO = \frac{F_1F_2}{2} = OF_2$; 3. $\overrightarrow{MF_1} \cdot \overrightarrow{MF_2} = 0$

Với từng "công thức" ta sẽ được các hướng làm khác nhau tương ứng, dưới đây tôi trình bày hai cách có thể nói là khá ngắn gọn.

Gọi $M(x_o; y_o)$ là điểm cần tìm. $M \in (E)$ nên $\frac{x_o^2}{9} + y_o^2 = 1$ (1)

Cách 1:

Chú ý rằng MF_1, MF_2 là bán kính qua tiêu, nên ta có:

$\widehat{F_1MF_2} = 90^\circ \Leftrightarrow MF_1^2 + MF_2^2 = F_1F_2^2 \Leftrightarrow (a + ex_o)^2 + (a - ex_o)^2 = 32 \Leftrightarrow x^2 = \frac{(16 - a^2)a^2}{c^2} = \frac{63}{8}$

Từ (1) suy ra: $y_o^2 = \frac{1}{8}$.

Cách 2:

Điểm M nhìn F_1, F_2 dưới một góc vuông nên ΔMF_1F_2 vuông tại M .

Mà dễ thấy O là trung điểm của F_1F_2 nên $OM = \frac{F_1F_2}{2} \Leftrightarrow x_o^2 + y_o^2 = 8$ (2)

Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình:

$$(I) \quad \begin{cases} \frac{x_o^2}{9} + y_o^2 = 1 \\ x_o^2 + y_o^2 = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_o^2 = \frac{63}{8} \\ y_o^2 = \frac{1}{8} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_o = \pm \frac{3\sqrt{14}}{4} \\ y_o = \pm \frac{\sqrt{2}}{4} \end{cases}$$

Nhận xét: Ở cách 2 có thể giải thích theo cách khác như sau:

Do M nhìn F_1, F_2 dưới một góc vuông nên M nằm trên đường tròn (C) nhận F_1F_2 làm đường kính.

Tức là (C) có tâm O bán kính $\frac{F_1F_2}{2} = 2\sqrt{2}$

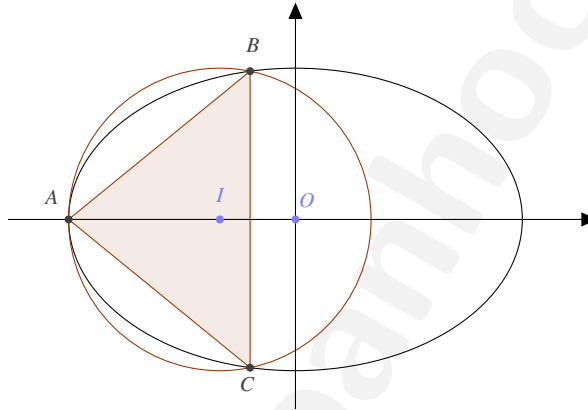
$\Rightarrow M$ là giao điểm của (E) và $(C): x^2 + y^2 = 8$. Do đó tọa độ M là nghiệm hệ (I).

Đáp số: $M_1 \left(\frac{3\sqrt{14}}{4}; \frac{\sqrt{2}}{4} \right); M_2 \left(\frac{3\sqrt{14}}{4}; -\frac{\sqrt{2}}{4} \right); M_3 \left(-\frac{3\sqrt{14}}{4}; \frac{\sqrt{2}}{4} \right); M_4 \left(-\frac{3\sqrt{14}}{4}; -\frac{\sqrt{2}}{4} \right)$

Ví dụ 2.2: Thi thử Chuyên Vĩnh Phúc - Lần 2

Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho elip $(E): \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ và các điểm $A(-3;0), I(-1;0)$. Tìm tọa độ các điểm $B, C \in (E)$ sao cho I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC .

Lời giải:



Gọi (C) là phương trình đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC , (C) có tâm $I(-1;0)$ bán kính $IA = 2$.
Phương trình $(C): x^2 + y^2 + 2x - 3 = 0$.

Do $B, C \in (E)$ nên tọa độ của B, C là nghiệm hệ:
$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 2x - 3 = 0 \\ \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -3 \\ x = -\frac{3}{5} \end{cases}$$

- Với $x = -3 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow B$ tức là trùng với A hoặc C trùng với A (không thỏa mãn)
- Với $x = -\frac{3}{5} \Rightarrow y = \pm \frac{4\sqrt{6}}{5}$.

Đáp số: $B_1 \left(-\frac{3}{5}; \frac{4\sqrt{6}}{5} \right), C_1 \left(-\frac{3}{5}; -\frac{4\sqrt{6}}{5} \right); B_2 \left(-\frac{3}{5}; -\frac{4\sqrt{6}}{5} \right), C_2 \left(-\frac{3}{5}; \frac{4\sqrt{6}}{5} \right)$

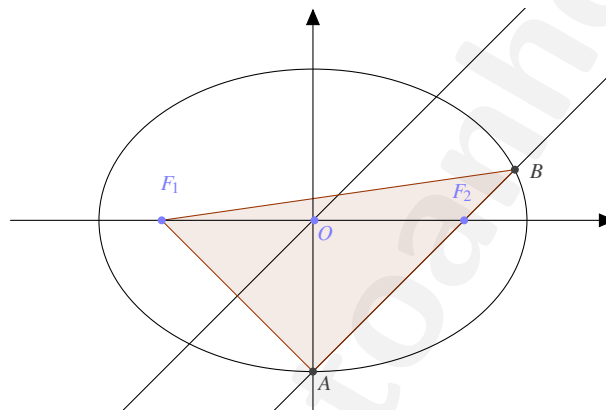
III - BÀI TẬP TỔNG HỢP LIÊN QUAN ĐẾN ELIP

Ví dụ 3.1: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho elip $(E) : \frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{4} = 1$ có các tiêu điểm F_1, F_2 . Đường thẳng d đi qua F_2 và song song với đường phân giác của góc phần tư thứ nhất cắt (E) tại A, B . Tính diện tích tam giác ABF_1 .

Lời giải:

Do giả thiết đã cho đủ để viết được ngay phương trình đường thẳng d chứa A, B (đi qua một điểm đã biết và song song với đường thẳng cho trước) nên ta định hướng tính diện tích theo công thức:

$$S_{ABF_1} = \frac{1}{2} AB \cdot d(F_1; d).$$



$$(E) : \frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{4} = 1 \Rightarrow a^2 = 8, b^2 = 4 \Rightarrow c = \sqrt{a^2 - b^2} = 2 \Rightarrow F_1(-2; 0), F_2(2; 0)$$

Đường phân giác Δ của góc phần tư thứ nhất có phương trình là: $y = x$

Ta có $d \parallel \Delta$ và $F_2 \in d$ nên phương trình d là: $y = x - 2$.

Khi đó tọa độ của B và C là nghiệm hệ:
$$\begin{cases} y = x - 2 \\ \frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{4} = 1 \end{cases} \Rightarrow A(0; -2), B\left(\frac{8}{3}; \frac{2}{3}\right) \text{ hoặc } B(0; -2), A\left(\frac{8}{3}; \frac{2}{3}\right).$$

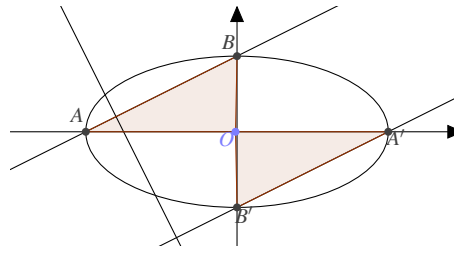
$$\Rightarrow AB = \frac{8\sqrt{2}}{3}, \quad d(F_1, d) = 2\sqrt{2}$$

Đáp số: $S_{ABF_1} = \frac{16}{3}$. $\square$

Ví dụ 3.2: Thi thử Hocmai - Thầy Lê Bá Trần Phương - Đề 02

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho đường thẳng $d : 2x + y + 3 = 0$ và elip $(E) : \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} = 1$. Viết phương trình đường thẳng Δ vuông góc với đường thẳng d cắt (E) tại hai điểm A, B sao cho diện tích tam giác AOB bằng 1.

Lời giải:



Vì $\Delta \perp d$ nên phương trình d có dạng: $x - 2y + m = 0$. Khi đó, A, B là nghiệm hệ:

$$\begin{cases} x - 2y + m = 0 \\ \frac{x^2}{4} + y^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y - m \\ 8y^2 - 4my + m^2 - 4 = 0 \end{cases} \quad (*)$$

Để d cắt (E) tại hai điểm phân biệt A, B thì hệ phải có hai nghiệm phân biệt
 $\Leftrightarrow (*)$ có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta' = 32 - 4m^2 > 0 \Leftrightarrow m \in (-2\sqrt{2}; 2\sqrt{2})$ (1)

Gọi $A(2y_1 - m; y_1), B(2y_2 - m; y_2)$, trong đó y_1, y_2 là nghiệm $(*)$

$$\Rightarrow AB^2 = 5(y_2 - y_1)^2 = 5[(y_1 + y_2)^2 - 4y_1y_2] = \frac{5}{4}(8 - m^2)$$

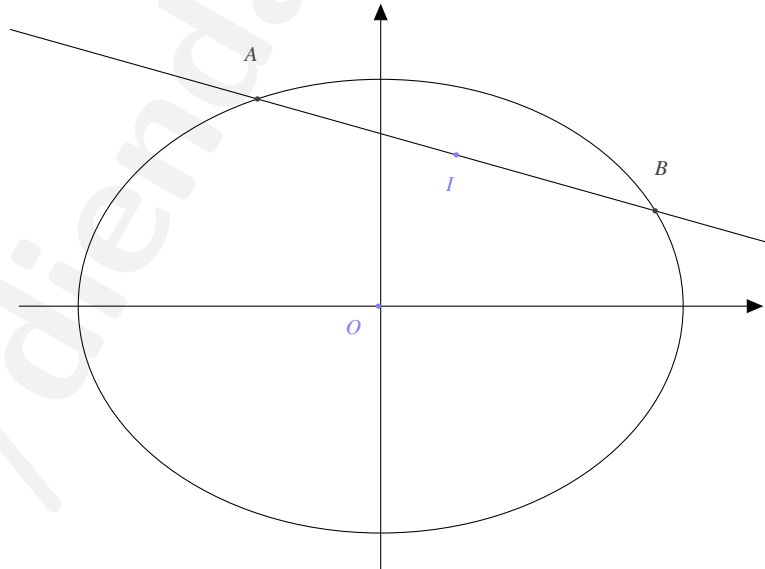
$$\text{Đường cao } OH = d(, \Delta) = \frac{|OH|}{\sqrt{5}} \Rightarrow S_{OAB}^2 = \left(\frac{1}{2}OH \cdot AB\right)^2 = \frac{1}{16}m^2(8 - m^2) = 1 \Leftrightarrow m = 4 \Leftrightarrow m = \pm 2$$

Đáp số: $\Delta_1 : x - 2y + 2 = 0, \Delta_2 : x - 2y - 2 = 0.$ $\square$

Ví dụ 3.3: Thi thử lần 2 - THPT Hàn Thuyên - Bắc Ninh

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho elip $(E) : \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$ và điểm $I(1;2)$. Viết phương trình đường thẳng (d) đi qua I , sao cho d cắt (E) tại A và B thỏa mãn I là trung điểm của đoạn AB .

Lời giải:



Gọi $\vec{u} = (a, b)$ là vectơ chỉ phương của d .

Ta có d đi qua $I(1;2)$ nên phương trình d có dạng: $\begin{cases} x = 1 + at \\ y = 2 + bt \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$

Giả sử (d) cắt (E) tại $A(1 + at_1; 2 + bt_1), B(1 + at_2; 2 + bt_2)$

Vì I là trung điểm của AB nên $2x_I = x_A + x_B \Leftrightarrow t_1 + t_2 = 0$ (1)

Mặt khác: $A, B \in (E)$ nên t_1, t_2 là nghiệm của phương trình:

$$\frac{(1+at)^2}{16} + \frac{(2+bt)^2}{9} = 1 \Leftrightarrow \left(\frac{a^2}{16} + \frac{b^2}{9}\right)t^2 + 2\left(\frac{a}{16} + \frac{2b}{9}\right)t - \frac{71}{144} = 0$$

$$\text{Theo định lí Viet ta có: } t_1 + t_2 = -2\left(\frac{a}{16} + \frac{2b}{9}\right) : \left(\frac{a^2}{16} + \frac{b^2}{9}\right) \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $\frac{a}{16} + \frac{2b}{9} = 0$. Chọn $a = 32, b = -9$ ta được $\vec{u} = (32; -9)$ là một VTCP của d
 $\Rightarrow \vec{n} = (9; 32)$ là một VTPT của d .

Vậy phương trình d là: $9x + 32y - 73 = 0$ $\square$

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài 1.1: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho điểm $A(0;5)$. Lập phương trình chính tắc của elip (E) biết (E) đi qua A và có hình chữ nhật cơ sở nội tiếp đường tròn (C): $x^2 + y^2 = 41$.

Đáp số: (E): $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$.

Bài 1.2: Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy , cho đường thẳng $d: x - \sqrt{5} = 0$. Lập phương trình chính tắc của elip (E), biết một cạnh hình chữ nhật cơ sở của (E) nằm trên d và hình chữ nhật đó có độ dài đường chéo bằng 6.

Đáp số: (E): $\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{4} = 1$.

Bài 1.3: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho điểm $M(-\sqrt{3}; 1)$ đường elip (E) đi qua điểm M và có khoảng cách giữa hai đường chuẩn là 6. Lập phương trình chính tắc của (E).

Đáp số: (E): $\frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{2} = 1$.

Tương tự với $M(-\sqrt{5}; 2)$, khoảng cách giữa hai đường chuẩn là 10. Đáp số: (E): $\frac{x^2}{15} + \frac{y^2}{6} = 1$.

Bài 1.4 Thi thử Hocmai - Thầy Lê Bá Trần Phương - Đề 04

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , một elip (E) đi qua điểm $M(-2; -3)$ và có phương trình một đường chuẩn là $x + 8 = 0$. Viết phương trình chính tắc của (E).

Đáp số: (E_1): $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1$, (E_2): $\frac{x^2}{52} + \frac{y^2}{39/4} = 1$.

Bài 1.5: A-2012

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho đường tròn (C): $x^2 + y^2 = 8$. Viết phương trình chính tắc của elip (E), biết (E) có độ dài trục lớn bằng 8 và (E) cắt (C) tại 4 điểm tạo thành một hình vuông.

Bài 2.1: Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy , cho elip (E) có độ dài trục lớn là 6 và qua điểm $M\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}; \sqrt{2}\right)$. Điểm N nằm trên (E) cách O một đoạn có độ dài bằng $\sqrt{5}$. Tìm tọa độ N ?

Đáp số: $\left(\frac{3\sqrt{5}}{5}; \pm \frac{4\sqrt{5}}{5}\right); \left(-\frac{3\sqrt{5}}{5}; \pm \frac{4\sqrt{5}}{5}\right)$

Bài 2.2: Thi thử Diễn đàn Truonghocso - Lần 1

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho elip (E): $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{25} = 1$. Tìm tọa độ điểm K nằm trên elip sao cho K nhìn các tiêu điểm dưới một góc 120° .

Bài 2.3: Thi thử Hocmai - Thầy Lê Bá Trần Phương - Đề 01

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho elip (E): $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$ và đường thẳng $d: 3x + 4y - 12 = 0$. Chứng minh rằng đường thẳng d cắt (E) tại hai điểm phân biệt A, B . Tìm điểm C thuộc (E) sao cho $\triangle ABC$ có diện tích bằng 6.

Đáp số: $C_1 \left(2\sqrt{2}; -\frac{3}{\sqrt{2}} \right), C_2 \left(-2\sqrt{2}; \frac{3}{\sqrt{2}} \right)$

Bài 2.4: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho điểm M di động trên elip $(E): \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$. Gọi H, K là hình chiếu của M lên các trục tọa độ. Xác định tọa độ của M diện tích $OHMK$ đạt giá trị lớn nhất.

Đáp số: $\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}; \pm\sqrt{2} \right); \left(-\frac{3\sqrt{2}}{2}; \pm\sqrt{2} \right)$

Bài 2.5: A-2011

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho elip $(E): \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} = 1$. Tìm tọa độ các điểm $A, B \in (E)$, có hoành độ dương sao cho tam giác OAB cân tại O và có diện tích lớn nhất.

Bài 3.1: Thi thử Diễn đàn K2pi - Lần 5

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho elip có phương trình $(E): \frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{4} = 1$ và điểm $I(1; -1)$. Một đường thẳng Δ qua I cắt (E) tại hai điểm phân biệt A, B . Tìm tọa độ các điểm A, B sao cho độ lớn của tích $IA \cdot IB$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Bài 3.2: Trong mặt phẳng Oxy , cho elip $(E): \frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{2} = 1$. Viết phương trình đường thẳng d cắt (E) tại hai điểm phân biệt có tọa độ là các số nguyên.

Bài 3.3: Trong mặt phẳng Oxy cho elip $(E): \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ và điểm $M(1; 1)$. Lập phương trình đường thẳng Δ đi qua M sao cho Δ cắt (E) tại hai điểm phân biệt A, B sao cho $MA = MB$.

Đáp số: $\Delta: 4x + 9y - 13 = 0$

Bài 3.4:

Trong mặt phẳng Oxy cho elip $(E): \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ và đường thẳng $d: y = x + m$. d cắt (E) tại hai điểm P, Q . Gọi P', Q' lần lượt là điểm đối xứng của P, Q qua O . Tìm m để $PQP'Q'$ là hình thoi.

Bài 3.5: B-2010

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho $A(2, \sqrt{3})$ và elip $(E): \frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{2} = 1$. Gọi F_1, F_2 là các tiêu điểm của (E) (F_1 có hoành độ âm), M là giao điểm có tung độ dương của đường thẳng AF_1 với (E) , N là điểm đối xứng của F_2 qua M . Viết phương trình đường tròn ngoại tiếp tam giác ANF_2 .

—oOo—

TÀI LIỆU THAM KHẢO

- [1] Trần Thành Minh - Giải toán hình học 12 - NXB Giáo Dục - 2001
- [2] Các đề thi thử Đại học năm học 2012 - 2013
- [3] Diễn đàn Boxmath - Tuyển tập HHGT trong mặt phẳng